



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## PASTERNAK ZEMİNİNE YASLANAN ve KISMEN AKIŞKAN ile TEMAS EDEN MINDLIN PLAĞININ DİNAMİK DAVRANIŞI

Akif Kutlu<sup>1</sup>, Bahadır Uğurlu<sup>2</sup>, Mehmet H. Omurtag<sup>1</sup>, Ahmet Ergin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>İTÜ İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul.

<sup>2</sup>İTÜ Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Maslak, İstanbul

### ABSTRACT

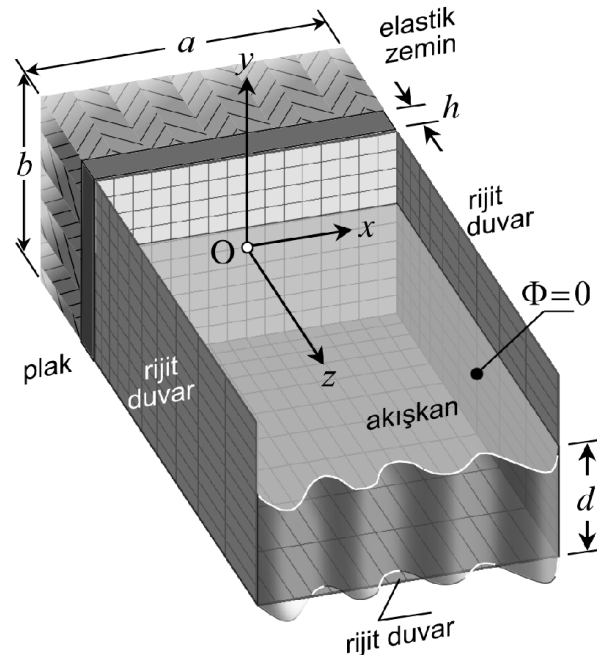
This study is concerned with the dynamic response of Mindlin plates resting on an Pasternak foundation and simultaneously interacting partially with a quiescent fluid field. Plate-foundation interaction is simulated in the framework of a mixed finite element by employing the Gâteaux differential. Consistent mass matrix formulation is used by considering the rotary inertia. Fluid-structure interaction analysis is carried out by the boundary element method. It is assumed that the plate – elastic foundation system vibrates in its in vacuo eigenmodes when it is in contact with fluid, and that each mode gives rise to a corresponding surface pressure distribution on the wetted surface of the structure. The fluid free-surface effects are neglected by imposing the high-frequency limit condition. The fluid-structure interaction forces are calculated in terms of the generalized hydrodynamic added mass coefficients that represent the inertial effect of the fluid. The methodology is verified, and the influence of foundation and fluid interaction on the dynamic behavior of the Mindlin plate is studied through parametric investigations.

### ÖZET

Bu çalışmada Pasternak zeminine oturan ve aynı zamanda durağan bir akışkan alanıyla kısmen temas eden Mindlin plaklarının dinamik davranışı incelenmiştir. Gâteaux türevinden yararlanılarak plak-zemin etkileşimi karışık sonlu eleman yöntemi ile ele alınmış, yayılı kütle matrisinde plak dönel eylemsizlikleri de gözetilmiştir. Akışkan-yapı etkileşimi içinse sınır eleman yönteminden yararlanılmıştır. Uygulanan kabuller, plak-zemin sisteminin akışkanla temas sırasında kendi doğal modlarında titreştiği ve her bir elastik moda karşılık plak ıslak yüzeyi üzerinde bir basınç dağılımının oluştuğu şeklindedir. Akışkan serbest yüzey etkileri sonsuz-frekans kabulü altında ihmal edilmiştir. Ortaya çıkan etkileşim kuvvetleri akışkan eylemsizlik etkisini temsil eden genelleştirilmiş ek su kütlesi formundadır. Sunulan çözüm yaklaşımı örneklerle test edilmiş, zemin varlığının ve akışkan etkileşiminin Mindlin plağının dinamik davranışına olan etkileri parametrik olarak ayrıca incelenmiştir.

