



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## BÜYÜK ÇÖKME PROBLEMİ ve PLAK-ZEMİN ETKİLEŞİMİ İÇİN KARIŞIK SONLU ELEMAN ANALİZİ

Akif Kutlu ve Mehmet H. Omurtag  
İTÜ İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul.

### ABSTRACT

The current study focuses on the mixed finite element solution of moderately thick plates resting on elastic foundation and exhibiting large deflection. Strain field of the isotropic plate was based on the Mindlin plate assumptions and von Kármán kinematic relations. Pasternak elastic foundation model is considered. Hellinger-Reissner principle was used to obtain a mixed finite element solution. Non-linear equations of the problem were linearized using the incremental formulation. Iteration procedure was conducted according to the Newton-Raphson scheme. Proposed mixed solution strategy does not suffer from shear locking problem and gives forces and force couples at the element nodes directly. A comparison study was performed and convergence was observed. The influences of foundation on the large deflection behavior of Mindlin plates were investigated through parametric studies.

### ÖZET

Bu çalışmada elastik zemine oturan, büyük çökmeye maruz nispeten kalın plakların karışık sonlu eleman yöntemiyle incelenmesi amaçlanmıştır. Plak şekil değiştirme alanı Mindlin varsayımı ve von Kármán kinematik bağıntılarına dayanmaktadır. Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak bir karışık sonlu eleman üretilmiştir. Doğrusal olmayan fonksiyonel artımsal formülasyonla doğrusallaştırılmıştır. Sayısal çözüm için Newton-Raphson ardışık yaklaşım şemasına uyulmuştur. Önerilen karışık sonlu eleman çözüm stratejisi kayma kilitlenmesi problemini otomatik olarak aşmakta ve kuvvet ile momentleri düğüm noktalarında doğrudan hesaplamaktadır. Bir karşılaştırma örneği çözülmüş ve yakınsama davranışı gözlenmiştir. Parametrik çözümler yapılarak plak büyük çökme davranışına elastik zeminin etkisi incelenmiştir.

### GİRİŞ

Yapı sistemlerinin davranışı etkileşimde buldukları ortamla doğrudan ilişkilidir. Örneğin su ve/veya zeminle temas etmek, plakların mekanik davranışlarını önemli mertebede etkiler [1]. Yüzeysel eleman ve elastik ortam etkileşimi birçok mühendislik uygulamasında karşılaşılan bir durumdur [2]. Binalarda döşeme ve temeller, zeminle temas halindeki silo ve tanklar inşaat mühendisliği açısından bu probleme verilebilecek örneklerdir. Plak zemin etkileşim problemi bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Datta [3] Galerkin metonu kullanarak

Winkler zemini ile etkileşen ince ortotropik elips geometrisindeki plakların büyük çökme problemini incelemiştir. Katsikadelis [4] formüle ettiği sınır eleman yöntemi ile doğrusal ve doğrusal olmayan aynı zamanda homojen olmayan Winkler zeminine oturan ince plakları incelemiştir. Civalek [5] iki parametrelili zemine oturan ince daire plakların statik ve dinamik davranışını harmonik diferansiyel kuadratur yöntemini uzaysal bölge, sonlu farklar yöntemini de zaman alanı çözümünde kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada izotrop ve doğrusal elastik nispeten kalın plak ile elastik zemin etkileşimi büyük çökme problemi kapsamında karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Mindlin varsayımı ve von Kármán kinematik ilişkileri kullanılarak şekil değiştirme alanı tarif edilmiş ve denge denklemleri Pasternak zemin etkilerini de kapsayacak şekilde yazılmıştır. Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak bölge denklemleri zayıf formda tarif edilmiş ve doğrusal olmayan sonlu eleman denklemleri elde edilmiştir. Artımsal formülasyon ile denklemler doğrusallaştırılmış ve teğet sistem matrisi ile düzeltme terimleri elde edilmiştir. Newton-Raphson ardışık yaklaşım şeması kullanılarak sayısal sonuçlar üretilmiştir. Çözüm yöntemi literatürdeki mevcut örneklerle karşılaştırma yapılarak doğrulanmış ve daha sonra bazı parametrik çözümler yapılarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

### ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Kesitte sabit kayma açısı olduğunu varsayan Mindlin plak kuramı ve von Kármán'ın kinematik tanımı kullanıldığında, nispeten kalın plağın şekil değiştirme alanı şu şekilde tarif edilir .

