



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARIYLA BİRLEŞMİŞ PİEZOELEKTRİK TABAKA VE PİEZOELEKTRİK YARI SONSUZ DÜZLEMEN OLUŞAN SİSTEMİN HARMONİK YÜKLEME ETKİSİNDEKİ DİNAMİK DAVRANIŞI

Surkay Akbarov, Nihat İlhan ve Nagihan Koç  
Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ÖZET

Piezoelektrik örtü tabakası ve piezoelektrik yarı düzlemden oluşan sistemin zamana göre harmonik değişen yük etkisi altındaki dinamik davranışı, düzlem şekil değiştirme halinde, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, elasto elektro dinamiğin lineer teorisi kullanılarak incelenmiştir. Problemin matematiksel formülasyonu yapılmış ve elde edilen sınır değer probleminin çözümü Fourier integral dönüşümü uygulanarak bulunmuştur. İdeal olmayan temas koşullarına sahip örtü tabakası ve yarı düzlemden oluşan sistemdeki ara yüzeydeki gerilme dağılımı sayısal olarak incelenmiştir. Sayısal sonuçlar örtü tabakası ve yarı sonsuz düzlemin PZT- 5A, PZT-5H, PZT-4 ve PZT- 7A malzemelerinden oluşması halleri için elde edilmiştir.

### GİRİŞ

Piezoelektrik malzemeler; kristal yapıları sayesinde mekanik etkiyi elektrik potansiyele veya elektrik alana dönüştüren malzemelerdir. Aynı zamanda piezoelektrik malzemelere etki ettirilen elektrik alan veya elektrik potansiyel sebebiyle malzeme üzerinde mekanik etki oluşabilmektedir. Piezoelektrik dönüştürücüler ve sensörler gibi cihazlarda yaygın olarak kullanılan piezoelektrik malzemeler özellikleri sebebiyle birçok alanda kullanılmıştır. Bu nedenle, şimdiye kadar bu alanda pek çok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmaların sonuçları sistematik olarak [12, 16, 17] ve daha birçok çalışmada yayınlamıştır. Piezoelektrik yarı-düzlem için iki boyutlu elektro-elastik statik problemlerin çözümü için çeşitli yöntemler [2, 6, 7, 14, 20] de geliştirilmiştir. Ayrıca [15] de iki boyutlu elektro-elastik tabakalı sistemler için bir çözüm yöntemi önerilmiştir.

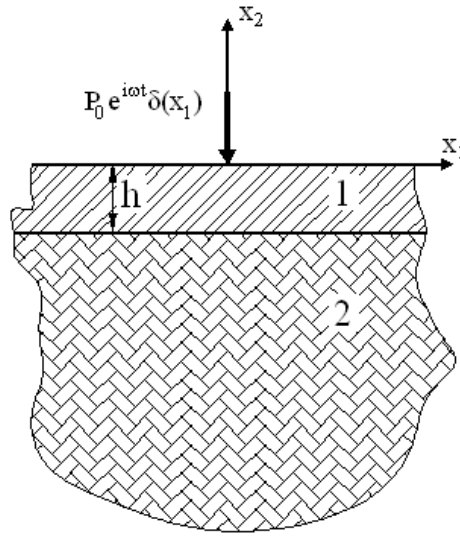
Elastik tabaka ve elastik yarı-uzaydan oluşan sistem için ilgili araştırmalar [1, 3, 4, 5, 8-11, 13] de yapılmıştır. Piezoelektrik örtü tabakası ve piezoelektrik yarı sonsuz ortamdan oluşan sistemin Lamb problemiyle ilgili ilk çalışma [22] de yapılmıştır.

Bu çalışmada piezoelektrik tabaka ve piezoelektrik yarı-düzlemden oluşan sistemin zamana göre harmonik Lamb probleminin çözümü yapılmıştır. Zamana göre harmonik değişen yükün ve ideal olmayan temas koşullarının ara yüzeydeki gerilme dağılımına etkisi sayısal olarak incelenmiştir.