## GİRİŞ

Mühendislik yapılarında sıklıkla düzlem taşıyıcı sistemler olarak kullanılan plak elemanların dinamik davranışları, zemin veya akışkan gibi ortamların varlığı halinde önemli değişimler gösterir [1]. Bu sebeple zemin ve/veya akışkan ile etkileşen plak sistemlerin dinamik davranışının anlaşılması mühendislik tasarımı açısından önem taşımaktadır. Pasternak elastik zemini- Kirchoff plağı dinamik etkileşiminde öncü sonlu eleman çözümü Omurtag ve diğ. [2] tarafından yapılmıştır. Zhou ve diğ. [3] küçük şekil değiştirme ve doğrusal üç boyutlu elastisite teorisine göre Pasternak zemini ile etkileşen plakların serbest titreşimini incelemiştir. Eratli ve Akoz [4] Reissner plağı-zemin etkileşimde döneleylemsizliği göz ardı ederek serbest titreşim problemini incelemiştir. Akışkan ve plak etkileşim problemi de birçok çalışmanın konusu olmuştur. Ergin ve Uğurlu [5] akışkana kısmen daldırılmış dikdörtgen plağın serbest titreşim davranışını sınır eleman yöntemi ile ele almıştır. Jeong ve diğ. [6] sınırlandırılmış bir hacim içindeki akışkanla etkileşen çift dairesel plaktan oluşmuş sistemin frekans ve mod şekillerini elde etmek için Fourier seri açılımını kullanmıştır. Plak-zemin ve plak-akışkan problemleri ayrı ayrı birçok kez incelenmiş olmasına rağmen plak-zemin-akışkan etkileşimi az sayıda çalışmaya konu olmuştur. Uğurlu ve diğ. [7] bir tarafında izotrop Pasternak zeminiyle dayalı diğer tarafı akışkan ile temas eden Kirchoff plağının dinamik davranışını karışık sonlu eleman ve sınır eleman yöntemlerini bir arada kullanarak incelemiştir. Hashemi ve diğ. [8] Ritz yöntemini kullanarak, dikey duran ve bir yüzünden Pasternak zemini diğer yüzünden akışkanla temas eden Mindlin plağının (Şekil 1) serbest titreşim davranışını analiz etmişlerdir. Bu çalışmada Mindlin plağının dinamik karakteristikleri – doğal frekanslar ve karşılık gelen mod şekilleri, kısmi akışkan ortamı ve Pasternak zeminiyle etkileşim [9] durumları için incelenmiştir. İzotrop Pasternak zemin modeli ilave bir zemin parametresiyle modifiye edilecek ortotrop davranışı sergileyecek şekilde ele alınmıştır. Gâteaux diferansiyeli kullanılarak karışık yapıda plak-zemin etkileşim formülasyonu elde edilmiştir. Akışkan etkileşimini belirlemek üzere sınır eleman yöntemi kullanılmıştır.

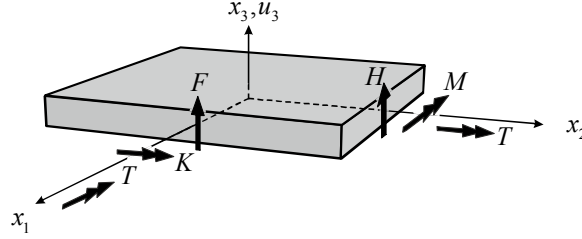


Şekil 1. Zeminle ve kısmen akışkan alanıyla etkileşim içindeki dikdörtgen plak.

## FORMÜLASYON

## Plak-zemin etkileşimi karışık sonlu eleman formülasyonu

Plak yer değiştirme alanı bir yanal yer değiştirme ( $u_3$ ) ve iki eksen etrafındaki kesit dönmeleri ( $\Omega_1, \Omega_2$ ) ile tanımlanmaktadır. Plak global koordinat takımı ( $x_1, x_2$ ) ile plak kesitindeki gerilme bileşikleri olarak iki eğilme momenti ( $K, M$ ), bir burulma ( $T$ ) momenti ve iki kesme kuvveti ( $F, H$ ) için pozitif yönler Şekil 2’de görülmektedir.



Şekil 2. Mindlin plağı gerilme bileşikleri pozitif yönleri.

Pasternak zemini için,  $k$  Winkler yay sabiti ve  $G_f$  zemin kayma sabiti olmak üzere zemin ve plak arasında oluşacak kuvvet yoğunluğu  $p = ku_3 - G_f(u_{3,11} + u_{3,22})$  olur. Bu durumda yapı-zemin sisteminin denge denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} F_{,1} + H_{,2} + \rho h \omega^2 u_3 - ku_3 + G_f(u_{3,11} + u_{3,22}) &= 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F + \frac{1}{12} \rho h^3 \omega^2 \Omega_1 &= 0 \quad ; \quad M_{,2} + T_{,1} - H + \frac{1}{12} \rho h^3 \omega^2 \Omega_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

şeklinindedir. Burada,  $\omega$  plak doğal frekansını ve  $\rho$  plak kütle yoğunluğunu temsil etmektedir. İzotrop Mindlin plağı-zemin etkileşimi için fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir [10].

