



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

TEK YÖNLÜ DÜŞÜK YOĞUNLUKLU İÇİ BOŞ YEREL EĞRİLİKLİ LİFLER İÇEREN KOMPOZİTLERİN BASINÇ ALTINDA KIRILMASININ TEORİK LİMİTİ

S.D. AKBAROV^{*,**}, R. KÖŞKER^{***} ve F. ÇOBAN^{****}

* Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Yıldız Yerleşkesi, 34349
Beşiktaş/İstanbul

** Inst. of Math and Mech. of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

*** Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa
Yerleşkesi No:127 Topkapı 34010, İstanbul

**** Yıldız Teknik Üniversitesi, Proje Destek Ofisi P Blok-Eski KOSGEB Binası, Yıldız Yerleşkesi, 34349
Beşiktaş/İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada, Üç-boyutlu lineerleştirilmiş stabilite teorisi kapsamında, yerel eğrilikli, içi boş tek lif içeren sonsuz uzunluklu elastik bir malzemenin yapısındaki stabilite kaybı araştırılmıştır. Stabilite kaybı kriteri olarak başlangıçta var olduğu kabul edilen yerel eğilme genliklerinin büyüyüp sonsuza gitmeye başlaması durumu kabul edilmiştir ve yükün bu değeri kritik yük olarak belirlenmiştir. Stabilite kaybı, bahsedilen kompozit malzemeye, lif yönünde sonsuzda p yoğunluklu homojen yayılmış normal basınç kuvvetleri etki gösterdiğinde araştırılmış ve bununla ilgili sayısal veriler elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this paper, the investigation of the stability loss in the structure of the infinite elastic media containing a local curved hollow single fiber is made in the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability. It is assumed that this fiber has an initial infinitesimal local imperfection and as a stability loss criterion, the external compressive force is taken, for which the initial infinitesimal local imperfection starts to increase and grow indefinitely. This investigation of the stability loss is studied when the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces with intensity p acting in the direction of the fibers and the corresponding numerical results are presented.

1.GİRİŞ

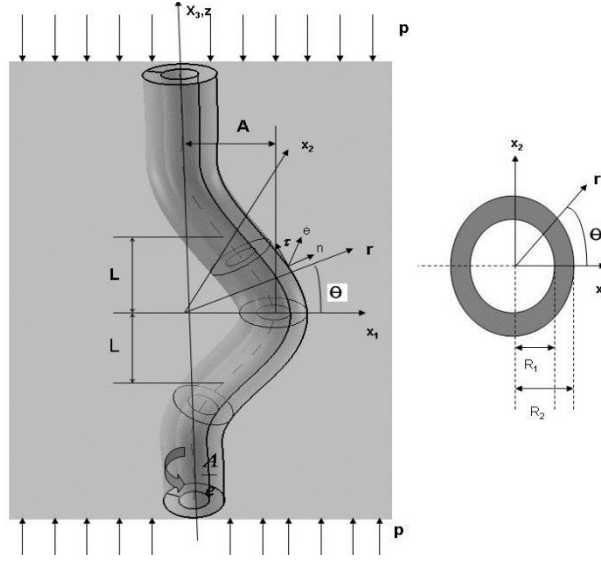
Güçlendirilmiş eleman boyunca tek eksenli basınç altındaki, tek yönlü kompozitlerin en önemli kırılma mekanizması malzeme yapısındaki stabilite kaybıdır. Bu mekanizmaya göre, güçlendirilmiş eleman boyunca tek eksenli basınç altındaki tek yönlü kompozitlerin kırılmasının teorik araştırmaları, malzeme yapısındaki stabilite kaybı ve kırılma kuvveti olarak kabul edilen dış kritik kuvvet değerinin araştırmalarına indirgenir. Son zamanlarda, bu alana çok sayıda teorik araştırma uygulanmıştır. Bu araştırmaların geniş özeti ve yorumları [1-4] referanslarında verilmiştir. Bu yayınlardan da görüldüğü gibi, güçlendirilmiş eleman boyunca basınç altındaki kompozit malzemelerin, parçalı-homojen cisim modeli anlamında olan, kırılma ve stabilite araştırmalarında esas olarak iki yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan ilki tek tek bileşenlerin deformasyonunun ve aralarındaki ilişkinin belirlenmesi ile ilgili belirli hipotezlerin uygulanması, diğeri ise Üç Boyutlu Lineerleştirilmiş Stabilite Teorisinin (ÜBLST) uygulanmasıdır. İkinci grup kırılma problemlerinde kompozit malzeme, önce normalize edilmiş mekanik özelliklerle yapısal olarak homojen ortotropik malzeme olarak modellenmiş ve [1, 2 4]'de verilen yöntem takip edilerek sözü edilen homojen ortotropik sonsuz cisim için yazılan ÜBLST denklemlerin tipindeki değişimler, sonsuzda düzgün dağılmış basınç kuvvetleri etkisi altında araştırılmıştır. Bu durumlarda, eğer ÜBLST denklemlerinin eliptiklik koşulları sağlanmaz ve bu denklemler eliptikliklerini kaybederlerse ele alınan malzemede kırılma meydana gelir. Böylece, elde edilen dış basınç kuvvetleri, ele alınan kompozit malzemede basınç altında kırılmasının teorik limiti (BAKTL) olarak kabul edilir. [1, 2, 4]'e göre, mekanik anlamda, BAKTL makro-hacimli kompozit malzemede yük taşıma kapasitesi olan dış basınç kuvvetinin teorik limitini gösterdiğinden, BAKTL değerlerinin belirlenmesi teorik ve pratik açıdan önemlidir. Ayrıca bu çalışmada lif içi boş olarak modellenmiş ve uygun elastisite sabitleri oranları (lif ve matris arsında) ele alınarak problem nanolifler için de çözülmüştür. Böylece nano ölçekte de BAKTL değerleri bulunmuş ve nanolifler için de taşıma kapasitesi belirlenmiş olmaktadır.

