



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARDA BÜYÜK ÇÖKME PROBLEMİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR İLE İNCELENMESİ

Akif Kutlu ve Mehmet H. Omurtag  
İTÜ İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul.

### ABSTRACT

In this study, geometrically non-linear flexure of moderately thick laminated plates was investigated with mixed finite element method. Shear deformations at the cross section of the plate was considered according to Mindlin plate assumptions. Non-linear functional of the large deflection problem was obtained by using Hellinger-Reissner principle. Incremental formulation was employed to linearize the non-linear equations where tangent system matrix and correction vector were determined. During the solution process, the static condensation was not preferred and the stress type variables were directly calculated with displacement type variables. In the numerical solution procedure Newton-Raphson method was followed. Some comparison problems were solved and displacement and stress type results were presented with the proposed formulation which automatically overcomes the shear locking problem.

### ÖZET

Bu çalışmada tabakalı kompozit nispeten kalın plakların eğilme problemi geometrik doğrusal olmayan etkiler gözetenerek karışık sonlu eleman yöntemiyle incelenmiştir. Plak kesitinde kayma şekil değiştirmeleri Mindlin plak kuramı çerçevesinde dikkate alınmıştır. Büyük çökme probleminin fonksiyonel yapısı Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Doğrusal olmayan sonlu eleman denklemleri artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmış, teğet sistem matrisi ve düzeltme vektörü elde edilmiştir. Çözüm sürecinde statik kondensasyon yapılmamış ve gerilme tipindeki bölge değişkenleri, yer değiştirme tipinde olan değişkenlerle birlikte doğrudan hesaplanmıştır. Sayısal çözüm yönteminde Newton-Raphson ardışık yaklaşım tekniği takip edilmiştir. Kendiliğinden kayma kilitlenmesini aşan formülasyonla doğrulama örnekleri çözülmüş yerdeğiştirme ve gerilme türünde sonuçlar sunulmuştur.

### GİRİŞ

Kompozit plaklar, birim hacim ağırlıklarının küçük, buna karşılık mukavemetlerinin büyük olması sebebiyle bir çok mühendislik uygulamasında sıklıkla kullanılmaktadır. Kompozit plağın gerçek performansının ortaya çıkabilmesi için mekanik yükler altındaki davranışının doğru bir biçimde ele alınması gerekmektedir. Dolayısı ile sadece plaktaki yerdeğiştirmeleri değil gerilme tipindeki durum değişkenlerinin de gerçekçi hesabı hedeflenir. Kompozit