$$\begin{aligned} I(y) = & -\frac{1}{2}(\rho h) \omega^2 [u_3, u_3] - \frac{1}{24}(\rho h^3) \omega^2 [\Omega_1, \Omega_1] - \frac{1}{24}(\rho h^3) \omega^2 [\Omega_2, \Omega_2] + [F, u_{3,1}] + [H, u_{3,2}] \\ & + [F, \Omega_1] + [H, \Omega_2] - \frac{3}{5Gh} [F, F] - \frac{3}{5Gh} [H, H] - [M_{,2}, \Omega_2] - [T_{,1}, \Omega_2] - [K_{,1}, \Omega_1] - [T_{,2}, \Omega_1] \\ & - \frac{6}{Eh^3} [K, K] + \frac{12\nu}{Eh^3} [M, K] - \frac{6}{Eh^3} [M, M] - \frac{6}{Gh^3} [T, T] + \frac{1}{2}k[u_3, u_3] + \frac{1}{2}G_f[u_{3,1}, u_{3,1}] + \frac{1}{2}G_f[u_{3,2}, u_{3,2}] \\ & + \left\{ -\langle u_3, (\hat{F} + \hat{H}) \rangle + \langle \Omega_1, (K - \hat{K}) \rangle + \langle \Omega_1, (T - \hat{T}) \rangle + \langle \Omega_2, (M - \hat{M}) \rangle + \langle \Omega_2, (T - \hat{T}) \rangle \right\}_{\sigma_p} \\ & - \left\{ \left[ (\hat{K}_{,1} + \hat{T}_{,2}) + (\hat{M}_{,2} + \hat{T}_{,1}), u_3 \right] + \left[ (K - \hat{K}) + (T - \hat{T}), u_{3,1} \right] + \left[ (M - \hat{M}) + (T - \hat{T}), u_{3,2} \right] \right\}_{\sigma_p} \\ & + \left\{ \left[ (K_{,1} + T_{,2}) + (M_{,2} + T_{,1}), (u_3 - \hat{u}_3) \right] - \left[ (K + T), \hat{u}_{3,1} \right] - \left[ (M + T), \hat{u}_{3,2} \right] \right\}_{\varepsilon_p} \\ & - \left\{ \left[ G_f u_{3,1}, (u_3 - \hat{u}_3) \right] + \left[ G_f u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right]_{\varepsilon_f} + \left\{ \left[ G_f \hat{u}_{3,1}, u_3 \right] + \left[ G_f \hat{u}_{3,2}, u_3 \right] \right\}_{\sigma_f} \right\} \end{aligned}$$

### Sonlu eleman ayrıklaştırması

Elde edilen fonksiyonelin birinci varyasyonu alınarak sekiz bilinmeyen içeren sonlu eleman denklemleri elde edilir. Karışık yapıdaki bu denklemlerden özdeğer problemine geçebilmek için sistem sonlu eleman matrisine bir indirgeme işlemi uygulanır ve gerilme bileşkesi tipindeki bilinmeyenler denklemden uzaklaştırılır. Dönel eylemsizlik etkileri yayılı kütle matrisinde hesaba katılmıştır. Plak bölgesi 4 düğüm noktalı dörtgen elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmış, integraller izoparametrik elemanlar üzerinde  $2 \times 2$  Gauss şeması kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Karışık sonlu eleman metodu uygulanarak, plak-zemin sisteminin serbest titreşimleri aşağıdaki özdeğer problemi ile tanımlanabilir:

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix},$$

İfadedeki kuvvet tipi büyüklüklerle ilgili terimlerin elenmesiyle, özdeğer problemi kondense edilmiş sistem matrisi üzerinden  $[-\omega^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}^*] \mathbf{w} = \mathbf{0}$  ifadesiyle yürütülür.

### Akışkan formülasyonu

Viskoz olmayan, sıkıştırılmaz ve irrotasyonel bir akışkan alanı için hız vektörü,  $\Phi$  hız potansiyel fonksiyonunun gradyeni ile  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$  olarak verilebilir. Burada,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  konum vektörü ve  $t$  zamanı simgelemektedir. Hız potansiyeli akışkan alanında  $\nabla^2 \Phi = 0$  Laplace denklemini sağlar. Bir yapının genel hareketi doğal modlarındaki yerdeğiştirmelerin toplamı şeklinde tanımlanabilir:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^{n_m} \mathbf{u}_r(\mathbf{x}) p_r(t) \quad (1)$$