### Problemin Matematiksel Formülasyonu

Kalınlığı  $h$  olan örtü tabakası yarı sonsuz ortam üzerindedir (Şekil 1). Örtü tabakası ve yarı sonsuz ortam sırasıyla  $\{-\infty < x_1 < \infty, -h \leq x_2 \leq 0, -\infty < x_3 < +\infty\}$ ,  $\{-\infty < x_1 < +\infty, -\infty \leq x_2 \leq -h, -\infty < x_3 < \infty\}$  bölgelerini kapsamaktadır. Örtü tabakasına ve yarı sonsuz ortama ait büyüklükler sırasıyla (1) ve (2) üst indisleriyle tanımlanmıştır.

Levhaya üst serbest yüzeyine  $Ox_1$  eksenine göre tekil  $Ox_3$  eksenine göre ise üniform yayılı zamana göre harmonik değişen yük etki etmektedir. Bu nedenle ele alınan sistemde  $Ox_1x_2$  düzleminde düzlem şekil değiştirme durumu oluşacaktır.



Şekil 1: Problemin Geometrisi

Probleme ilişkin hareket denklemi ve bünye bağıntıları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_i} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i^{(k)}}{\partial x_i} = 0$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \gamma_{kl}^{(k)} - e_{kij}^{(k)} E_k^{(k)}, \quad E_i^{(k)} = -\phi_{,i}^{(k)}$$

$$D_i^{(k)} = e_{ikl}^{(k)} \gamma_{kl}^{(k)} - \varepsilon_{il}^{(k)} E_l^{(k)} \quad (1)$$

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)})$$

Burada  $C_{ijkl}^{(k)}$  k nıncı elemanın rijitlik matrisinin elemanları,  $D_i^{(k)}$  elektriksel yer değiştirme vektörü,  $E_i^{(k)}$  elektrik alan vektörü,  $\phi^{(k)}$  elektrik potansiyeli,  $e_{kij}^{(k)}$  ve  $\varepsilon_{il}^{(k)}$  piezoelektrik ve dielektrik sabitler,  $u_i^{(k)}$  yer değiştirme vektörünün elemanları,  $\gamma_{ij}^{(k)}$  şekil değiştirme tensörünün

elemanları,  $\sigma_{ij}^{(k)}$  gerilme tensörünün elemanlarını göstermektedir. İleride  $x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow z, 11 \rightarrow xx, 12 \rightarrow xz, 22 \rightarrow zz$  indis değişimleri kullanılacaktır.

Sistemde sınır koşulları aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\sigma_{xz}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0; \sigma_{zz}^{(1)}\Big|_{z=0} = -pe^{i\omega t} \delta(x); \quad (2)$$

burada  $\delta(x_1)$  dirac delta fonksiyonunu göstermektedir.

Bu koşullara ilave olarak örtü tabakasının üst yüzeyi elektrodlu ve topraklanmış sınır koşulu ele alınacaktır.

$$\varphi^{(1)}\Big|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

Örtü tabakası ve yarı düzlem ara yüzeyinde tam olmayan temas koşullarının formülasyonu ele alınsın. Genel olarak, tam olmayan temas koşulu bahsedilen ara yüzey boyunca yer değiştirmeler ve kuvvetlerin süreksizliği ile tanımlanır. Elasto dinamik problemler için tam olmayan temas koşullarının matematiksel modeli [18] de ayrıntılı olarak verilmiştir. [18] de çoğu model için ara yüzeyin bir tarafındaki  $\mathbf{u}^+$  yer değiştirme ve  $\mathbf{f}^+$  kuvvet vektörlerinin süreksizliğinin ara yüzeyin diğer tarafındaki  $\mathbf{u}^-$  yer değiştirme ve  $\mathbf{f}^-$  kuvvet vektörleriyle doğrusal ilişkili olduğu kabul edilir. Bu durum [19] daki gibi aşağıdaki şekilde sunulabilir:

