



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## DÜZLEM DIŞI HARMONİK YÜK ETKİSİNDE İKİLİ SİLİNDİRİK OYUK İÇEREN YARIM-UZAYIN DAVRANIŞI

Aydın ÖZMUTLU\*, Hasan Faik KARA\*\*, Hasan ENGİN\*\*

\*NKÜ, Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Tekirdağ

\*\*İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul

### ABSTRACT

In this study, response of a homogeneous, isotropic and linear elastic half-space, which includes twin circular cavities, is investigated when subjected to out-of-plane harmonic force. Cavities have different radius and the distance between centers of the cavities varies. Cavity centers are at the same depth. First cavities inner surfaces is subjected to out-of-plane harmonic force whereas second cavities inner surface is stress-free. By using wave function expansion method, displacement fields are expressed in terms of Fourier-Bessel series. Boundary conditions at cavity surfaces are satisfied directly when polar coordinates are used. Boundary condition at flat surface is satisfied by imaging technique. In numerical results, the effect of second cavities radius and the distance between cavity centers on circumferential stress at first cavities surface is demonstrated.

Key words: **Half-space, twin cavities, Fourier-Bessel series, imaging technique**

### ÖZET

Bu çalışmada, düzlem dışı harmonik yük etkisinde ikili silindirik oyuk içeren türdeş, eş yönlü ve doğrusal esnek yarım-uzayın davranışı incelenmiştir. Oyuklar farklı yarıçaplarda olup, aralarındaki mesafe değişkendir. Her iki oyuk merkezinin de serbest yüzeye olan uzaklığı eşittir. Birinci oyuk iç yüzeyi düzlem dışı harmonik yük etkisinde iken ikinci oyukun iç yüzeyi serbesttir. Dalga fonksiyonu açılım tekniği kullanılarak yer değiştirme alanları Fourier-Bessel serileri ile ifade edilmiştir. Kutupsal koordinat takımlarının kullanılması ile oyuk yüzeyindeki sınır koşulları doğrudan sağlatılmıştır. Serbest yüzeydeki sınır koşulu da yansıma tekniği kullanılarak sağlatılmıştır. Sayısal sonuç kısmında ikinci oyuk yarıçapının ve oyuklar arasındaki mesafenin, birinci oyuk yüzeyindeki dairesel gerilmeye olan etkileri gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Yarım uzay, ikili oyuk, Fourier-Bessel serisi, yansıma tekniği

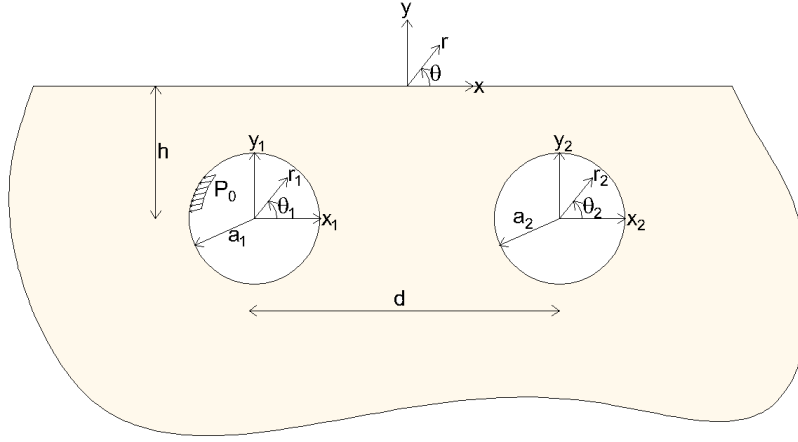
## 1. GİRİŞ

Günümüzde şehirleşmenin artması ile birlikte altyapı sistemlerine olan ihtiyaç da artmıştır. Tüneller, isale, petrol, gaz, enerji ve iletişim hatları gibi yeraltı hat sistemleri, sıvı ya da katı yakıtlar için büyük yeraltı depolama yapıları, sığınaklar ve enerji santralleri gibi yeraltı yapıları, bu altyapı sitemlerine örnek olarak verilebilir. Yeraltı yapıları iç veya dış dinamik zorlamalar veya deprem etkisi gibi yüklere maruz kalmaktadırlar. Herhangi bir afet durumunda bu yapıların ayakta kalması hayati önem taşıdığından, söz konusu yükler altında güvenli olarak tasarlanması gerekmektedir.