Burada,  $\mathbf{q}$  yapının hareketini,  $\mathbf{u}_r$  serbest titreşim probleminin çözümünden elde edilen doğal mod şekillerini,  $p_r$  her bir doğal modun toplam harekete olan katkısını belirleyen asal koordinat bileşenlerini ve  $n_m$  analizde dikkate alınan toplam mod sayısını göstermektedir.  $\omega$  frekansı ile titreşen bir yapı için  $r$ . doğal moda karşılık gelen asal koordinat bileşeni

$$p_r(t) = \tilde{p}_r e^{i\omega t} \quad (2)$$

olarak verilebilir. Burada  $\tilde{p}_r$ ,  $r$ . asal koordinatın büyüklüğüdür. Bir yapıyla etkileşim içindeki akışkan alanı için hız potansiyel fonksiyonu da (2) ifadesine benzer bir seri formu ile tanımlanabilir:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = i\omega \sum_{r=1}^{n_m} \phi_r(\mathbf{x}) p_r(t) \quad (3)$$

Burada  $\phi_r$ ,  $r$ . doğal modun akışkan ortamında neden olduğu hareketlenmeleri tanımlayan hız potansiyelinin uzamsal dağılımını ifade eder. Plak-akışkan sisteminin hareketi sırasında plak-akışkan arayüzeyi (plak ıslak yüzeyi) üzerinde uygulanan kinematik sınır şartı, akışkan ve plağın ıslak yüzeye normal olan hızlarının eşit olduğunu ifade eder.  $r$ . titreşim modu için bu eşitlik (1) ve (3) ifadelerinden

$$\partial\phi_r/\partial n = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} \quad (4)$$

şeklinde. Burada,  $\mathbf{n}$  yüzey normali,  $\mathbf{u}_r$  ise plak yüzeyinin  $r$ . mod için yer değiştirmesidir. Plak yerdeğiştirmeleri (doğal mod şekilleri) önceki kısımda anlatılan karışık sonlu eleman çözümüne dayalı özdeğer probleminin çözümüyle belirlenmektedir. (4) sınır şartına ek olarak, akışkan problemi için yüksek frekans kabulü ile serbest yüzey dalgası etkileri ihmal edilmiş, serbest yüzey üzerinde hız potansiyeli için aşağıdaki şart uygulanır.

$$\phi_r = 0 \quad (5)$$

### Akışkan potansiyel fonksiyonunun sayısal olarak elde edilmesi

$\phi$  akışkan hız potansiyeli için Laplace denklemi ve (4), (5) sınır şartları ile tanımlanan sınır değer problemi,

$$c(\mathbf{X})\phi(\mathbf{X}) = \iint_{S_{ir}} (\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X})q(\mathbf{x}) - q^*(\mathbf{x}, \mathbf{X})\phi(\mathbf{x})) dS \quad (6)$$

sınır integral denklemi ile ifade edilebilir. Burada  $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  üç boyutlu homojen uzay için Laplace denkleminin temel çözümüne,  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$  ve  $\mathbf{x}$  sırasıyla, plak ıslak yüzeyi  $S_w$  üzerinde alınan kaynak ve alan noktalarına,  $q = \partial\phi/\partial n$  normal akışa ve serbest terim  $c(\mathbf{X})\phi(\mathbf{X})$ 'in potansiyel alan içinde kalan kısmının oranına karşılık gelmektedir. Üç boyutlu genel bir geometri için (6) denkleminin çözümü, ıslak yüzeyin elemanlara bölünerek ayrıklaştırılmasını gerektirir.  $i$ . sınır eleman üzerinde potansiyel ve akış dağılımları,  $\phi^i$  ve  $q^i$ , eleman düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden,

$$\phi^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_{ij}\phi_{ij}, \quad q^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_{ij}q_{ij},$$

ile verilebilir. Burada,  $n_i$  sınır elemandaki toplam düğüm noktası sayısını,  $\phi_{ij}$  ve  $q_{ij}$  elemanın  $j$ . düğüm noktası için sırasıyla potansiyel ve akış değerlerini,  $N_{ij}$  ise ilgili şekil fonksiyonlarını tarif etmektedir. Bu çalışmada lineer şekil fonksiyonları ve dört düğüm noktalı dörtgen sınır elemanlar kullanılmıştır. Ayrıklaştırma sonucu (6) denklemi aşağıdaki formda verilebilir:

$$c_k\phi_k^{(m)} + \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (\phi_{ij}^{(m)}) \iint_{S_i} N_{ij}q^* dS = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{u}_{ij}^{(m)} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \iint_{S_i} N_{ij}\phi^* dS, \quad k = 1, \dots, n_n, \quad m = 1, \dots, n_m$$