Levhalı kompozit malzemeler için BAKTL'in parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde ÜBLST uygulanarak belirlenmesi [7, 8]'de önerilmiş ve uygulanmıştır. [5]' de yaklaşım tek yönlü lifli kompozitler için geliştirilmiş ve kompozit malzemede liflerin düşük yoğunluklu olması durumuna uygulanmıştır. Bu çalışmada kompozit malzeme, yerel eğrilikli içi boş tek lif içeren sonsuz elastik ortam olarak modellenmiştir. Araştırmalar, sözü edilen kompozit malzemeye, lif yönünde sonsuzda p yoğunluklu düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiğinde yapılmış ve uygun sayısal sonuçlar verilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Bu çalışmada, içi boş yerel eğrilikli elastik tek lif içeren sonsuz elastik bir malzemede ÜBLST çerçevesinde stabilite kaybı incelenmiştir. Burada, eğilme genliklerinin büyüüp sonsuza gitmeye başlaması durumu stabilite kaybı kriteri olarak ele alınmış ve yükün bu değeri kritik yük olarak belirlenmiştir. Stabilite kaybı, sözü edilen kompozit malzemeye, lif yönünde sonsuzda p yoğunluklu homojen yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiğinde ele alınmıştır.

Şimdi problemin matematiksel formülasyonunu ele alalım. Ele alınan kompozit malzemenin geometrik yapısı Şekil 1'de görülmektedir. Burada da görüldüğü gibi, $Ox_1x_2x_3$ kartezyen $Or\theta z$ silindirik koordinat takımları seçelim ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduğunu varsayalım. İlk önce lifin orta çizgisinin denklemini



Şekil 1: Malzeme yapısının geometrisi ve seçilen koordinat takımları

$$x_1 = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0, \quad |x_3| \rightarrow \infty \text{ olduğunda } \delta(x_3) \rightarrow 0, \quad (1)$$

biçiminde ele alalım. Burada ε ($0 < \varepsilon \ll 1$ $L > A$ kabulü dahilinde $\varepsilon = A/L$ olarak seçilmiştir) lifin yerel eğilme genliğini belirten küçük bir parametre, $\delta(x_3)$ fonksiyonu ise lifin yüklemmeden önceki (şekil değiştirmeden önceki, başlangıçtaki) eğilmesinin formunu göstermektedir. (1) denkleminde görüldüğü gibi lifin orta çizgisi başlangıçta $x_2 = 0$ düzlemi üzerindedir. Yüklemmeden sonra da lifin orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayacağız. Ayrıca lifin orta çizgisine dik olan kesitlerinin R_1 ve R_2 yarıçaplı daireler olduğunu ve R_1 ile R_2 'nin lif boyunca değişmediğini kabul edeceğiz.