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 & ; & \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 & ; & \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} & ; & \quad \gamma_{xz} = w_{,x} + \varphi_x \\ \kappa_{xx} &= \varphi_{x,x} & ; & \quad \kappa_{yy} = \varphi_{y,y} & ; & \quad \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} & ; & \quad \gamma_{yz} = w_{,y} + \varphi_y \end{aligned} \right\}$$

Pasternak zemin etkilerini de içeren denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$q_x + N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$q_y + N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0$$

$$q_z + (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y})_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y})_{,y} + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} - kw + G_f(w_{,xx} + w_{,yy}) = 0$$

$$M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} = 0$$

$$M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_{yz} = 0$$

Burada zemin yataklanma katsayısı  $k$  Winkler yay parametresi olup,  $G_f$  zemin kayma modülü [6]. Hellinger-Reissner varyasyonel prensibi, sistemin fonksiyonelinin birinci varyasyonunun aşağıdaki şekilde hesaplanabileceğini söyler:

$$\delta \Pi_{HR} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\sigma}^\sigma dV + \int_V \left( (\boldsymbol{\sigma}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} \right) dV - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

Tanımlanan problem için fonksiyonelin tam varyasyonu (1) denkleminde göre aşağıdaki gibi elde edilir [7].

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{HR} = & \int_{\Omega} \left[ u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - \frac{1}{Eh}(N_{xx} - \nu N_{yy}) \right] \delta N_{xx} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - \frac{1}{Eh}(N_{yy} - \nu N_{xx}) \right] \delta N_{yy} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - \frac{N_{xy}}{Gh} \right] \delta N_{xy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,x} - \frac{12}{Eh^3}(M_{xx} - M_{yy}\nu) \right] \delta M_{xx} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{y,y} - \frac{12}{Eh^3}(M_{yy} - M_{xx}\nu) \right] \delta M_{yy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} - \frac{12M_{xy}}{Gh^3} \right] \delta M_{xy} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ w_{,x} + \varphi_x - \frac{6Q_{xz}}{5Gh} \right] \delta Q_{xz} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ w_{,y} + \varphi_y - 6Q_{yz} / (5Gh) \right] \delta Q_{yz} d\Omega + \int_{\Omega} [N_{xx}\delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y}] d\Omega + \int_{\Omega} [N_{xy}\delta v_{,x} + N_{yy}\delta v_{,y}] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y} + Q_{xz})\delta w_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y} + Q_{yz})\delta w_{,y}] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [kw\delta w + G_f w_{,x}\delta w_{,x} + G_f w_{,y}\delta w_{,y}] d\Omega + \int_{\Omega} [M_{xx}\delta\varphi_{x,x} + M_{xy}\delta\varphi_{x,y} + Q_{xz}\delta\varphi_x] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [M_{xy}\delta\varphi_{y,x} + M_{yy}\delta\varphi_{y,y} + Q_{yz}\delta\varphi_y] d\Omega - \int_{\Omega} \delta w q_z d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{t}_j \delta u_j d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Üretilen fonksiyonel karışık yapıda olup hem yer değiştirme hem de kuvvet tipindeki bölge değişkenlerini içinde barındıran sonlu eleman denklemlerini üretir. Doğrusal olmayan terimler içeren bu denklemlerin cebrik denklem çözümüne dönüşebilmesi için doğrusallaştırılması gerekir. Artımsal formülasyon [8] kullanılarak doğrusallaştırılan sonlu eleman denklemleri Newton Raphson ardışık yaklaşım şemasına göre aşağıdaki gibi çözülebilir.

$$(\mathbf{K}^{++} + \mathbf{K}^{n(i-1)}) \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{F} - \mathbf{K}^{(i-1)} \quad ; \quad \bar{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i-1)} + \mathbf{X}^{(i)} \quad (2)$$