plaklarda büyük çökme hesabı bu sebeple birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [1]. Kompozit plak ve kabukların genel mekanik davranışıyla ilgili bilgi, bazı özel durumları için analitik çözümler ve geniş sonlu eleman çözüm uygulamaları Reddy'nin geniş kapsamlı kitabında [2] bulunabilir.  $C^0$  sürekliliğinde bir sonlu eleman kullanan Kant ve Kommineni [3] yüksek mertebeden kayma ilişkilerini göz önüne alarak tabakalı kompozit plakların doğrusal ve doğrusal olmayan analizini yapmışlardır. Yine yüksek mertebeden kayma etkilerini gözeten çalışmalarında Savithri ve Varadan [4] tabakalı kompozit plakların büyük çökme sonuçlarını elde edebilmek için Galerkin yöntemini tercih etmişlerdir. Singh ve diğ. [5] dört düğüm noktalı,  $C^1$  sürekliliğinde ve düğüm noktasında ondört serbestliği bulunan bir dikdörtgen sonlu eleman sunmuşlar ve yüksek mertebeden kayma etkilerini gözetecek tabakalı kompozit plağın geometrik doğrusal olmayan davranışını incelemişlerdir. Liu ve diğ. [6] dik eksenlerde ototrop özellikte simetrik tabakalanmış eliptik plakları ele almışlar ve plağın büyük çökme problemi için kayma etkilerini de gözetecek şekilde analitik bir çözüm elde etmişlerdir. Günay ve Erdem [7] oldukça bilinen Heterosis elemanını geliştirmişler ve tabakalı plakların doğrusal ve geometrik doğrusal olmayan çözümlerinde daha iyi performans elde etmeye çalışmışlardır. Yakın zamanda yapılan bir çalışmada Kapoor ve Kapania [8] NURBS sonlu eleman formülasyonunu tabakalı kompozit plakların büyük çökme problemine uygulamışlar ve birinci mertebeden kayma etkilerini de dikkate almışlardır. Bu çalışmada tabakalı kompozit plakların büyük çökme problemi karışık sonlu eleman formülasyonu ile ele alınmıştır. Mindlin plak kuramı ve von Kármán varsayımları ile plak şekil değiştirme alanı tarif edilmiştir. Hellinger-Reissner prensibi doğrultusunda karışık sonlu eleman denklemleri elde edilmiş ve artımsal formülasyon kullanılarak sistem teğet ve iç kuvvet (düzeltme) terimleri elde edilmiş, Newton-Raphson ardışık yaklaşım şeması ile sayısal problem çözülmüştür. İki alanlı (yer değiştirme ve kuvvet-kuvvet çifti alanları) karışık sonlu eleman formülasyonunda yekpare (monolithic) çözüm stratejisi tercih edilmiş, böylece yer değiştirmelerle birlikte gerilme bileşkesi tipindeki alan değişkenleri de doğrudan elde edilmiştir.

### FORMÜLASYON ve ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Birinci mertebeye kayma etkisini gözeten Mindlin plak kuramı von Kármán kinematik ilişkileri kullanıldığında plak şekil değiştirme alanı aşağıdaki gibi tarif edilir [9],

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 & ; & \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 & ; & \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} & ; & \quad \gamma_{xz} = w_{,x} + \varphi_x \\ \kappa_{xx} &= \varphi_{x,x} & ; & \quad \kappa_{yy} = \varphi_{y,y} & ; & \quad \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} & ; & \quad \gamma_{yz} = w_{,y} + \varphi_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Doğrusal olmayan plak denge denklemleri aşağıda tarif edildiği gibidir.

$$\left. \begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 & ; & \quad q_z + (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y})_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y})_{,y} + S_{xz,x} + S_{yz,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 & ; & \quad M_{xx,x} + M_{xy,y} - S_{xz} = 0 & ; & \quad M_{yy,y} + M_{xy,x} - S_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hellinger-Reissner prensibi, hem denge denklemlerini hem de uygunluk koşulu ifadelerini zayıf formda ifade eder. Genel haliyle bu prensip aşağıdaki gibi yazılabilir [10],

$$\delta \Pi_{HR} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\sigma}^\sigma dV + \int_V \left( (\boldsymbol{\sigma}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} \right) dV - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

Ortotrop tabakalardan oluşan plağın eşdeğer kesit kabulüne bağlı olarak bünye denklemleri kullanılmış Hellinger-Reissner prensibi doğrultusunda problemin fonksiyonelinin birinci varyasyonu şu şekilde elde edilir [9].