İleride matris malzemesine ait olan büyüklükler üst (1), life ait büyüklükler ise üst (2) indisleri ile ayırt edilecektir. Bundan başka, aynı anda gerilme-şekil değiştirme tansörlerinin ve yer değiştirme vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri ile birlikte bu tansörler ve vektörün fiziksel bileşenlerinden de faydalanacağız. Böyle bir yazılım üslubunun seçimi, ifade ve denklemlerin yazılımını kısaltmak için yapılacaktır. Bundan başka, tansör notasyonu kullanılacak, tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyluşımı sağlanacaktır. Lifin kapsadığı alanda ve sonsuz elastik ortamda lineer olmayan elastisite teorisinin alan denklemlerinin sağlandığı varsayalım.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}$$

$$\sigma_{(ij)} = \lambda e \delta_i^j + 2\mu_{(ij)}, \quad e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{x_3 x_3}$$

Yukarıda tanımlanan S yüzeyi üzerinde ideal temas koşullarının var olduğunu kabul ederek, bu koşulları

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_S n_j = \sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_S n_j = 0, \quad u^{(1)j} \Big|_S = u^{(2)j} \Big|_S \quad (3)$$

biçiminde yazarız. Bundan başka, lifin iç yüzeyinde (bu yüzeyi S_0 ile, bu yüzeyin dış normal vektörünün bileşenlerini ise n_j^0 ile işaret edelim)

$$\sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_{S_0} n_j^0 = 0, \quad (4)$$

sınır koşullarının sağlandığını varsayalım.

Yukarıda söylenenlerle, ele alınan problemin matematik formülasyonu genel bir biçimde verilmiş olmaktadır. Böylece, sonsuz elastik bir ortamdaki yerel eğrilikli içi boş sonsuz uzun tek lif içeren kompozit malzemenin lif yönünde etki gösteren dış basınç kuvveti altında kırılması araştırması (2) denklemler takımının (3)-(4) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilmektedir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Formülasyonu yukarıda verilen problem, nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için verilmiş bir sınır-değer problemidir. Bu problemin incelenmesinde [1, 7, 8]' de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemini uygulayalım. Lifin, onu içeren ortamla temas yüzeyi S diye gösterilirse, bu yüzeyin denklemleri lif-kesit formu koşulu ve (1) denklemlerinden yararlanarak

$$r = (1 + \varepsilon^2 (\delta' (t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left\{ \varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3) (\delta' (t_3))^2 \right\} \sin \theta + \left[R^2 - \varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta' (t_3))^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta' (t_3))^2) \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

$$z = t_3 - \varepsilon \delta' (t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta' (t_3), \quad \delta' (t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (5)$$

şeklinde elde edilir. Burada $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametredir. S_0 yüzeyi için de benzer işlemler yapılarak ilgili denklemler elde edilir.

S yüzeyinin birim dış normallerinin bileşenleri n_r, n_θ, n_z , (5) ifadelerinden elde edilir. İlgili yönteme göre aranan büyüklükler lifin orta çizgisinin denklemlerine dahil olan ve onun eğilme derecesini gösteren küçük ε parametresinin serisi halinde ele alınır. Lif ve matris ile ilgili büyüklükleri küçük ε parametresinin pozitif kuvvetleri cinsinden aşağıdaki gibi seri halinde yazılabilir.

$$\left\{ \sigma_{(ij)}^{(m)}; \varepsilon_{(ij)}^{(m)}; u_{(i)}^{(m)} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ \sigma_{(ij)}^{(m),k}; \varepsilon_{(ij)}^{(m),k}; u_{(i)}^{(m),k} \right\}, \quad (6)$$

$$(ij) = rr; \theta\theta; x_3 x_3; r\theta; r x_3; \theta x_3, \quad (i) = r; \theta; x_3$$

Ayrıca lif-matris arayüzeyi olan S'nin denklemleri ve bu yüzeyin birim normalinin bileşenlerini gösteren ifadeler de ε cinsinden seri halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r=R+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_{rk}(\theta,t_3), \quad z=t_3+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_{zk}(\theta,t_3),$$

$$n_r=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_{rk}(\theta,t_3), \quad n_\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_{\theta k}(\theta,t_3), \quad n_z=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_{zk}(\theta,t_3) \quad (7)$$

(7)'de verilen ifadelerde yer alan $a_{rk}(\theta,t_3), \dots, b_{\theta k}(\theta,t_3)$ fonksiyonlarının açık ifadeleri [1,2]'de verilmiştir.