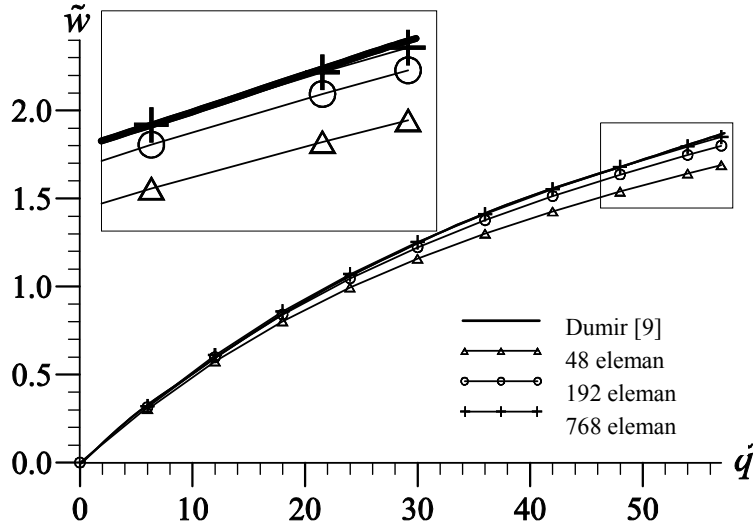
Denklemden ardışık yaklaşım adımı ( $i$ ) indisi ile gösterilmektedir. Yönteme göre her bir hesap adımında dış yük vektörü  $\mathbf{F}$  ile düzeltme vektörü (iç kuvvet vektörü)  $\mathbf{K}^i$  değer olarak birbirine yaklaşmakta ve aralarındaki fark belli bir karşılaştırma değerinin altına düştüğünde ardışık çözüm durdurulmakta ve sonuçlar elde edilmektedir.

## SAYISAL SONUÇLAR

### Doğrulama Örneği: Pasternak Zeminine Oturan Daire Plakta Büyük Çökme Analizi

Karşılaştırma örneği olarak [9] de verilmiş olan düzgün yayılı yükleme altındaki ince daire plak ( $h/r=0.01$ ) örneği seçilmiştir. Ankastre mesnetli plak izotrop Pasternak zeminine oturmaktadır. Boyutsuz Winkler zemin parametresi  $\bar{k}=5$  ve yine boyutsuz zemin kayma parametresi  $\bar{G}=2$ 'dir. Dörtgen elemanların kullanıldığı sonlu eleman çözümünde 48, 192, 768 eleman sayıları için çözüm yapılmış ve yakınsama gözlemlenmiştir. Daire plağın orta nokta çökmesinin dış yüke bağlı olarak değişimi Şekil 1 de sunulmuştur. Gevşek eleman ağında (48 eleman) bile doğrusal olmayan davranışın oldukça iyi yansıtıldığı görülmektedir. Dış yükün büyümesiyle birlikte daha sık bir eleman ağına ihtiyaç duyulmaktadır. Parametrelerin boyutsuzlaştırılması aşağıda ifade edilmektedir.

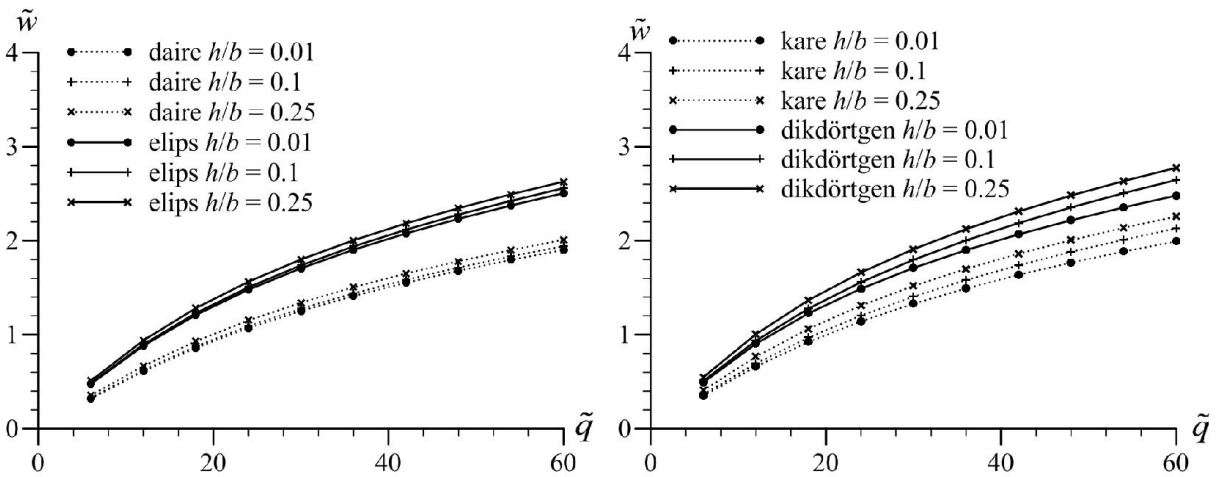
$$\tilde{w} = w/h, \quad \bar{G} = Gr^2/(Eh^3), \quad \tilde{q} = qr^4/(Eh^4), \quad \bar{k} = kr^4/(Eh^3), \quad (3)$$



Şekil 1. İnce daire plakta orta nokta çökmesi.