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{HR} = & \int_{\Omega} \left[ u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - A'_{11}N_{xx} - A'_{12}N_{yy} - A'_{13}N_{xy} - B'_{11}M_{xx} - B'_{12}M_{yy} - B'_{13}M_{xy} \right] \delta N_{xx} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - A'_{21}N_{xx} - A'_{22}N_{yy} - A'_{23}N_{xy} - B'_{21}M_{xx} - B'_{22}M_{yy} - B'_{23}M_{xy} \right] \delta N_{yy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - A'_{31}N_{xx} - A'_{32}N_{yy} - A'_{33}N_{xy} - B'_{31}M_{xx} - B'_{32}M_{yy} - B'_{33}M_{xy} \right] \delta N_{xy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,x} - B'_{11}N_{xx} - B'_{12}N_{yy} - B'_{13}N_{xy} - D'_{11}M_{xx} - D'_{12}M_{yy} - D'_{13}M_{xy} \right] \delta M_{xx} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{y,y} - B'_{21}N_{xx} - B'_{22}N_{yy} - B'_{23}N_{xy} - D'_{21}M_{xx} - D'_{22}M_{yy} - D'_{23}M_{xy} \right] \delta M_{yy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} - B'_{31}N_{xx} - B'_{32}N_{yy} - B'_{33}N_{xy} - D'_{31}M_{xx} - D'_{32}M_{yy} - D'_{33}M_{xy} \right] \delta M_{xy} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ w_{,x} + \varphi_x - C'_{11}S_{xz} - C'_{12}S_{yz} \right] \delta S_{xz} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ w_{,y} + \varphi_y - C'_{21}S_{xz} - C'_{22}S_{yz} \right] \delta S_{yz} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_{xx}\delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ N_{xy}\delta v_{,x} + N_{yy}\delta v_{,y} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \delta w q_z d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y} + S_{xz})\delta w_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y} + S_{yz})\delta w_{,y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ M_{xx}\delta\varphi_{x,x} + M_{xy}\delta\varphi_{x,y} + S_{xz}\delta\varphi_x \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ M_{xy}\delta\varphi_{y,x} + M_{yy}\delta\varphi_{y,y} + S_{yz}\delta\varphi_y \right] d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}n_j - \hat{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Doğrusal olmayan denklemler artımsal formülasyon [11] kullanılarak doğrusallaştırılmış ve Newton-Raphson yöntemine göre sonlu eleman denklem sistemi aşağıdaki gibi kurulmuştur.

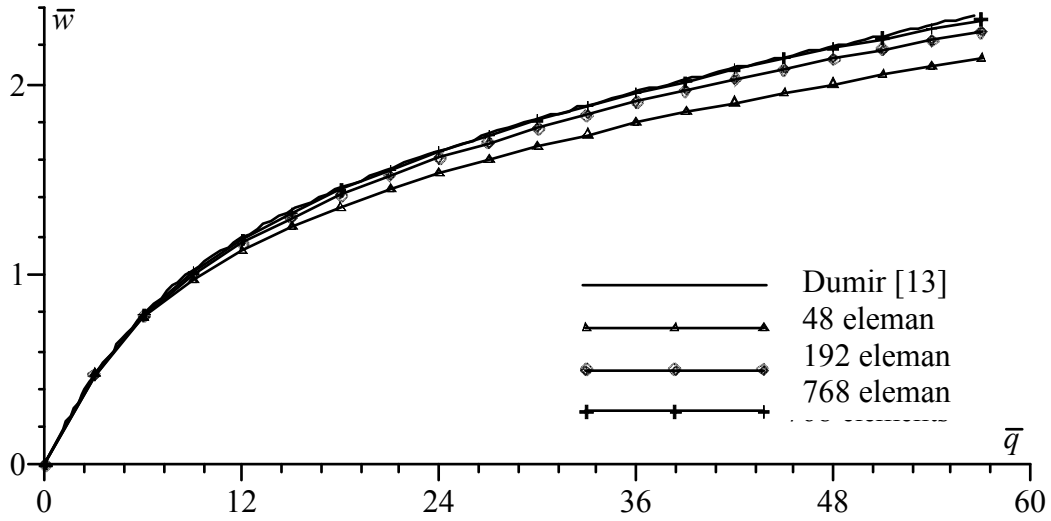
$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^{nl(i-1)})^+ \mathbf{X}^+(i) = \mathbf{F}^+ - \mathbf{K}^+(i-1) \quad ; \quad \bar{\mathbf{X}}^+(i) = \mathbf{X}^{(i-1)} + \mathbf{X}^+(i) \quad (4)$$