Yapılan çalışmalara bakıldığında, boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı, geçmişte Eringen ve Şuhubi [3] ve Graff [4] tarafından etraflıca incelenmiştir. Elastik bir yarım uzayda dairesel bir oyuktan, SH dalgasının saçılım ve kırınım problemi ilk kez Lee [7] tarafından incelenmiştir. Serbest yüzeydeki sınır koşullarının sağlatılmasında yansıma tekniği kullanılmıştır. SH dalgası etkisindeki bir yer altı tünelinin davranışı Lee ve Trifunac [8] tarafından araştırılmıştır. İkili oyuk içeren yarım uzayda, dalga probleminin ilk çözümlerinden biri Balendra ve diğ. [1] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada düzlem harmonik SH dalgası etkisinde dairesel en kesitli paralel ikiz tünel içeren yarım uzayın kararlı çözümleri elde edilmiştir. Guan ve Moore [5] ikili oyuk içeren bir ortamın üç eksenli dinamik davranışını ardışık yansımalar tekniğini kullanarak incelemiştirler. Çoklu dairesel oyuk içeren yarım uzayın SH dalgası etkisindeki dinamik analizini karmaşık fonksiyonlar yöntemini kullanılarak Guoqing ve Dianku [6] tarafından araştırılmıştır. Liang ve diğ. [9] dalga fonksiyonu açılım tekniğini kullanarak yeraltındaki oyuk gruplarının serbest yüzeydeki yer hareketi büyütmesine olan etkisini araştırmışlardır. Dravinski ve Yu [2] genel bir şekle sahip, keyfi sayıdaki farklı ortamın bulunduğu elastik bir yarım uzayın harmonik SH dalgası etkisindeki davranışını doğrudan sınır entegral denklemi yöntemi ile incelemiştirler. Silindirik bir kabuk içeren yarım uzayın titreşim problemi Özmutlu ve diğ. [10] tarafından incelenmiştir. Serbest yüzeydeki sınır koşullarının sağlatılmasında en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

Bu çalışmada, oyukların ekseni boyunca geometrinin, ortamın malzeme özelliklerinin ve zorlamanın değişmediği kabul edilmiştir. Çözümde, yer değiştirme ve gerilmelere ait ifadeler hareket denkleminde yerine yazılarak kutupsal koordinatlarda dalga denklemleri elde edilmiştir. Bu dalga denklemlerinin çözümü, yerel eksen takımlarında Fourier Bessel serisi şeklinde elde edilmiştir. Oyuk yerel eksen takımları arasındaki dönüşümde ekleme teoremi kullanılmıştır. Böylece oyuk yüzeylerindeki sınır koşulları tam olarak sağlatılmıştır. Serbest yüzeydeki sınır koşulları da yansıma tekniği ile sağlatılmıştır.

## 2. TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM



Şekil 1. Problemin geometrisi

Yarı sonsuz ortamda, serbest yüzeyden  $h$  kadar derinlikte, yarıçapları sırası ile  $a_1$  ve  $a_2$  olan, Şekil 1 de görüldüğü gibi iki dairesel silindirik oyuk göz önüne alalım. Oyuklar  $(r, \theta, z)$  silindirik koordinatlar olmak üzere  $z$  eksenini boyunca uzanmaktadır ve merkezleri arasında  $d$  kadar mesafe vardır. Ortamın malzeme özelliklerinin, oyukların geometrisinin ve zorlamanın  $z$  eksenini boyunca değişmediği kabul edilmiştir. Problemin geometrisi nedeni ile kutupsal koordinatların kullanılması uygun olacaktır. Yarım uzayın türdeş, eş yönlü ve doğrusal esnek bir malzemeden oluştuğu kabul edilmiştir. Yarım uzayda  $\beta$  kayma dalgası hızı ve  $\mu$  kayma modülüdür.

Problemin yönetici denklemi olan dalga denklemi kutupsal formda (1)'de verilmiştir.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U(r, \theta, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(r, \theta, t) \quad (1)$$

Kararlı halde yer değiştirmeler harmonik olacaktır.

$$U(r, \theta, t) = u(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

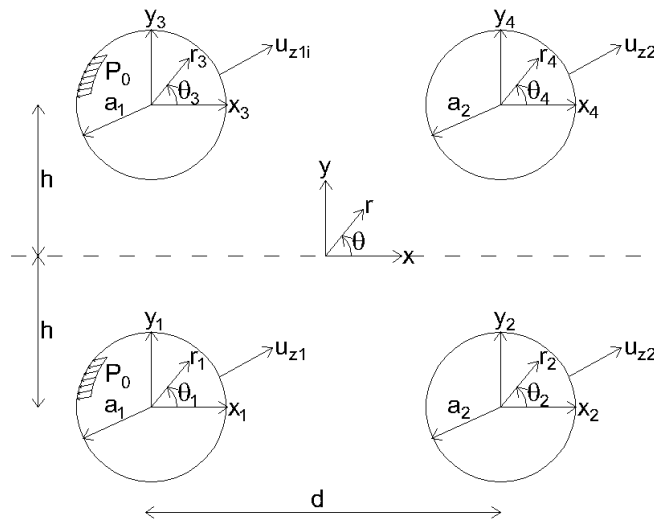
Burada  $\omega$  açısal frekanstır. (2) denklemi (1)'e yerleştirilirse Helmholtz denklemi elde edilir.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right) u(r, \theta) = 0 \quad (3)$$

Burada  $k = \omega/\beta$  dalga sayısını temsil eder. Helmholtz denkleminin çarpanlara ayırma yöntemi ile çözülmesi ile aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) + B_n H_n^{(1)}(kr) \sin(n\theta) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta) + D_n H_n^{(2)}(kr) \sin(n\theta) \right) \quad (4)$$

Birinci oyuk  $z_1$  eksenini doğrultusunda  $\tau_{rz}(r_1 = a_1, \theta_1, t) = P_0 e^{-i\omega t}$  şeklinde bir harmonik yüklenmiş olup, ikinci oyuk yüksüzdür. Bu zorlama etkisinde ortamda SH dalgaları oluşur. Oluşan SH dalgaları düz yüzeyden aynı açı ile yansımaları olacaktır. Yansıyan dalgaları temsil etmek için sisteme oyukların  $x$  eksenine göre simetrik yansımaları eklenir. Oyuklar ve yansımaları ile birlikte eşdeğer model Şekil 2’de gösterilmektedir.