Buna göre (6) ifadelerinin (3)'de yerine yazılır ve ε 'nin eşit derecelerine göre gruplandırılırsa her bir yaklaşım için kapalı denklem takımları elde edilir. Bu durumda sıfıncı yaklaşım için (3) denklemleri sağlanır ve sonraki yaklaşımlar için elde edilecek denklemler bundan önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri de içerirler.

Sıfıncı yaklaşım, modeldeki lifin eğriliksiz olması durumunda ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi için incelenmesi gereken sınır değer problemidir. İlgili mekaniksel görüşler bu durumda sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklemlerdeki nonlineer terimlerin çok önemsiz etkiler vereceğini ifade etmektedir. Bu varsayımın geçerli olması için $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ koşulunun sağlandığını kabul ederek $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimlerini Kronecker sembolleri olan δ_n^j 'lerle yer değiştirilecektir. Sadelik açısından $v^{(1)}$ matris malzemesinin, $v^{(2)}$ lif malzemesinin Poisson oranları olmak üzere $v^{(1)} = v^{(2)}$ olduğu varsayılacaktır. Poisson oranlarının eşit alınması nümerik sonuçlara önemli bir etkide bulunmamaktadır [7]. Dolayısıyla, $v^{(1)} = v^{(2)}$ koşulu sadece işlemleri basitleştirmek için varsayılmıştır. Söylenenler dikkate alınırsa birinci yaklaşım için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \right) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(k),1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r} \right) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \right) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(k),1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(k),1} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \right) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = \lambda^{(k)} e^{(k),1} \delta_i^n + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}, \quad (9)$$

$$e^{(k),1} = \varepsilon_{(11)}^{(k),1} + \varepsilon_{(22)}^{(k),1} + \varepsilon_{(33)}^{(k),1}, \quad \varepsilon_{rr}^{(k),1} = \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),1}}{r \partial \theta} \right)$$

$$\varepsilon_{zr}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) \quad (10)$$

ÜBLST denklemleri ile (8)-(10) denklemlerinin sağlama yoluyla çakıştığı gösterilebilir [1,2]. Diğer yaklaşımlar için elde edilen denklemlerin homojen kısmı da ÜBLST denklemleri ile çakışır [6].

Şimdi her bir yaklaşım için (3) ve (4) ifadelerinden elde edilecek temas koşullarını ele alalım. Bu amaçla (6) ifadelerini (3) ve (4)'de kullanır ve (R, θ, z) civarında Taylor serisine açar, ε parametresinin eşit kuvvetlerini gruplandırır ve sözü edilen kabulleri dikkate alırsak, her bir yaklaşım için temas koşulları elde edilmiş olur. Buraya sıfıncı ve birinci yaklaşım için elde edilenleri yazmakla yetinilecektir:

Sıfıncı yaklaşım için $r = R_1$ ve $r = R_2$ 'de sağlanan temas koşulları:

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_1} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_1}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_1} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_1}$$

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_2} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_2}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_2} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_2}; \quad (ij)=rr, r\theta, rz, (i)=r, \theta, z \quad (11)$$

Birinci yaklaşım için $r = R_1$ ve $r = R_2$ 'de sağlanan temas koşulları:

$$\left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0$$

$$\left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \quad (12)$$

şeklinde elde edilir. (11) ve (12)'de aşağıdaki eşitlikler kullanılmıştır.

$$\left[X \right]_{1,k}^{2,k} = X^{(1),k}(R, \theta, z) - X^{(2),k}(R, \theta, z), \quad k=0,1, \quad f_1 = \delta(t_3) \sin \theta,$$

$$\varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \sin \theta, \quad \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \sin \theta,$$

$$\gamma_\theta = -\frac{\delta(t_3)}{R} \cos \theta, \quad \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \sin \theta. \quad (13)$$

(12)'de radyal kuvvet ($\sigma_{rr}n_r + \sigma_{r\theta}n_\theta + \sigma_{rz}n_z$) ve radyal yerdeğiştirme (u_r) için temas koşulları yazılmıştır. Diğer temas koşulları r, θ ve z indislerine göre dairesel permütasyon uygulanarak elde edilir.

Şimdi sıfırncı ve birinci yaklaşımlara ait büyüklüklerin belirlenmesini ele alalım.