Denklemden görülen  $(i)$  ile bir ardışık yaklaşım adımı gösterilmektedir. Böylece her hesap adımında dış yük vektörü  $\mathbf{F}^+$  ile düzeltme vektörü (iç kuvvet vektörü)  $\mathbf{K}^+$  arasındaki fark azalmakta ve değerin sıfıra belli miktarda yaklaşması sonucunda ardışık çözüm durdurularak sonuçlar elde edilmektedir. Plak bölgesi ayrıklaştırmasında dört düğüm noktalı, izoparametrik elemanlar kullanılmış, eleman içinde bölge değişkenleri bilineer fonksiyonlarla interpolate edilmiştir [12]. Her bir düğüm noktasında onüç bölge değişkeni mevcuttur ve sayısal integrasyonlar  $2 \times 2$  Gauss formülleri ile hesaplanmıştır.

## SAYISAL ÖRNEKLER

## İzotrop İnce Daire Plakta Büyük Çökme Analizi

Geliştirilen sonlu eleman çözümünde dörtgen elemanlar üzerinden hesap yapıldığı için çeşitli geometrilerdeki plaklar ele alınabilmektedir. Bu örnekte  $h/a = 0.01$  kalınlık oranına sahip, ankastre mesnetli izotrop malzeme özellikli ve düzgün yayılı yüklemeye maruz daire plakta büyük çökme problemi incelenmiştir. Plak için Poisson oranı  $\nu = 0.25$  seçilmiş ve problem parametreleri olan dış yük ve plak orta nokta çökmeleri boyutsuz olarak sırasıyla  $\bar{q} = qa^4 / (Eh^4)$ ,  $(\bar{w} = w/h)$  şeklinde hesaplanmıştır. Dumir [13]'te sunulmuş olan nokta kollokasyon çözümü sonuçları ile, bu çalışmada geliştirilen sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar yakınsamayı da inceleyecek şekilde Şekil 1'de sunulmaktadır.



Şekil 1 İnce daire plakta orta nokta çökmesi.

Şekil 1' de görüldüğü gibi 3 farklı ağ sıklığı için (48, 192 ve 768 eleman) çözüm yapılmıştır. Önerilen sonlu eleman çözümünden elde edilenler ile Dumir [13]'de verilen sonuçların büyük bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Eleman sayısının artırılmasıyla birlikte düzgün bir yakınsama elde edilmektedir. Şekil 1'den anlaşılacağı üzere yükleme şiddeti arttıkça ağ sıklığını arttırmak doğrusal olmayan problemde daha çok önem kazanmaktadır. Oldukça ince bir plak için sunulan bu sonuçlar, geliştirilen sonlu eleman çözümünün kayma kilitlenmesi sorununu otomatik olarak aştığını da göstermektedir.

## Tabakalı Kompozit Kalın Kare Plakta Büyük Çökme Analizi

Bu örnekte, sonuçları [2] de verilen düzgün yayılı yüklemeye altındaki dört kenarı ankastre mesnetlenmiş kare plak incelenmiştir. Üç farklı sonlu eleman ağı için ( $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$ ) çözümler yapılmış ve yakınsama incelenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Kare plakta kenar uzunluğu  $a = b = 12\text{m}$ , plak toplam kalınlığı  $h = 0.3\text{m}$  ve ortotrop malzeme için mühendislik sabitleri  $E_1 = 40 \times 10^6 \text{N/m}^2$ ,  $E_2 = 10^6 \text{N/m}^2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$  ve  $\nu_{12} = 0.25$  dir. Eşit kalınlıktaki tabaka yerleşiminde asal malzeme doğrultuları sırasıyla ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ) olarak verilmiştir. Plak orta noktasının çökmesi boyutlu büyüklüklerle Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1 Ankastre mesnetli, tabakalı kare plakta orta nokta çökmesi  $w_0$ [m] değerleri.