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{C}\mathbf{u}^- + \mathbf{D}\mathbf{f}^- \quad (4)$$

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{G}\mathbf{u}^- + \mathbf{F}\mathbf{f}^-, \quad (5)$$

$\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  ve  $\mathbf{F}$  üç boyutlu matrislerdir ve köşeli parantez ara yüzey boyunca karşılık gelen büyüklükte bir sıçramayı belirtir. Sonuç olarak ara yüzey  $x_2 = -h$  da ise o zaman:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}\Big|_{x_2=-h+0} - \mathbf{u}\Big|_{x_2=-h-0}, \quad [\mathbf{f}] = \mathbf{f}\Big|_{x_2=-h+0} - \mathbf{f}\Big|_{x_2=-h-0} \quad (6)$$

şeklinde yazılır. (4) ve (5) eşitliklerinden  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  ve  $\mathbf{F}$  matrislerinin seçimi ile çeşitli özel durumlar için tam olmayan temas koşulları yazılabilir. Böyle bir seçim  $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{G} = \mathbf{0}$  kabul edilerek [18] de yapılmıştır. Bu durumda (4) ve (5) eşitliklerinden,

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{F}\mathbf{f}^-, \quad (7)$$

elde edilir.  $\mathbf{F}$  sabit bir köşegen matristir. (7) modeli ilgili problemlerin çözüm yolunu önemli ölçüde basitleştirir ve çoğu gerçek durumda yeterlidir. Dolayısıyla, bu model, ((7) modeli) kesme-yaylı tip ideal olmayan model olarak adlandırılır ve birçok araştırmada kullanılmıştır. Bu açıklamaya göre (7) modeli ideal olmayan temas koşullarının matematiksel formülasyonu için kullanılır. Ele alınan problemler için bu temas koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)}\Big|_{z=-h} &= \sigma_{xz}^{(2)}\Big|_{z=-h}; \sigma_{zz}^{(1)}\Big|_{z=-h} = \sigma_{zz}^{(2)}\Big|_{z=-h}; u_1^{(1)}\Big|_{x_2=-h} - u_1^{(2)}\Big|_{x_2=-h} = \frac{F}{\mu_{12}^{(1)}} \sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=-h}; \\ w^{(1)}\Big|_{z=-h} &= w^{(2)}\Big|_{z=-h}; \varphi^{(1)}\Big|_{z=-h} = \varphi^{(2)}\Big|_{z=-h}; D_z^{(1)}\Big|_{z=-h} = D_z^{(2)}\Big|_{z=-h} \end{aligned} \quad (8)$$

$F$  boyutsuz kesme-yaylı parametredir.  $F = 0$  durumu [18] de incelenen tam temas koşuluna,  $F = \infty$  durumu tam olmayan temas koşulu haline karşılık gelmektedir. Tüm bunlara ek olarak  $x_2 \rightarrow -\infty$  giderken  $|u_i^{(2)}|, |\sigma_{ij}^{(2)}| < M = \text{sabit}$ , olacağı göz ardı edilmemelidir.

### Çözüm Metodu

(1) denklemlerindeki bünye bağıntıları hareket denkleminde yerine yazılırsa yer değiştirmeler cinsinden hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} C_{11}^{(K)} \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial x^2} + C_{13}^{(K)} \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial xz} + e_{31}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial xz} + C_{44}^{(K)} \left( \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial xz} \right) + e_{15}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial xz} &= \rho^{(K)} \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial t^2}, \\ C_{44}^{(K)} \left( \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial xz} + \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial x^2} \right) + e_{15}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial x^2} + C_{13}^{(K)} \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial xz} + C_{33}^{(K)} \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial z^2} + e_{33}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial z^2} &= \rho^{(K)} \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial t^2} \quad (9) \\ e_{15}^{(K)} \left( \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial xz} + \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial x^2} \right) - \varepsilon_{11}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial x^2} + e_{31}^{(K)} \left( \frac{\partial^2 u^{(K)}}{\partial xz} \right) + e_{33}^{(K)} \left( \frac{\partial^2 w^{(K)}}{\partial xz} \right) - \varepsilon_{33}^{(K)} \frac{\partial^2 \varphi^{(K)}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