Şekil 2. Eşdeğer model

Burada birinci ve ikinci oyuktan gelen yer değiştirme alanları  $u_{z1}$  ve  $u_{z2}$  ile, yansımalarından gelen yer değiştirme alanları da  $u_{z1i}$  ve  $u_{z2i}$  ile gösterilmiştir. (4)’de verilen çözüm fonksiyonundaki  $C_n$  ve  $D_n$  katsayıları ile başlayan terimler, Sommerfeld ışınım koşulunu sağlamadığı için çözümden çıkartılır. Bu durumda oyuklardan saçılan yer değiştirme alanları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$u_{z1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{z1,n} H_n^{(1)}(kr_1) \cos(n\theta_1) + B_{z1,n} H_n^{(1)}(kr_1) \sin(n\theta_1) \right) \quad (5)$$

$$u_{z2}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{z2,n} H_n^{(1)}(kr_2) \cos(n\theta_2) + B_{z2,n} H_n^{(1)}(kr_2) \sin(n\theta_2) \right) \quad (6)$$

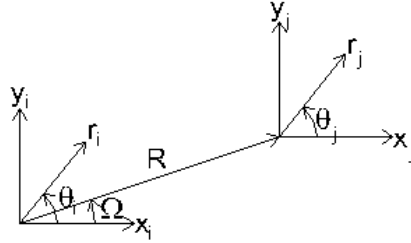
$$u_{z1i}(r_3, \theta_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{z1i,n} H_n^{(1)}(kr_3) \cos(n\theta_3) + B_{z1i,n} H_n^{(1)}(kr_3) \sin(n\theta_3)) \quad (7)$$

$$u_{z2i}(r_4, \theta_4) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{z2i,n} H_n^{(1)}(kr_4) \cos(n\theta_4) + B_{z2i,n} H_n^{(1)}(kr_4) \sin(n\theta_4)) \quad (8)$$

Ortamdaki toplam yer değiştirme alanı, oyuklardan ve yansımalarından gelen yer değiştirme alanlarının toplamı olacaktır.

$$u_z = u_{z1} + u_{z2} + u_{z1i} + u_{z2i} \quad (9)$$

Her yer değiştirme alanı, kendi kutupsal koordinat sisteminde tanımlanmıştır. Koordinat dönüşümü gereken durumlarda aşağıdaki ekleme teoremlerinden yararlanılır (Watson, [11]).



Şekil 3. Ekleme teorisi koordinat dönüşümleri

$$\begin{aligned} C_n(kr_i) \cos(n\theta_i) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{4} \right) \left( (e^{i\Omega(n-m)} + (-1)^n e^{i\Omega(m+n)}) H_{n-m}^{(1)}(kR) \right. \\ &+ (-1)^m \left( (-1)^n e^{i\Omega(n-m)} + e^{i\Omega(m+n)} \right) H_{m+n}^{(1)}(kR) \left. \right) J_m(kr_j) \cos(n\theta_j) + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left( i \frac{2 - \delta_{m0}}{4} \right) \left( (e^{i\Omega(n-m)} - (-1)^n e^{i\Omega(m+n)}) H_{n-m}^{(1)}(kR) \right. \\ &+ (-1)^m \left( (-1)^n e^{i\Omega(n-m)} - e^{i\Omega(m+n)} \right) H_{m+n}^{(1)}(kR) \left. \right) J_m(kr_j) \sin(n\theta_j) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_n(kr_i) \sin(n\theta_i) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( -i \frac{2 - \delta_{m0}}{4} \right) \left( (e^{i\Omega(n-m)} - (-1)^n e^{i\Omega(m+n)}) H_{n-m}^{(1)}(kR) \right. \\ &- (-1)^m \left( (-1)^n e^{i\Omega(n-m)} - e^{i\Omega(m+n)} \right) H_{m+n}^{(1)}(kR) \left. \right) J_m(kr_j) \cos(n\theta_j) + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{4} \right) \left( (e^{i\Omega(n-m)} + (-1)^n e^{i\Omega(m+n)}) H_{n-m}^{(1)}(kR) \right. \\ &- (-1)^m \left( (-1)^n e^{i\Omega(n-m)} + e^{i\Omega(m+n)} \right) H_{m+n}^{(1)}(kR) \left. \right) J_m(kr_j) \sin(n\theta_j) \end{aligned} \quad (11)$$

Burada  $C_n(\cdot)$  yerine Hankel  $H_n^{(1)}(\cdot)$  yazılabilir, ayrıca  $\delta_{m0}$ 'da  $m = 0$  için  $\delta_{00} = 1/4$  ve  $m > 1$  için  $\delta_{m0} = 1/2$  dir.