### Plak Kalınlığının Davranışa Etkisinin Çeşitli Geometrilerde İncelenmesi

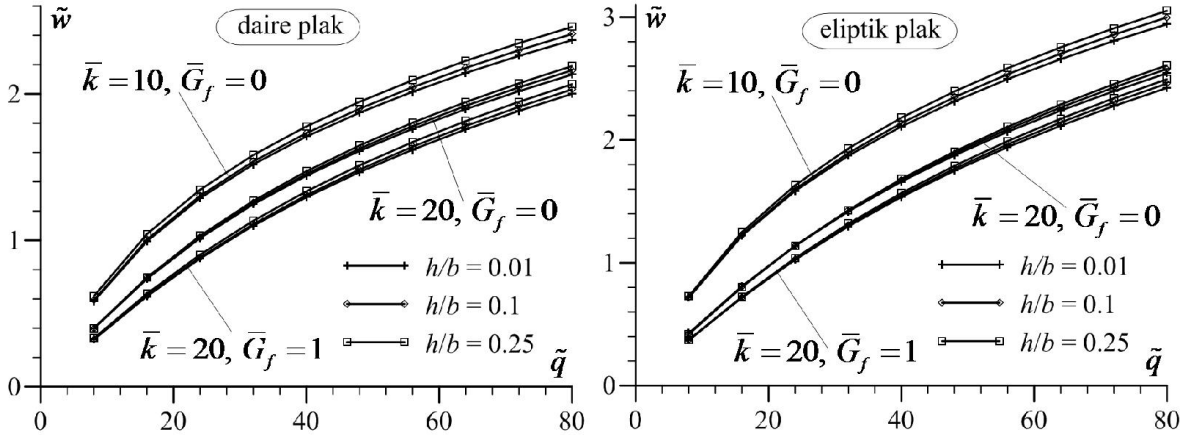
Bu örnekte çeşitli geometrilerdeki plakların (daire, kare, elips ( $a/b=2$ ) ve dikdörtgen ( $a/b=2$ )) farklı kalınlık oranları değerleri için ( $h/b=0.01, 0.1, 0.25$ ) plak davranışı incelenmiştir. Düzgün yayılı yük altındaki ve  $\bar{k}=5$  ve  $\bar{G}_f=2$  boyutsuz zemin parametrelili zemine yaslanan ve ankastre mesnetlenmiş plaklarda dış yüke bağlı olarak plak orta noktasının çökme değeri boyutsuz parametrelerle Şekil 1’de sunulmuştur. Sunulan grafikten çıkarılabilecek bazı yorumlar şunlardır. Çökme parametreleri, daire geometrisinden elips geometrisine doğru geçme durumunda, kare geometrisinden dikdörtgen geometrisine geçme durumundan daha çok etkilenmektedir. Kare ve dikdörtgen geometrilerdeki plaklarda hesaplanan çökme parametrelerinin kalınlık değişimine karşı duyarlılığı, daire ve eliptik plakların çökme parametrelerinin plak kalınlığındaki değişime duyarlılığından daha fazladır. Artan yük parametresi için;  $h/b=0.01$   $h/b=0.1$ ’e değişim oranı büyürken,  $h/b=0.1$ ’den  $h/b=0.25$ ’e küçülmektedir.



Şekil 2. Çeşitli geometrilerde ve farklı kalınlıkta plaklarda orta nokta çökmesi.

### Farklı Zemin Parametrelerinin ve Plak Kalınlık Oranının Plak Davranışına Etkisi

Bu örnek kapsamında ankastre mesnetlenmiş ve düzgün yayılı yüke maruz daire ve elips ( $a = 2b$ ) şeklindeki plaklar ele alınmış ve zemin parametrelerinin büyük çökme davranışına etkisi incelenmiştir. Farklı zemin parametreleri için problem ele alınmıştır:  $(\bar{k}, \bar{G}_f) = (10, 0)$ ,  $(\bar{k}, \bar{G}_f) = (20, 0)$ . Böylece hem zemin Winkler yay sabitinin, hem de zemin kayma modülünün etkii incelenebilmiştir. Düzgün yayılı yükün artışıyla birlikte oluşan plak orta noktası çökme değerleri Şekil 3’de sunulmuştur.