(9) denklemindeki tüm büyüklükler  $g(x', z', t) = \bar{g}(x', z') e^{i\omega t}$  dönüşümü yapılarak yeniden tanımlanırsa probleme ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x \partial z} + \left( \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x \partial z} &= -\omega^2 \frac{1}{(c_2^{(k)})^2} u^{(k)}, \\ \left( \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} \right) + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{C_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2} &= -\omega^2 \frac{1}{(c_2^{(k)})^2} w^{(k)} \quad (10) \\ \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \left( \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} \right) - \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \left( \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \left( \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial z^2} \right) - \frac{\varepsilon_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Buradaki  $c_2^{(k)}$  dilatasyon dalga hızıdır ve  $c_2^{(k)} = \sqrt{\mu^{(k)}/\rho^{(k)}}$  şeklinde tanımlanır.

(10) denklemini çözebilmek için,

$$f_F(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) e^{-isx} dx \quad (11)$$

Fourier integral dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüm sayesinde aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\frac{d^2 u_F^{(k)}}{dz^2} + \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \frac{dw_F^{(k)}}{dz} + \left( \frac{e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \frac{d\varphi_F^{(k)}}{dz} + \left( \frac{C_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) u_F^{(k)} = 0$$

$$\frac{C_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{d^2 w_F^{(k)}}{dz^2} + \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{d^2 \varphi_F^{(k)}}{dz^2} + \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \frac{du_F^{(k)}}{dz} + \left( (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) w_F^{(k)} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \varphi_F^{(k)} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{d^2 w_F^{(k)}}{dz^2} - \frac{\varepsilon_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \frac{d^2 \varphi_F^{(k)}}{dz^2} + \left( \frac{e_{15}^{(k)} + e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \frac{du_F^{(k)}}{dz} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) w_F^{(k)} - \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \varphi_F^{(k)} = 0$$

Denklem (12) de  $\Omega^2 = \left( \frac{\omega}{c_2^{(1)}} \right)^2$  notasyonu kullanılmıştır. Bu denklem takımının çözümlenebilmesi için yer değiştirmeler ve elektrik potansiyel ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u_F^{(k)} = A^{(k)} e^{k^{(k)}z}, \quad w_F^{(k)} = B^{(k)} e^{k^{(k)}z}, \quad \varphi_F^{(k)} = C^{(k)} e^{k^{(k)}z} \quad (13)$$

Bu durumda (12) denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A^{(k)} \left( k^{(k)2} + \left( \frac{C_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) \right) + B^{(k)} \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) k^{(k)} + C^{(k)} \left( \frac{e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) k^{(k)} = 0$$

$$A^{(k)} \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) k^{(k)} + B^{(k)} \left( \frac{C_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} k^{(k)2} + \left( (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) \right) + C^{(k)} \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} k^{(k)2} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) = 0 \quad (14)$$

$$A^{(k)} \left( \left( \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + \frac{e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) k^{(k)} \right) + B^{(k)} \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} k^{(k)2} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) + C^{(k)} \left( -\frac{\varepsilon_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} k^{(k)2} - \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) = 0$$

(14) denkleminde  $k^{(k)}$  değerlerinin bulunacağı karakteristik denklem elde edilir.

$$a_3^{(k)} k^{(k)3} + a_2^{(k)} k^{(k)2} + a_1^{(k)} k^{(k)} + a_0^{(k)} = 0 \quad (15)$$

(9) ve (14) denklemleri kullanılarak probleme ait mekanik büyüklüklerin Fourier integral dönüşümleri hesaplanabilir. Probleme ait gerçek büyüklüklerin bulunması için ters Fourier integral dönüşümü yapılır.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(s, x_2) e^{isx_1} ds \quad (16)$$

### Sayısal Sonuçlar

Sayısal sonuçlar Tablo (1) de mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri verilen malzemeler için elde edilmiştir.