Sıfırncı Yaklaşım. Bu yaklaşımın [1,2] de verildiği gibi tam analitik çözümü vardır. Bu durumda $v^{(1)} = v^{(2)}$ olduğunda, sözü edilen [1,2] çözümünden aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$\varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -v^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r,$$

$$u_r^{(2),0} = -v^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1),0} = \sigma_{\theta z}^{(2),0} = \sigma_{rz}^{(1),0} = \sigma_{rz}^{(2),0} = \sigma_{r\theta}^{(1),0} = \sigma_{r\theta}^{(2),0} = 0 \quad (14)$$

Birinci Yaklaşım: (14)'de verilen sıfırncı çözüm kullanıldığında (8) denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} = 0, \quad (15)$$

haline gelir. (9) ve (10) ifadeleri ise birinci yaklaşımda aynen kalırlar. (9), (10), (15) denklemler sisteminin çözümü için aşağıdaki gösterilimler kullanılacaktır [1, 2].

$$u_r^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \Psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)},$$

$$u_z^{(k)} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \quad (16)$$

ψ ve χ fonksiyonları aşağıdaki denklemlerden belirlenir:

$$\left(\Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi = 0, \quad (17)$$

Burada

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu + \sigma_{zz}^0}{\mu}}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{\mu + \sigma_{zz}^0}{\mu}}, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \sigma_{zz}^0}{\lambda + 2\mu}}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (18)$$

dir. (12)-(14) ilişkileri temas koşullarının hesabına katılırsa, birinci yaklaşım için temas koşulları aşağıdaki gibi olurlar:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{rr}^{(1),1} - \sigma_{rr}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(\sigma_{r\theta}^{(1),1} - \sigma_{r\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\ \left(\sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos\theta \\ \left(u_r^{(1),1} - u_r^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(u_\theta^{(1),1} - u_\theta^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\ \left(u_z^{(1),1} - u_z^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \sigma_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = 0 \\ \sigma_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} &= 0, \quad \sigma_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = \sigma_{zz}^{(2),0} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos\theta \end{aligned} \quad (19)$$

(1) denklemi ile verilen lifin orta çizgisinin denklemini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_1 = \varepsilon \delta(x_3) = A \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon L \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (20)$$

Birinci yaklaşım ile ilgili sınır değer problemini çözmek için bu yaklaşımla ilgili tüm denklemlere ve ilişkilere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (21)$$

ile verilen Fourier dönüşümü uygulanır. Verilen dönüşüm (15)-(19) denklemlerine uygulanırsa $\bar{\Psi}$ ve $\bar{\chi}$ fonksiyonları için aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(1),1} &= \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{(1),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1 \left(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{-(2),1} &= \left[\bar{A}_{11}^{(2)}(s) I_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{12}^{(2)}(s) K_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{-(2),1} &= i \left[\bar{A}_{21}^{(2)}(s) I_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{22}^{(2)}(s) K_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{31}^{(2)}(s) I_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{32}^{(2)}(s) K_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (23)\end{aligned}$$

Burada $I_n(x)$ Bessel fonksiyonu ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonudur. (22), (23) ifadeleri (9), (10), (16) ifadelerinin Fourier dönüşümlerinde kullanılır, sonra elde edilen ifadeler (19) ile verilen temas koşullarının Fourier dönüşümünde kullanılırsa lineer denklemler sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminden faydalanılarak $\bar{A}_1^{(11)}(s)$, $\bar{A}_2^{(11)}(s)$, $\bar{A}_3^{(11)}(s)$, $\bar{A}_{11}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{12}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{13}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, bilinmeyenleri belirlenmiş olur. Bunlar kullanılarak yerdeğiştirme ve gerilme ifadelerinin Fourier dönüşümlü değerlerine ulaşılır. Gerçek değerlerin elde edilmesi için son işlem olarak, örneğin

$$\sigma_{rr}^{(1),1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} e^{isz} ds \quad (24)$$

ile verilebilecek, Ters Fourier Dönüşümü uygulanır.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Matris ve lif malzemelerinin elastik olduğu düşünülerek kritik yük değerleri hesaplanmıştır.