### 3. SINIR KOŞULLARI

Denklem (9)'da verilen yer değiştirme alanı aşağıdaki sınır koşullarını sağlamalıdır.

$$\sigma_{rz} \Big|_{r_1=a} = \mu \frac{\partial}{\partial r_1} u_z(r_1 = a_1, \theta_1) = P_0 \quad (12)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r_2=a} = \mu \frac{\partial}{\partial r_2} u_z(r_2 = a_2, \theta_2) = 0 \quad (13)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r_3=a} = \mu \frac{\partial}{\partial r_3} u_z(r_3 = a_1, \theta_3) = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r_4=a} = \mu \frac{\partial}{\partial r_4} u_z(r_4 = a_2, \theta_4) = 0 \quad (15)$$

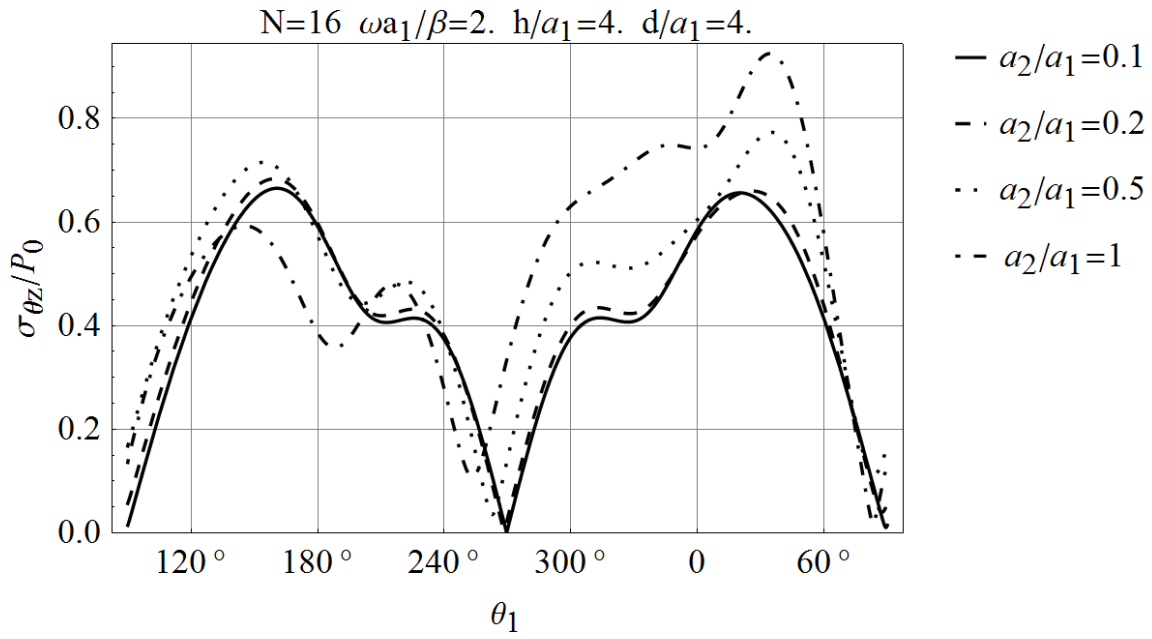
Serbest yüzeydeki sınır koşulu (denklem (16)) kendiliğinden sağlanacaktır.

$$\sigma_{yz} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} u_z(x, y = 0) = 0 \quad (16)$$