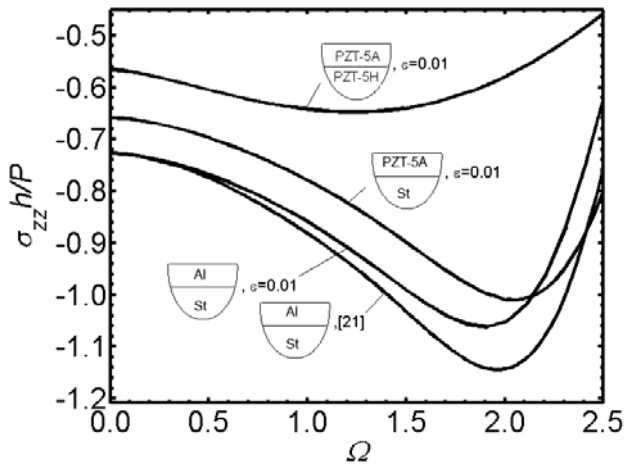
Tablo 1. Malzeme özellikleri

	$C_{44} * 10^{10}$	$C_{11} * 10^{10}$	$C_{13} * 10^{10}$	$C_{33} * 10^{10}$	$\rho$
	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>
PZT-5A	2.11	12.1	7.54	11.1	7750
PZT-5H	2.3	12.6	8.39	11.7	7500
PZT-4	2.56	13.9	7.40	11.5	7500

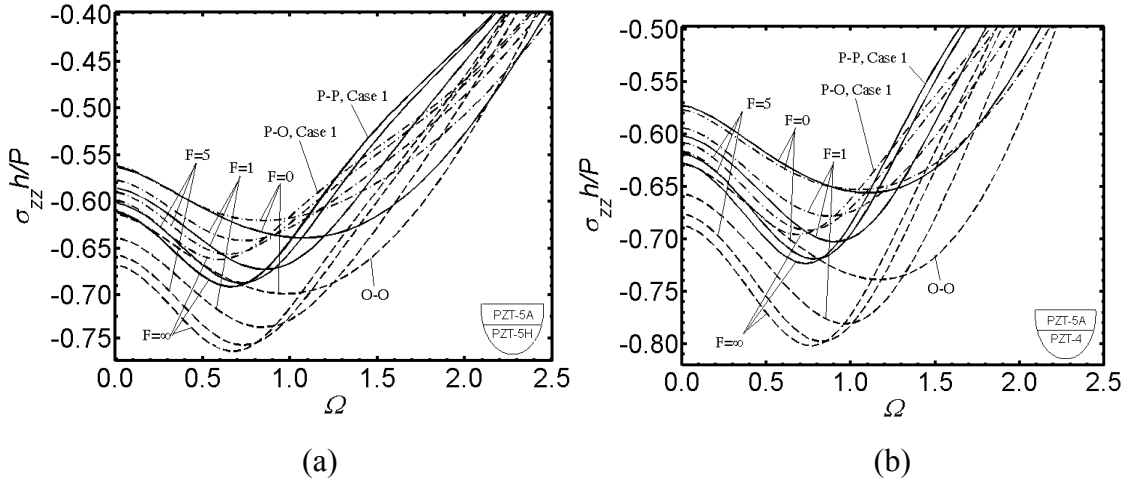
  

	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11} * 10^{-8}$	$\epsilon_{33} * 10^{-8}$
	C/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>	C/Vm	C/Vm
PZT-5A	-5.4	15.8	12.3	0.811	0.735
PZT-5H	-6.5	23.3	17	1.505	1.302
PZT-4	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562