$q$ [N / m <sup>2</sup> ]	Reddy [2]	8×8	12×12	16×16
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
100.00	0.0826	0.0933	0.0870	0.0848
200.00	0.1491	0.1623	0.1540	0.1513
400.00	0.2419	0.2535	0.2452	0.2431
600.00	0.3095	0.3156	0.3081	0.3065
800.00	0.3552	0.3635	0.3567	0.3555
1000.00	0.3957	0.4032	0.3967	0.3958
1200.00	0.4303	0.4374	0.4311	0.4303
1400.00	0.4607	0.4676	0.4614	0.4607
1600.00	0.4879	0.4948	0.4887	0.4880
1800.00	0.5126	0.5196	0.5135	0.5128

Sunulan karışık sonlu eleman yöntemiyle bulunan plak orta nokta çökme değerlerinin Reddy [2] ile oldukça uyumlu olduğu Tablo 1’de açıkça görülmektedir. 12×12 eleman ağı ile 16×16 eleman ağına ait sonuçlar nerdeyse üst üste düşmüş ve mühendislik açısından yeterli yakınsaklık sağlanmıştır.

### Büyük Çökme Yapan Tabakalı Kare Plakta Gerilme Bileşenleri

Sunulan bu örnekte, düzgün yayılı yükleme altında büyük çökme yapan, basit mesnetli kare tabakalı kompozit plakta yerdeğiştirme ile birlikte gerilme değerleri incelenmiştir. Karışık sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar, Reddy [2]’de sunulan yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Plak tabakalarını oluşturan ortotrop katmanlar için ortotrop mühendislik malzeme sabitleri  $E_1 = 1.8282 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 1.8315 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu_{12} = 0.2395$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.3125 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ . Plak boyutları  $h = 0.096 \text{ m}$  ve  $a = b = 12 \text{ m}$ . Kompozit plakta eşit kalınlıklı tabakaların yönelimleri  $(0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$  şeklindedir.  $A = 6.75 \text{ m}$ ,  $B = 11.25 \text{ m}$  değerleri tanımlandığında, boyutsuz gerilmeler  $\tilde{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}(A, A, -h/4)a^2 / E_2 h^2$  ve  $\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}(B, B, -h/2)a^2 / E_2 h^2$  olarak ilgili koordinatlarda belirlenmiştir. Bu arada  $\tilde{\sigma}_{yy}$  2. tabakada hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 2’de verilmiştir. Çökme değeri  $w$  plak orta noktasında hesaplanmıştır. Tablo 2’den görüldüğü gibi sunulan sonuçlar ve Reddy [2]’de verilen sonuçlar büyük bir uyum içindedir. İki farklı yapıdaki sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlarda çökme değerlerinin birbirine daha yakın olduğu görülmektedir. Örneğin  $q = 1.40 \text{ N/m}^2$  değeri için  $w$ ,  $\tilde{\sigma}_{yy}$  ve  $\tilde{\sigma}_{xy}$  parametrelerinin farkları sırasıyla %0.31, %2.33 ve %2.33 oranlarındadır.

Tablo 2 Tabakalı kompozit kare plakta orta nokta çökmesi ve gerilme bileşenleri.

$q[N/m^2]$	$10w$		$\tilde{\sigma}_{yy}$		$\tilde{\sigma}_{xy}$	
	Bu çalışma	Reddy [2]	Bu çalışma	Reddy [2]	Bu çalışma	Reddy [2]
0.20	0.7341	0.7324	-0.4128	-0.4254	1.5087	1.4812
0.40	0.9973	0.9946	0.4265	0.3911	2.1828	2.1387
0.60	1.1711	1.1677	1.2800	1.2271	2.6714	2.6145
0.80	1.3050	1.3012	2.0985	2.0315	3.0686	3.0012
1.00	1.4158	1.4116	2.8799	2.8012	3.4086	3.3326
1.20	1.5113	1.5067	3.6280	3.5386	3.7087	3.6249
1.40	1.5958	1.5908	4.3470	4.2481	3.9787	3.8881
1.60	1.6720	1.6667	5.0406	4.9331	4.2252	4.1284
1.80	1.7416	1.7360	5.7120	5.5965	4.4525	4.3503
2.00	1.8059	1.8001	6.3637	6.2408	4.6638	4.5567
2.20	1.8658	1.8597	6.9979	6.8680	4.8616	4.7501
2.40	1.9220	1.9156	7.6163	7.4798	5.0476	4.9322