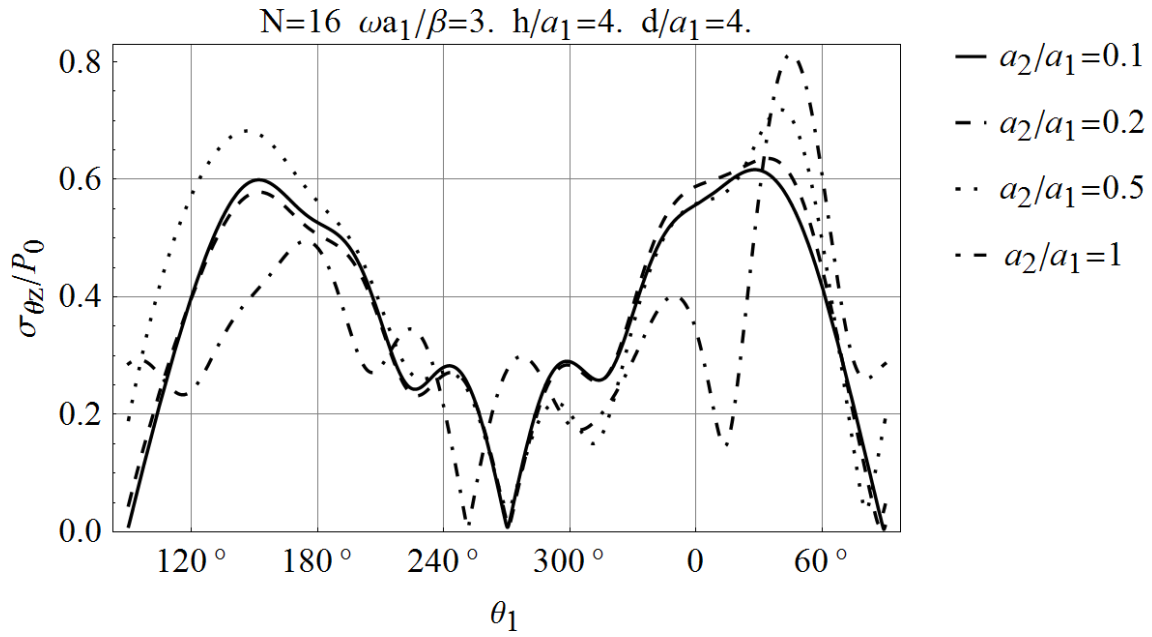
### 4. SAYISAL SONUÇLAR

Fourier-Bessel serileri ve ekleme teorisi serileri yakınsaktır, bu nedenle serilerin üst limiti sonlu bir  $N$  sayısında sınırlandırılabilir. Bu şekilde bilinmeyen sayısı  $8N+4$  adet olacaktır. Toplam 4 adet sınır koşulunun her birinden  $2N+1$  adet, toplamda  $8N+4$  adet denklem elde edilir. Denklem sistemi oluşturularak bilinmeyenler hesaplanır. Sayısal örneklerde uzay boyutundaki değişkenler, birinci oyuk yarıçapına bölünerek boyutsuzlaştırılmıştır.

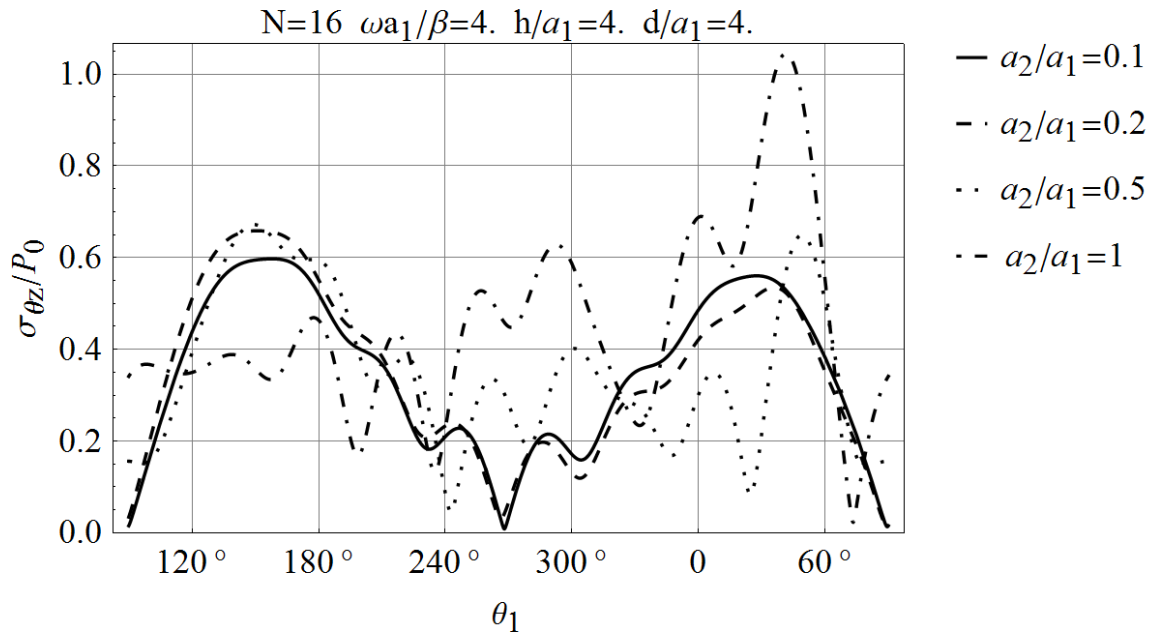
Şekil 4-7'de, ikinci oyuk yarıçapının çeşitli değerleri için birinci oyuk yüzeyindeki dairesel gerilme verilmiştir. Şekil 4-6'da  $a_2 / a_1 = 0.1$  durumunda gerilmeler  $y_1$  eksenine göre simetriktir. Yani ikinci oyuğun etkisi görülmemektedir. İkinci oyuk yarıçapının daha büyük değerleri için ikinci oyuğun etkisi daha da belirgin hale gelmektedir. Ancak Şekil 7'de,  $a_2 / a_1 = 0.1$  değeri için de sonuçlar simetrik değildir. Bu durum yüksek frekanslarda ikinci oyuğun etkisinin daha büyük olduğunu gösterir. Şekil 8-11'de iki oyuk arasındaki mesafenin çeşitli değerleri için birinci oyuktaki dairesel gerilmeler verilmiştir. Şekil 8'de  $d / a_1 = 20$  iken çözüm  $x_1$  eksenine göre yaklaşık olarak simetriktir. Oyuklar arasındaki mesafe daha küçük olması durumunda simetriklik kaybolur. Şekil 9-11'de, açılmalık frekansın daha büyük olduğu durumlarda gerilmeler simetrik olmamaktadır.