Örtü tabakası ve yarı sonsuz levhada piezoelektrik ve dielektrik özellikler üç biçimde ele alınmıştır. Şekillerde P-P olarak gösterilen grafiklerde piezoelektrik ve dielektrik sabitler kullanılmış ( $e_{kij}^{(1)} \neq 0, \epsilon_{ij}^{(1)} \neq 0$  ve  $e_{kij}^{(2)} \neq 0, \epsilon_{ij}^{(2)} \neq 0$ ), P-O olarak gösterilen grafiklerde de yarı sonsuz levha için Tablo 1 de verilen malzemelerin piezoelektrik ve dielektrik sabitleri sıfır kabul edilmiş ( $e_{kij}^{(2)} = 0, \epsilon_{ij}^{(2)} = 0$  ve  $e_{kij}^{(1)} \neq 0, \epsilon_{ij}^{(1)} \neq 0$ ), şekillerde O-O olarak gösterilen grafiklerde her iki ortamında piezoelektrik ve dielektrik sabitleri sıfır kabul edilmiştir ( $e_{kij}^{(1)} = 0, \epsilon_{ij}^{(1)} = 0$  ve  $e_{kij}^{(2)} = 0, \epsilon_{ij}^{(2)} = 0$ ). Böylelikle piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin mekanik davranışa etkisi net bir biçimde incelenebilmiştir. Bu çalışmada zamana göre harmonik değişen yükün boyutsuzlaştırılmış frekansının örtü tabakası ve yarı sonsuz ortamın birleşim düzlemindeki  $\sigma_{zz}h/P$  ( $=\sigma_{zz}^{(2)}(0,-h)h/P$ ) ve  $\sigma_{xz}h/P$  ( $=\sigma_{xz}^{(2)}(0,-h)h/P$ ) gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir. Şekil 2 de bu çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğunun kanıtlanması için [22] deki sonuçlar [21] deki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Şekil 2  $\sigma_{zz}h/P$  normal gerilmelerinin  $\Omega$  ya göre değişiminin

Şekil 3a-b de örtü tabakasının PZT- 5A, yarı düzlemin sırasıyla PZT-5H ve PZT-4 malzemelerinden olması hali için, elde edilmiştir, düz çizgiler örtü tabakasının ve yarı sonsuz levhanın piezoelektrik olması hali için (P-P), noktalı çizgiler örtü tabakasının piezoelektrik, yarı sonsuz levhanın ortotrop olması hali için (P-O), kesikli çizgiler örtü tabakası ve yarı sonsuz levhanın ortotrop olması hali için (O-O) elde edilmiştir.



Şekil 3  $\sigma_{zz} h/P$  normal gerilmelerinin  $\Omega$  ya göre değişimi

### SONUÇ

(8) koşullarında  $F$  parametresine yay-kayma parametresi denir ve temas koşullarının ideal olmaması derecesi bu parametrenin değerleri ile belirlenir. Farz edilir ki  $0 \leq F \leq \infty$  ve  $F=0$  ( $F = \infty$ ) durumu ideal temas (tam kayma) durumlarına karşı gelmektedir.

Şekil 3' te  $F$  parametresinin değişiminin tabaka ve yarı düzlem ara yüzeyinde etki eden normal gerilme  $\sigma_{zz}$  ile boyutsuz frekans  $\Omega$  arasındaki bağlantıya etkisi birçok farklı durumlarda verilmektedir. Sayısal sonuçların analizi gösterir ki,  $F$  parametresinin büyümesi söz konusu gerilmelerin mutlak maksimum değerlerini artırmaktadır. Görüldüğü gibi  $F$  parametresinin (yani yay- kayma tipli ideal olmayan temas koşullarının) dinamik gerilme ile boyutsuz frekans ilişkisine etkisi çok belirgindir ve göz önüne alınması önemini arz etmektedir.

### KAYNAKLAR

- [1] Akbarov, S. D., İlhan, N., Time-harmonic dynamical stress field in a system comprising a pre-stressed orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane. *Archive of Applied Mechanics*, 80 (11), 1271-1286, 2010.
- [2] Khoroshev, K.G., Electroelastic state of an infinite multiply connected piezoelectric plate with known electric potentials applied to its boundaries. *International Applied Mechanics*, 46 (6), 687-695., 2010.
- [3] Akbarov, S. D., Salmanova, K. A., On the dynamics of a finite pre-strained bi-layered slab resting on a rigid foundation under the action of an oscillating moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 327, 454-472, 2009.