Burada,  $n_n$  ve  $n_p$  sırasıyla ayrıklaştırmada kullanılan düğüm noktası ve sınır eleman sayılarını,  $n_m$  analizde dikkate alınan doğal mod sayısını,  $S_i$ ,  $i$ . sınır elemanın alanını,  $\mathbf{n}_{ij}$   $i$ . sınır elemanın  $j$ . düğüm noktasındaki yüzey normalini,  $\phi_k$   $k$ . düğüm noktasının potansiyel değerini,  $\mathbf{u}_{ij}$   $i$ . sınır elemanın  $j$ . düğüm noktasının yerdeğiştirmesini,  $m$  ise ilgili mod numarasını temsil etmektedir. Bernoulli denkleminde ikinci merteye terimlerin ihmal edilmesiyle, yapı üzerindeki dinamik akışkan basıncı,

$$P(\mathbf{x}, t) = -\rho_f \partial \Phi / \partial t, \quad (7)$$

ile verilebilir. Burada,  $\rho_f$  akışkan yoğunluğudur. (2) ve (3) ifadeleri (7)'ye yerleştirildiğinde  $r$ . titreşim modundan kaynaklanan basınç  $P_r(\mathbf{x}, t) = \rho_f \omega^2 \phi_r(\mathbf{x}) \tilde{p}_r e^{i\omega t}$  şeklinde hesaplanır. Yapının  $r$ . titreşim modu ile ilişkili genelleştirilmiş yapı-akışkan etkileşim kuvvetinin  $k$ . bileşeni, ıslak yüzeye etkileyen basıncın toplamı cinsinden aşağıdaki gibi yazılır,

$$Z_{kr} = \iint_{S_W} P_r(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} dS = \omega^2 \tilde{p}_r e^{i\omega t} \rho_f \iint_{S_W} \phi_r \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} dS$$

Genelleştirilmiş ek su kütlesi  $A_{kr}$ ,  $A_{kr} = \rho_f \iint_{S_W} \phi_r \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} dS$ , şeklinde tanımlanarak, genelleştirilmiş yapı-akışkan etkileşim kuvvet bileşeni

$$Z_{kr}, Z_{kr}(t) = A_{kr} \omega^2 \tilde{p}_r e^{i\omega t} = -A_{kr} \ddot{p}_r(t)$$

ile ifade edilir. Plak-akışkan sisteminin hareketi, sönüm kuvvetleri ihmal edilerek,

$$\left[ -\omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}) + \mathbf{K} \right] \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

şeklinde verilebilir. Burada,  $\mathbf{A}$  sonsuz frekans kabulü altında genelleştirilmiş ek su kütlesi matrisi,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  ise plak genelleştirilmiş kütle ve rijitlik matrisleridir ve yayılı kütle matrisi ve kondense sistem matrisi ile ilişkilidir:  $\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \mathbf{k}^* \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{m} \mathbf{U}$ . Burada  $\mathbf{U}$  sütunları doğal titreşim modlarından oluşan modal matristir. (8) özdeğer probleminin çözümü, akışkan alanıyla etkileşim içindeki plağın ıslak frekansları ile karşılık gelen asal koordinat vektörlerini verir. Her ıslak frekans değeri  $\omega_r$ 'ye karşılık bir ıslak özvektör  $\tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{p}_{r1}, \dots, \tilde{p}_{rn_m}\}$  mevcuttur ve akışkanla temas eden plağın ıslak mod şekilleri

$$\bar{\mathbf{u}}_r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_m} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) \tilde{p}_{rj}$$

ile belirlenir.  $\mathbf{u}_j$  Pasternak zeminine yaslanan Mindlin plağının doğal mod şekilleridir. İfadeden görülebileceği gibi, akışkanla temas eden plağın ıslak titreşim modları, doğal modlar arasındaki hidrodinamik etkileşimi tanımlayan  $\mathbf{A}$  genelleştirilmiş ek su kütlesi sebebiyle doğal mod şekillerinden farklıdır.  $\mathbf{A}$  matrisinin diyagonal terimlerinin diğer terimlere oranla ağırlığının artması ile birlikte, plak doğal ve ıslak mod şekilleri arasındaki farklılık ortadan kalkacaktır.

## SAYISAL SONUÇLAR

Pasternak zeminine yaslı kısmen akışkan içine daldırılmış bir plağın dinamik davranışı, önerilen çözüm yöntemiyle çeşitli parametrelere bağlı olarak incelenmiştir. Serbest titreşim probleminde elde edilen frekans değerleri boyutsuz olarak  $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  ifadesi ile hesaplanmıştır. Burada,  $\omega$ ,  $a$ ,  $h$  ve  $\rho$  sırasıyla açısal frekans, plak genişliği, plak kalınlığı ve plak kütle yoğunluğudur ve  $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$  plak eğilme rijitliğidir. Boyutsuz zemin parametreleri,  $\tilde{k} = k a^4 / D$ ,  $\tilde{G}_f = G_f a^2 / D$  ile verilmiştir.