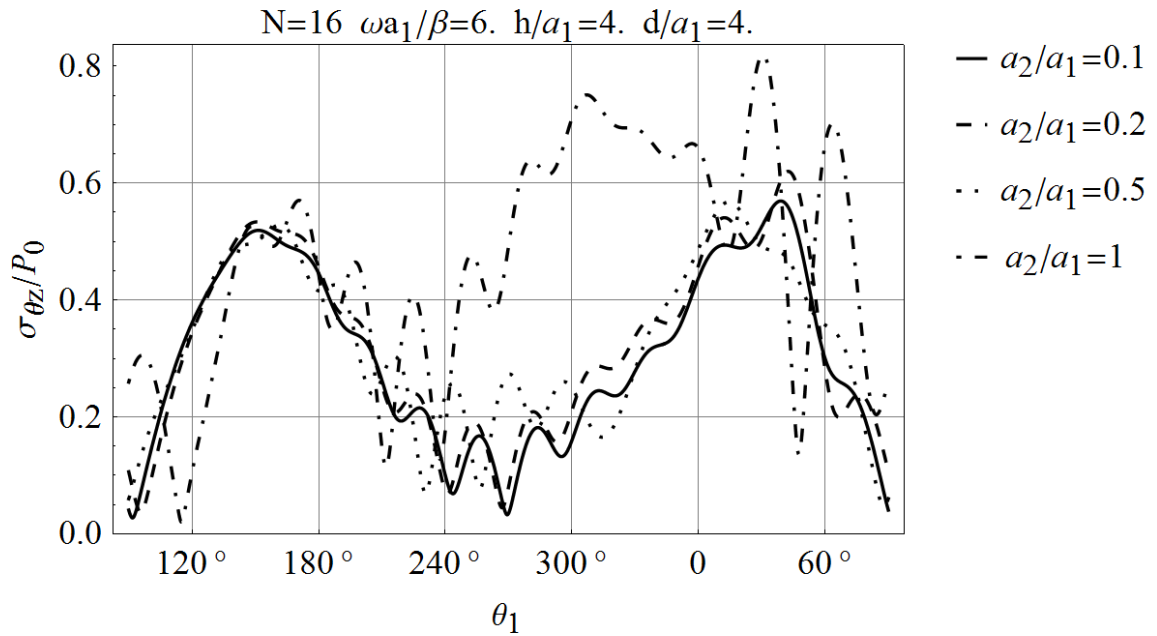
Şekil 4.  $\omega a_1 / \beta = 2$  için ikinci oyuk yarıçapının etkisi