Elde edilen sayısal sonuçlar, kritik yük değerleri $(\frac{P_{cr.}}{E^{(1)}})$ 'nin (20) ifadesindeki m parametrelerinden bağımsız olduğunu göstermiştir. Ayrıca $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=300$ ve $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=500$ değerleri

için m parametresinin değişmesinin yanında $\frac{R_2}{L}$ değerinin değişmesinin kritik yüke etkisi olmamıştır. Literatürde polimer-matris nanokompozitlerin mekanik özelliklerine elastisite sabitleri açısından bakıldığında lifin elastisite sabitinin matris malzemesinin elastisite sabitine oranının $300 \leq \frac{E^{(f)}}{E^{(m)}} \leq 1000$ aralığında olduğu görülmektedir [10]. Bu çalışmada bu oranlar

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=300$ ve $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=500$ alınarak inceleme yapılmış ve sonucunda nanolifte kritik yük

değerinin kompozit malzeme için elde edilenden daha küçük olduğu görülmüştür. Tablo 1'de çeşitli $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ için $\left| \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri verilmiştir. Buradan görüldüğü gibi $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ değerleri arttıkça

$\left| \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri monoton olarak azalmaktadır. Tablo 2 ve Tablo 3'de çeşitli $\frac{R_2}{L}$ için $\left| \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$

değerleri verilmiştir. $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ değeri sabit kalmak üzere $\frac{R_2}{L}$ değeri arttıkça kritik yükte dikkate

alınacak bir değişiklik olmamıştır. Tablo 4 ve Tablo 5'de çeşitli $\frac{h}{R_2}$ için $\left| \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri

verilmiştir. $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ değeri sabit kalmak üzere $\frac{h}{R_2}$ değeri arttıkça kritik yük değerinin düştüğü görülmüştür.

Tablo 1: Çeşitli $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ için $\left| \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri ($m=0$, $R_2/L=0.1$, $h/R_2=0.2$)

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	10	40	50	100	300	500
$\left \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right $	0.38220	0.24970	0.22400	0.16080	0.09442	0.07293

Tablo 2: $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=300$ için $\left| \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri ($h/R_2=0.2$)

R_2/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\left \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right $	0.09442	0.09441	0.09438	0.09440	0.09438	0.09438	0.09438	0.09438	0.09438	0.09440

Tablo 3: $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=500$ için $\left| \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri ($h/R_2=0.2$)

R_2/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\left \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right $	0.07293	0.07294	0.07293	0.07293	0.07293	0.07293	0.07293	0.07293	0.07293	0.07293

Tablo 4: $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=300$ için $\left| \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri ($R_2/L=0.1$)

h/R_2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\left \frac{p_{cr.}}{E^{(1)}} \right $	0.09442	0.07686	0.06633	0.05934	0.05449	0.05113	0.04891

Tablo 5: $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=500$ için $\left| \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right|$ değerleri ($R_2/L=0.1$)

h/R_2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\left \frac{P_{cr.}}{E^{(1)}} \right $	0.07293	0.05889	0.05057	0.04505	0.04126	0.03863	0.03691

REFERANSLAR

- [1]. Akbarov, S.D., (2012), Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites, Springer, 465 pp.
- [2]. Guz, A.N., Mechanics of compressive failure of composite materials. [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1990).
- [3]. Guz, A.,N. and Lapusta, Yu.N., Three-dimensional problems of the near-surface instability of fiber composites in compression (model of a piecewise-uniform medium) (survey). Inter. Appl. Mech., 35, No7, 641-671(1999).
- [4]. Guz, A.N., Dekret, V.A. and Kokhanenko Yu.V., Plane problems of stability of composite materials with a finite size filler. Mechan. Comp. Materials, 36, No1, 77-86 (2000).
- [5]. Akbarov, S.D., Köşker, R., Şimşek, K., (2005), On The Theoretical Strength Limit In Compression Of Viscoelastic Unidirectional Fibrous Composite Materials, Mekanik Kongresi 2005
- [6]. Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985c), "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites with Curved Structures", Soviet Appl. Mech., 20(9), 777-790.
- [7]. Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers, 464pp.
- [8]. Akbarov S.D., Cilli A., Guz A.N., The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials. Composites: Part B, 30, p 465-472, 1999.
- [9]. Babich I.Yu., Guz A.N., Chekhov V.N., The three-dimensional theory of stability of fibrous and laminated materials, 37, N0:3, 1103-1141, 2001.
- [10]. A. N. Guz' and V. A. Dekret, "On two models in the three-dimensional theory of stability of composites," Int. Appl. Mech., 44, No. 8, 839–854 (2008)