### Doğrulama örneği:

Önerilen çözüm yöntemini doğrulamak amacıyla Hashemi ve diğ. [8] tarafından çalışılan bir plak incelenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Basit mesnetli bir kare plak bir yüzeyinden Pasternak zemini ile etkileşmekte, diğer yüzeyinden ise üç rijit duvar arasında kalan ve  $z$  eksenini yönünde sonsuza giden akışkan ile temas etmektedir. Dört farklı sonlu eleman (SE) modeli ve karşılık gelen sınır eleman (BE) modeli için sonuçlar üretilmiştir. Hesaplamalarda, plak malzemesi-akışkan yoğunluk oranı  $(\rho / \rho_f) = 7.85$  olarak alınmıştır. Çözümler sırasında ilk 20 doğal mod hesaba katılmıştır. Plak kalınlık oranı  $h/b = 0.2$  için tamamen kuru, yarısı suya daldırılmış ( $d/b = 0.5$ ) ve tamamen suya daldırılmış plak durumlarına ait sonuçlar Tablo 1'de verilmiştir. Hem kuru hem de ıslak durumlar için, artan eleman sayısı ile birlikte düzgün bir yakınsama gözlemlenmiştir. Yakınsamış değerlerin Hashemi ve diğ. [8]'deki sonuçlarla mükemmel bir uyum içinde olduğu söylenebilir. Dikdörtgen plakların mod şekilleri, plağın boyu ve enine boyunca oluşan yarım dalga sayıları ile  $(m, n)$  tarif edilebilir. Tablo 1'de ilk sekiz frekans değeri, ilgili mod şekilleri isimlendirilmeden sunulmuştur. Akışkan etkisi olmayan durumlarda bazı mod şekillerinin çift olduğu bilinmektedir, örneğin (1,2) ve (2,1) çifti gibi. Bu durum akışkanla etkileşim halinde değişebilmektedir: özellikle kısmen akışkana daldırılmış plakta, hidrodinamik etkileşim sebebiyle mod çiftleri artık gözlenmez. Tablodan görülebileceği gibi, plağın akışkana daldırılma miktarı arttıkça, ek su kütlesi de artmakta ve frekans değerleri azalmaktadır. Bu sebeple, hesaplanan en küçük frekans değerleri tamamen akışkana daldırılmış durum içindir. Ayrıca, akışkan etkisiyle frekanslarda meydana gelen azalmanın küçük modlarda büyük modlara kıyasla daha az olduğu söylenebilir.

### Akışkanla dolu silindirik tank tabanında dairesel plak:

Çözüm yönteminin uygulama alanlarının genişliğini göstermek amacıyla zemine oturan bir akışkan depolama tankı problemi incelenmiştir. Silindirik tankın rijit olduğu kabul edilmiş ve zemine oturan dairesel taban plağı çevresi boyunca ankastre bağlı alınmıştır (Şekil 3). Plak kalınlık oranı  $h/r = 0.1$ , boyutsuz zemin parametreleri  $\tilde{k} = 100$ ,  $\tilde{G}_f = 10$  olarak seçilmiştir. İlk örnekten farklı olarak, plak yoğunluğunun akışkan yoğunluğuna oranı  $\rho / \rho_f = 2.4$  alınmıştır. Üç farklı su derinlik oranı  $d/r = 0, 0.3, 0.6$ , ve dört farklı sonlu eleman/sınır eleman ağ modeli için plak boyutsuz frekans değerleri Tablo 2'de sunulmuştur. Dairesel plak için sırasıyla 108, 192, 300 and 432 sayılarında dörtgen eleman kullanılmış, ıslak yüzeyler üzerinde de sonlu eleman modeline ve tankın doluluk oranına bağlı olarak sınır elemanların dağıtımı yapılmıştır. Mod şekilleri, oluşan nodal çap ve daire sayıları  $(i, j)$  ile tanımlanmıştır. Tablo 2'de görüldüğü gibi, bütün durumlarda yakınsama düzgün bir şekilde sağlanmıştır.

Tablo 1. Kısmen akışkana daldırılmış, izotrop Pasternak zeminine ( $\tilde{k} = 100, \tilde{G}_f = 10$ ) oturan basit mesnetli kare plak için frekans değerlerinde yakınsama.