Şekil 3. Farklı zemin parametrelerinde ve çeşitli plak kalınlık oranları için plak orta nokta çökmeleri.

Şekil 3’den görüldüğü gibi zemin parametrelerinde meydana gelen artış, çökme parametrelerinde azalmaya sebep olmaktadır. Daire plak çökme değerleri, elips plak çökme değerleri ile karşılaştırıldığında Winkler parametresindeki değişimden daha çok etkilenmektedir. Bununla birlikte, eliptik plak çökme parametreleri, daire plak çökme parametreleri ile karşılaştırıldığında zemin kayma modülündeki değişimden daha çok etkilenmektedir. Hem daire hem de eliptik plak; kalınlık oranı arttıkça Winkler parametresinden daha çok etkilenirken zemin kayma parametresinden daha az etkilenmektedirler.

### SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik zemin ile etkileşen nispeten kalın plakların büyük çökme analizi karışık sonlu eleman yöntemiyle gerçekleştirilmiştir. Mindlin plak kuramı ve von Kármán şekil değiştirme varsayımları ile Pasternak elastik zemin modeli bir araya getirilerek problemin yönetici denklemleri tanımlanmıştır. Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak sistem fonksiyonelinin tam varyasyoneli karışık yapıda elde edilmiştir. Doğrusal olmayan sonlu eleman denklemleri artımsal formülasyonla doğrusallaştırılırken teğet sistem matrisi ile birlikte iç kuvvet veya düzeltme terimleri de elde edilmiştir. Sonlu eleman denklem sistemi üretilirken bölge değişkenleri doğrusal olarak eleman bölgesinde interpolate edilmiş, dört düğüm noktalı dörtgen izoparametrik elemanlar üzerinden hesaplar yürütülmüştür. Newton-Raphson ardışık yaklaşım algoritması ile denklem sistemi çözülmüş ve sayısal sonuçlar üretilmiştir. Doğrulama ve yakınsama örneği sunulmuş ve önerilen yöntemin düzgün bir yakınsama ile literatürdeki mevcut sonuçlarla uyumlu sonuçlar ürettiği gözlenmiştir. Karışık

sonlu eleman formülasyonu kayma kilitlenmesi problemini de kendiliğinden aşmaktadır. Son olarak bazı parametrik çözümler yapılmış ve plak kalınlık oranının, zemin parametrelerinin ve plak geometrisinin büyük çökme davranışındaki etkileri incelenerek yorumlanmıştır.

#### KAYNAKLAR

- [1] Ugurlu B., Kutlu A., Ergin A., Omurtag M.H., "Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid", *J. Sound. Vib.* 317 308–328, 2008.
- [2] Dutta S.C., Roy R., "A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system", *Comput. Struct.* 80 1579–1594, 2002.
- [3] Datta S., "Large deflections of elliptic plates exhibiting rectilinear orthotropy and placed on elastic-foundation", *J. Appl. Mech.* 43 690–692, 1976.
- [4] Katsikadelis J.T., "Large deflection analysis of plates on elastic foundation by the boundary element method", *Int. J. Solids Struct.* 27 1867–1878, 1991.
- [5] Civalek Ö., "Large deflection static and dynamic analysis of thin circular plates resting on two-parameter elastic foundation: HDQFD coupled methodology approaches", *Int. J. Comput. Meth.* 2 271–291, 2005.
- [6] Kutlu A., Uğurlu B., Omurtag M.H., Ergin A., "Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid", *Ocean Eng.* 42 112–125, 2012.
- [7] Kutlu A., Omurtag M.H., "Large deflection bending analysis of elliptic plates on orthotropic elastic foundation with mixed finite element method", *International Journal of Mechanical Sciences.* 65 64–74, 2012.
- [8] Başar Y., Krätzig W.B., "Mechanik Der Flächentragwerke: Theorie, Berechnungsmethoden", *Anwendungsbeispiele*, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.
- [9] Dumir P.C., "Circular plates on Pasternak elastic foundations", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 11 51–60, 1987.