Şekil 5.  $\omega a_1 / \beta = 3$  için ikinci oyuk yarıçapının etkisi

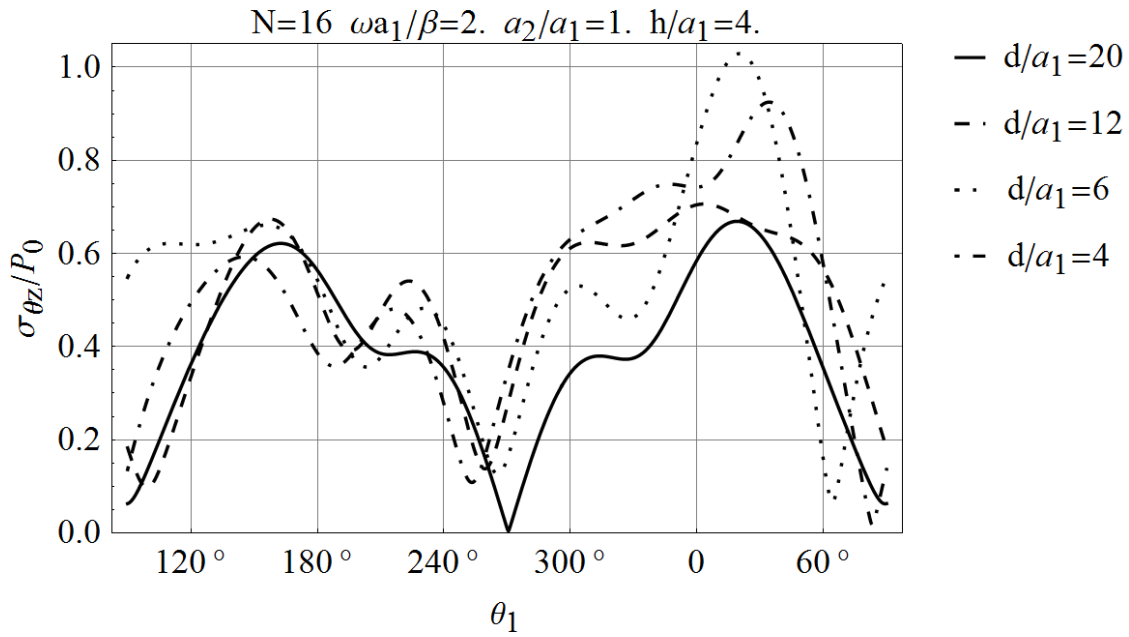


Şekil 6.  $\omega a_1 / \beta = 4$  için ikinci oyuk yarıçapının etkisi

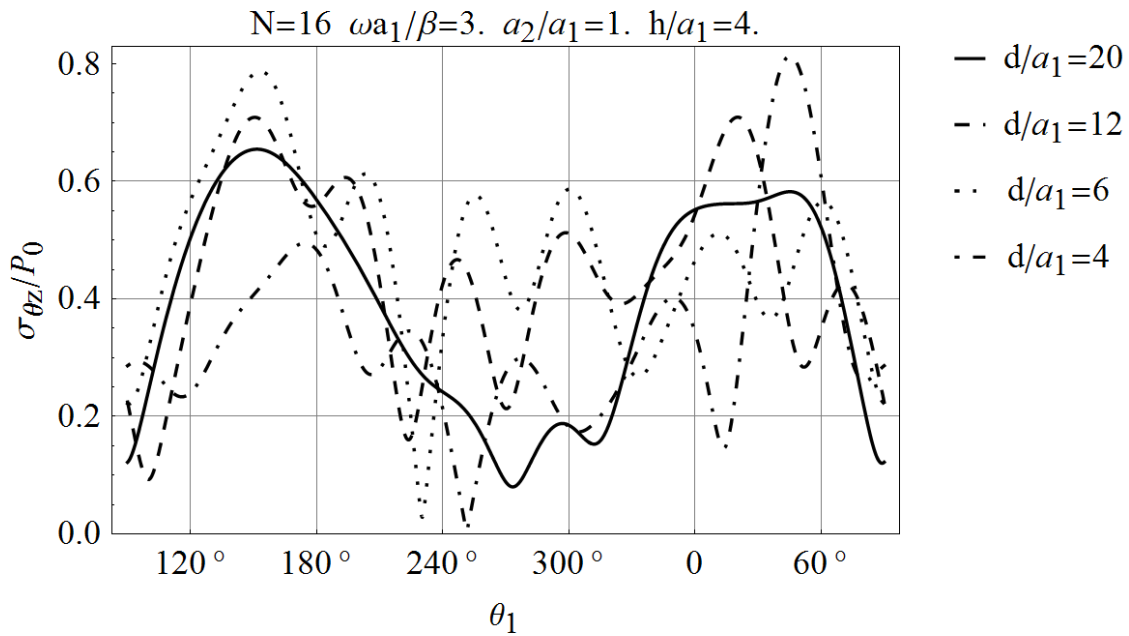


Şekil 7.  $\omega a_1 / \beta = 6$  için ikinci oyuk yarıçapının etkisi

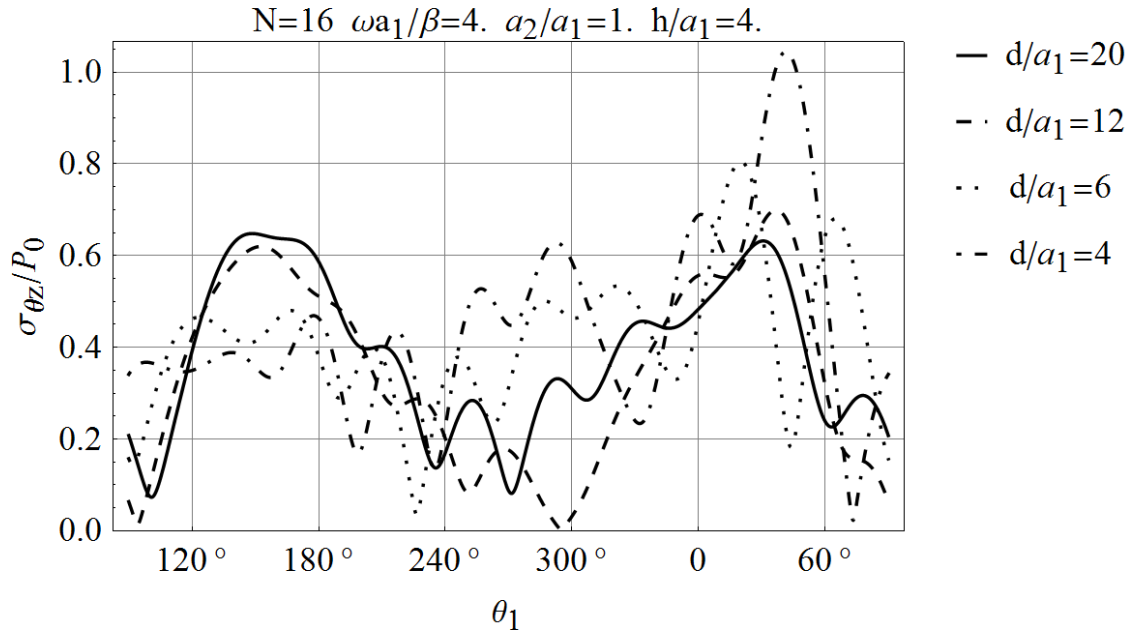




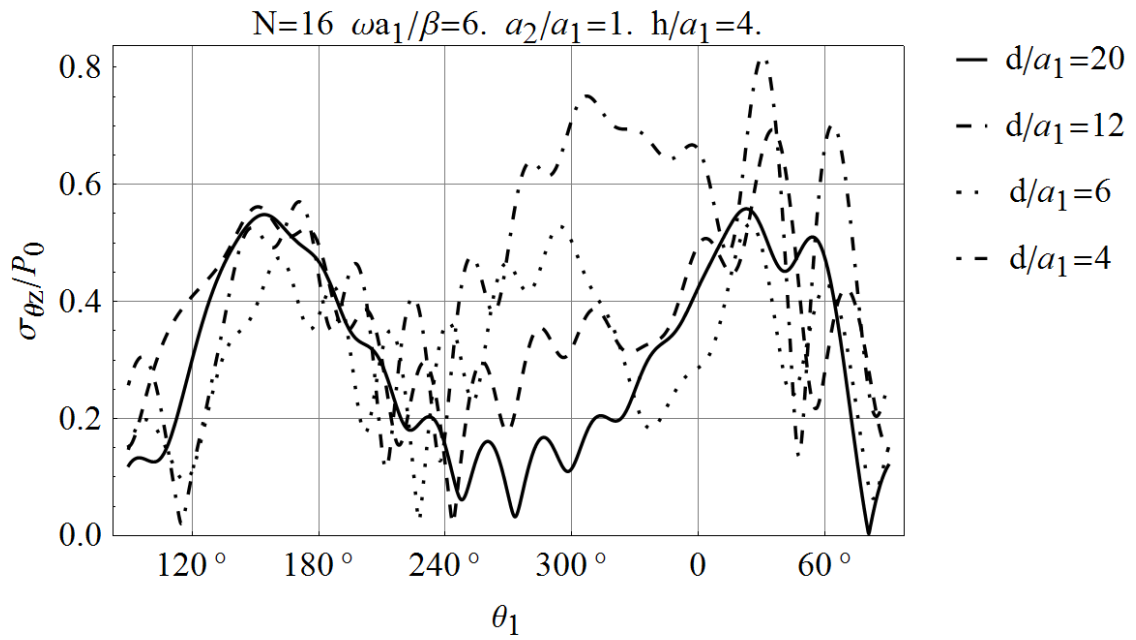
Şekil 8.  $\omega a_1 / \beta = 2$  için oyuklar arasındaki mesafenin etkisi



Şekil 9.  $\omega a_1 / \beta = 3$  için oyuklar arasındaki mesafenin etkisi



Şekil 10.  $\omega a_1 / \beta = 4$  için oyuklar arasındaki mesafenin etkisi



Şekil 11.  $\omega a_1 / \beta = 6$  için oyuklar arasındaki mesafenin etkisi

#### KAYNAKLAR

- [1] Balendra, T., Thambiratnam, D.P., Koh, C.G. and Lee, S.L., (1984), "Dynamic response of twin circular tunnels due to incident SH-waves", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, pp. 181-201

- [2] Dravinski, M. and Yu, M.C., (2011), “Scattering of plane harmonic SH waves by multiple inclusions”, *Geophysical Journal International*, Vol.186, pp. 1331-1346
- [3] Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S., (1975), “Elastodynamics”, Vol II, Academic Press, New York
- [4] Graff, K.F., (1991), “Wave motion in elastic solids”, Dover Publications, New York
- [5] Guan, F. and Moore, I.D., (1996) “Three-dimensional dynamic response of lined tunnels due to incident seismic waves”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 357-369
- [6] Guoqing, W. and Dianku, L., (2002) “Scattering of SH-wave by multiple circular cavities in half space” *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol.1, pp. 36-44
- [7] Lee V W., (1977), “On deformation near circular underground cavity subjected to incident plane SH-waves”, *Proceedings of Symposium of Applications of Computer Methods in Engineering*, Vol. II, pp. 951-961, Los Angeles
- [8] Lee, V.W. and Trifunac M.D., (1979), “Response of tunnels to incident SH-waves”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol.105, pp. 643-659
- [9] Liang J.W, Li Y.H. and Lee V.W., (2006), “A series solution for surface motion amplification due to underground group cavities: incident SH waves”, *Rock and Soil Mechanics*, Vol. 27, pp. 1663-1667
- [10] Özmutlu, A., Coşkun, İ. ve Engin, H., (2003), “Dairesel silindirik kabuk içeren yarım uzayın harmonik zorlama etkisindeki davranışı”, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, s. 635-645, Gaziantep
- [11] Watson, G.N., (1958), “A treatise of the theory of Bessel functions”, Cambridge University Press, London