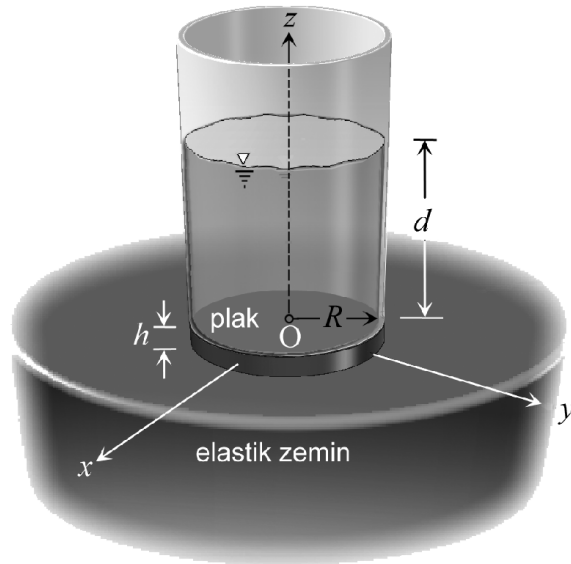
	64 SE	100 SE	144 SE	196 SE	Hashemi ve diğ. [8]	%
0	24.32	24.30	24.29	24.29	24.27	0.1
	44.95	44.92	44.90	44.88	44.82	0.1
	44.95	44.92	44.90	44.88	44.82	0.1
	62.29	62.28	62.25	62.23	62.15	0.1
	72.14	72.48	72.54	72.54	72.42	0.2
	72.14	72.48	72.54	72.54	72.42	0.2
	86.13	86.46	86.52	86.53	86.40	0.1
	86.13	86.46	86.52	86.53	86.40	0.1
	96 BE	150 BE	192 BE	266 BE	-	%
0.5	23.76	23.74	23.72	23.71	-	-
	43.52	43.50	43.50	43.48	-	-
	44.18	44.15	44.11	44.10	-	-
	60.85	60.90	60.87	60.85	-	-
	70.65	70.99	71.06	71.06	-	-
	71.15	71.51	71.57	71.58	-	-
	84.60	85.02	85.09	85.12	-	-
	84.83	85.14	85.23	85.24	-	-
	208 BE	310 BE	432 BE	574 BE		%
1	21.64	21.62	21.60	21.60	21.51	0.4
	42.38	42.39	42.37	42.35	42.26	0.2
	42.40	42.40	42.42	42.40	42.34	0.2
	59.66	59.71	59.74	59.72	59.66	0.1
	68.85	69.27	69.37	69.40	69.24	0.2
	69.45	69.88	69.98	70.03	69.97	0.1
	83.14	83.62	83.73	83.75	83.70	0.1
	83.21	83.69	83.82	83.89	83.84	0.1

Akışkanla dolu silindirik kabın tabanını teşkil eden Pasternak zeminine oturmuş dairesel ankastre bağlı plak için boyutsuz doğal frekans değerleri Şekil 4’de taşıyıcı kabın akışkanla doluluk oranına bağlı olarak verilmiştir. Çift elde edilen aksel simetrik olmayan modlar için tek bir frekans değeri sunulmuştur. Tankın doluluk oranının artması paralelinde ek su kütlesi değerleri büyüyerek plak frekans değerlerini azaltmaktadır. Bu örnekte, akışkan ile plağın teması tüm yüzey üzerinde gerçekleştiğinden, doğal modlar arası hidrodinamik etkileşim önceki örneğe kıyasla daha küçük mertebelerdedir ve genel olarak plağın doğal mod şekilleri akışkan etkisi altında da korunmaktadır.