- [4] Akbarov, S. D., İlhan, N., Dynamics of a system comprising an orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane under the action of an oscillating moving load. *International Journal of Solids and Structures*, 46 (21) 3873-3881, 2009.
- [5] Akbarov, S. D., İlhan, N., 2008. Dynamics of a system comprising an orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane under the action of a moving load. *International Journal of Solids and Structures*, 45 (14-15) 4222-4235, 2008.
- [6] Liou, J. Y., Sung, J. C., Electrostatic stress analysis of an anisotropic piezoelectric half-plane under surface electromechanical loading. *International Journal of Solids and Structures* 45, 3219–3237, 2008.
- [7] Bardzohas, D. I., Filshtinsky, M. L., Filshtinsky, L. A., *Mathematical Methods in Electro – Magneto – Elasticity*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [8] Akbarov, S. D., On the dynamical axisymmetric stress field in a finite pre-stretched bilayered slab resting on a rigid foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 294, 221-237, 2006.
- [9] Akbarov, S. D., The influence of the third order elastic constants on the dynamical interface stress field in a half-space covered with a pre-stretched layer. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 41 (3), 417-425, 2006.
- [10] Akbarov, S. D., Dynamical (time-harmonic) axisymmetric interface stress field in the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stretched layer. *International Journal of Engineering Science*. 44 (1-2), 93 – 112, 2006.
- [11] Akbarov, S. D., Frequency response of the axisymmetrically finite pre-stretched slab from incompressible functionally graded material on a rigid foundation. *International Journal of Engineering Science*. 44 (8-9), 484 – 500, 2006.
- [12] Yang, J., *An Introduction to the theory of Piezoelectricity*, Springer, 2005.
- [13] Akbarov, S. D., Emiroglu, I., Tasci, F., The Lamb’s problem for a half-space covered with the pre-stretched layer. *International Journal of Mechanical Science*, 47, 1326-1349, 2005.
- [14] Kuang, Z.-B., Zhou, Z.-D., Zhou, K.-L., Electroelastic analyses of a piezoelectric half-plane with finite surface electrodes. *International Journal of Engineering Science*, 42, 1603-1619, 2004.
- [15] Nowacki, J. P., Alshits, V. I., Radowicz, A., 2D electro-elastic fields in a piezoelectric layer-substrate structure, *International Journal of Engineering Science*, 40, 2057-2076, 2002.
- [16] Shul’ga, N. A. Bolkisev, A. M., *Vibration of Piezoelectric Bodies*. (in Russian), Naukova Dumka, Kyiv, 1999.
- [17] Parton, V. Z., Kudryavtsev, B.A., *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. Gordon & Breach, NY, 1988.
- [18] P. A. Martin, “Boundary integral equations for the scattering of elastic waves by elastic inclusions with thin interface layers”, *J. Nondestructive, Eval* 11, 167-174 (1992).



- [19] S. I. Rokhlin, Y. J. Wang, “Analyses of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids.” *J. Acoust. Soc. Am.* 89, 503-515 (1991).
- [20] F. Jin, Z. Wang, T. Wang, The Bleustain-Gulyayev (B-G) wave in piezoelectric layered half-space. *International Journal of Engineering Science* 39 (2001) 1271-1285.
- [21] S.D. Akbarov, C. Guler, On the stress field in a half-plane covered by the prestretched layer under the action of arbitrary linearly located time-harmonic forces. *Applied Mathematical Modelling* 31 (2007) 2375-2390.
- [22] Akbarov, S. D., İlhan, N., Time-harmonic Lamb's problem for a system comprising a piezoelectric layer and piezoelectric half-plane. *Journal of Sound and Vibration*, 332 5375-5392, 2013.