### SONUÇLAR

Bu çalışmada, tabakalı kompozit plakların büyük çökme analizi karışık sonlu elemanlar yöntemi yapılmıştır. Ortotrop tabakalardan oluşan plağın Mindlin varsayımları ve von Kármán şekil değiştirmeleri ışığında alan denklemleri elde edilmiş ve Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak probleme ait fonksiyonelin birinci varyasyonu, dolayısı ile sonlu eleman denklemleri elde edilmiştir. Artımsal formülasyonla doğrusallaştırılan denklemler, Newton-Raphson ardışık yaklaşım şemasına uyularak çözülmüştür. Bir çok doğrulama örneği çözülmüş ve çözüm yönteminin doğrusal olmayan problemde güvenle kullanılabileceği gösterilmiştir. Çok ince plakla yapılan çözüm sonucu formülasyonun plaklarda kilitleme problemini kendiliğinden çözdüğü görülmüştür. Karışık sonlu eleman yönteminin bir diğer avantajı olan kuvvet tipi büyüklüklerin doğrudan hesaplanabilmesi sebebiyle gerilme sonuçları elde edilmiş ve sunulmuştur.

### KAYNAKLAR

- [1] Chia C.-Y., "Geometrically nonlinear behavior of composite plates: A review", Applied Mechanics Reviews. 41 439–451, 1988.
- [2] Reddy J.N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells", CRC Press, 2004.
- [3] Kant T., Kommineni J.R., "C0 Finite element geometrically non-linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory", Computers & Structures. 45 511–520, 1992.
- [4] Savithri S., Varadan T.K., "Large deflection analysis of laminated composite plates", International Journal of Non-Linear Mechanics. 28 1–12, 1993.

- [5] Singh G., Rao G.V., Iyengar N.G.R., "Geometrically nonlinear flexural response characteristics of shear deformable unsymmetrically laminated plates", *Computers & Structures*. 53 69–81, 1994.
- [6] Liu R., Xu J., Zhai S., "Large-deflection bending of symmetrically laminated rectilinearly orthotropic elliptical plates including transverse shear", *Arch. Appl. Mech.* 67 507–520, 1997.
- [7] Günay E., Erdem A.Ü., "A new heterosis plate element for geometrically non-linear finite element analysis of laminated plates", *Computers & Structures*. 65 819–828, 1997.
- [8] Kapoor H., Kapania R.K., "Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates", *Composite Structures*. 94 3434–3447, 2012.
- [9] Kutlu A., Omurtag M.H., "Tabakalı kompozit Mindlin plağının karışık sonlu eleman yöntemi ile geometrik doğrusal olmayan analizi", *Sigma Mühendislik Ve Fen Bilimleri Dergisi*. 31 298–306, 2013.
- [10] Kutlu A., Omurtag M.H., "Large deflection bending analysis of elliptic plates on orthotropic elastic foundation with mixed finite element method", *International Journal of Mechanical Sciences*. 65 64–74, 2012.
- [11] Başar Y., Omurtag M.H., "Free-vibration analysis of thin/thick laminated structures by layer-wise shell models", *Comput. Struct.* 74 409–427, 2000.
- [12] Carey G.F., Oden J.T., "Finite Elements: A Second Course", Prentice Hall, 1983.
- [13] Dumir P.C., "Circular plates on Pasternak elastic foundations", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 11 51–60, 1987.