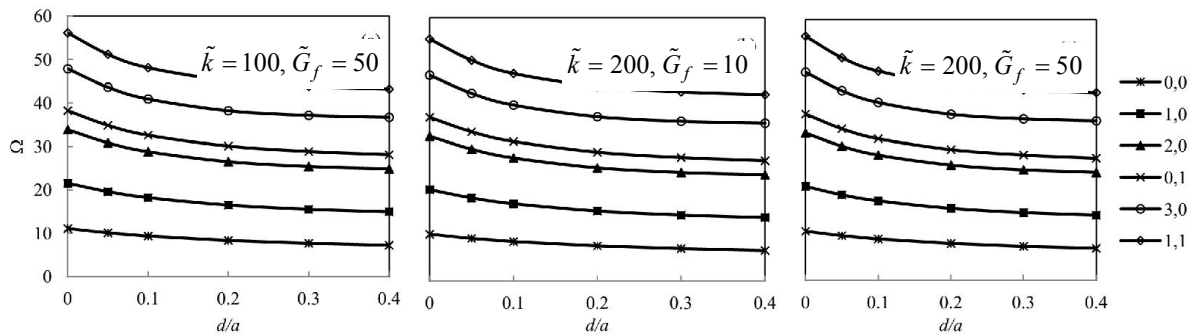


## SONUÇLAR

Bu çalışmada, akışkanla etkileşim halinde olan ve bir yandan da Pasternak zeminine yaslanan plakların dinamik davranışını incelemek amacıyla sayısal bir çözüm yöntemi sunulmuştur. Gâteaux diferansiyeli ve potansiyel operatör koşulu kullanılarak Mindlin plağı ve Pasternak zemininin etkileşimi için karışık sonlu elemanlar yöntemine uygun bir fonksiyonel üretilmiştir. Akışkan varlığının plak dinamik davranışına olan etkisinin belirlenmesi için, akışkan hareketini tanımlayan sınır değer problemi bir sınır integral denkleme dönüştürülmüş ve sınır eleman yöntemiyle sayısal bir çözüm yoluna gidilmiştir. Uygulama olarak iki ayrı plak problemi incelenmiştir: kısmen akışkana daldırılmış ve bir yüzünden izotrop Pasternak zeminine yaslanan dikdörtgen bir plak ve akışkanla dolu rijit silindirik tankın ankastre bağlı dairesel taban plağı. Dikdörtgen plak probleminde sunulan sayısal yöntemle ait sonuçlar literatürdeki karşılıklarıyla doğrulanmış, çözüm yönteminin yakınsaklık göstergeleri ile akışkan derinliğinin ve zemin parametrelerinin dinamik karakteristiklere olan etkileri incelenmiştir.



Şekil 3 Elastik zemine oturan rijit silindirik akışkan taşıyıcı tankın taban plağı.



Şekil 4 Akışkan dolu rijit dairesel silindirik tankın Pasternak zeminine oturan ankastre bağlı taban plağı için, tank doluluk oranına göre boyutsuz frekans değerlerinin değişimi.

Tablo 2 Akışkan taşıyan silindirik tank tabanında, Pasternak zeminine oturan ankastre daire plağın boyutsuz frekans değerlerinin yakınsaması

$i, j$	$d/r=0$				$d/r=0.3$				$d/r=0.6$			
	108 SE	192 SE	300 SE	432 SE	156 BE	288 BE	460 BE	672 BE	228 BE	384 BE	620 BE	864 BE
0,0	10.53	10.47	10.45	10.44	7.28	7.25	7.24	7.24	6.25	6.21	6.21	6.21
1,0	20.93	20.83	20.76	20.74	15.03	15.01	14.98	14.99	13.83	13.79	13.75	13.76
1,0	20.93	20.83	20.76	20.74	15.04	15.01	14.98	14.99	13.85	13.79	13.75	13.76
2,0	32.94	33.03	33.01	32.98	24.53	24.70	24.73	24.77	23.59	23.71	23.73	23.76
2,0	33.18	33.18	33.02	33.00	24.76	24.87	24.77	24.81	23.82	23.88	23.77	23.80
0,1	36.35	37.09	37.32	37.32	27.41	28.03	28.13	28.16	26.05	26.53	26.58	26.60
3,0	45.66	46.97	46.90	46.91	35.27	36.34	36.36	36.41	34.71	35.67	35.67	35.71
3,0	45.66	46.97	46.90	46.91	35.27	36.35	36.36	36.41	34.71	35.67	35.67	35.71
1,1	-	54.86	55.00	55.18	-	42.85	42.95	43.00	-	41.64	41.71	41.75
1,1	-	54.86	55.00	55.18	-	42.86	42.95	43.00	-	41.65	41.71	41.75

## KAYNAKLAR

- [1] Reddy J.N., "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells", CRC Press, 2006.
- [2] Omurtag M.H., Özütok A., Aköz A.Y., Özçelikörs Y., "Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential", International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40 295–317, 1997.
- [3] Zhou D., Lo S.H., Au F.T.K., Cheung Y.K., "Three-dimensional free vibration of thick circular plates on Pasternak foundation", J. Sound. Vib. 292 726–741, 2006.
- [4] Eratli N., Akoz A.Y., "Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element", Structural Engineering and Mechanics. 13 277–298, 2002.
- [5] Ergin A., Uğurlu B., "Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid", Journal of Fluids and Structures. 17 927–939, 2003.
- [6] Jeong K.-H., Yoo G.-H., Lee S.-C., "Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates", Journal of Sound and Vibration. 272 539–555, 2004.
- [7] Ugurlu B., Kutlu A., Ergin A., Omurtag M.H., "Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid", J. Sound. Vib. 317 308–328, 2008.
- [8] Hashemi S. H., Karimi M., Taher, H. R. D. "Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method", Ocean Eng. 37 174–185, 2010.
- [9] Kutlu A., Uğurlu B., Omurtag M.H., Ergin A., "Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid, Ocean Eng. 42 112–125, 2012.
- [10] Oden J.T., Reddy J.N., "Variational methods in theoretical mechanics", Springer-Verlag, 1976.