



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

İNCE KİRİŞLERİN ELASTİK DAVRANIŞLARININ NİY VE RNİY YÖNTEMLERİ İLE İNCELEMESİ

B. Kanber, O. M. Tufik ve N. F. Doğan

Gaziantep Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep

ABSTRACT

In this study, the point interpolation method (PIM) and radial point interpolation method (RPIM) solutions of elastic thin beams are compared by using standard Gaussian integration and a nodal integration based on Taylor series expansion. The effects of integration schemes, support domain sizes and RPIM shape parameters on the convergency are also investigated. Nodal stiffness matrices are obtained using Bernoulli-Euler beam theory. A cantilever beam problem with concentrated load applied on one end is solved and the results are compared with finite element solutions in ANSYS.

ÖZET

Bu çalışmada, ince kirişlerin elastik davranışlarının incelenmesi, ağırsız yöntemlerden olan Noktasal İnterpolasyon (NİY) ve Radyal Noktasal İnterpolasyon (RNİY) yöntemleri ile gerçekleştirilmiştir. Her bir yöntemde, iki farklı integrasyon tekniği kullanılmıştır. Standard olarak kullanılan Gauss integrasyon tekniği, Taylor noktasal integrasyon tekniği ile karşılaştırılmış, NİY ve RNİY üzerine etkileri araştırılmıştır. Noktasal direngenlik matrisinin elde edilmesi, Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre gerçekleştirilmiştir. Farklı etki alanı büyüklükleri ve farklı RNİY şekil parametrelerinin çözümler üzerine etkileri ayrıca ele alınmıştır. Bir ankastre kiriş problemi, serbest uca tekil yük uygulanarak çözülmüştür. Elde edilen çözümler, ANSYS paket programı kullanılarak sonlu elemanlar yöntemiyle kıyaslanmıştır.

1.GİRİŞ

Klasik sonlu elemanlar yöntemlerinde [1,2] ve sonlu hacimler yöntemlerinde [3] problem alanı ağlara(elemanlara ya da hacimlere) ayrılarak çözüm yapılır. Ağırsız yöntemlerde [4,5,6] ise, isminden de anlaşılacağı üzere, önceden tanımlı bir ağ yapısı olmaksızın, cebirsel eşitlik sistemleri sınır koşulları ile belirtilmiş problem alanına dağıtılan düğüm noktaları kullanılarak oluşturulur ve çözüme ulaşılır.

Sonlu elemanlar yönteminin küçük deformasyon problemlerinde çok iyi sonuçlar verdiği bilinen bir gerçek olmasına karşın, büyük deformasyonların gerçekleştiği durumlarda, elemanlar çok fazla şekil değiştirebilmekte ve hata oranları yükselmektedir. Oluşan hata oranını azaltmak için ise yük tek seferde değil parça parça uygulanmakta, bunun sonucu olarak, işlem zamanı uzamaktadır. Ağırsız yöntemlerde çözüm düğüm noktaları üzerinde

yapıldığından, büyük deformasyon problemlerinde önemli avantajlar sağlamaktadır. Aynı zamanda, ağırsız yöntemler nokta dağılımında serbestlik imkânı sunduğu için, çözüm doğruluğunun geliştirilmesinde mükemmel bir esneklik sunmaktadır.

Bir sistemin toplam potansiyel enerjisi, birbiri üstüne gelmeyen integrasyon alanlarında yazılmış integrallerin toplamları şeklinde ifade edilebilir. Sabit eğilme direngenliğine sahip ince bir kirişin integrasyon alanındaki (Ω_Q) birim şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_{\Omega_Q} = EI_z \int_{\Omega_Q} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

2.NOKTASAL İNTERPOLASYON YÖNTEMİ (NİY)

Düğüm noktaları ile oluşturulmuş ve sınır koşulları ile belirlenmiş Ω problem alanında tanımlı bir $u(x)$ fonksiyonu ele alalım. $u(x)$ fonksiyonu, integrasyon noktası x_Q üzerinde [4] tarafından sunulan $B_i(x)$ temel fonksiyonu, a_i temel fonksiyonuna ait katsayılar ve n yerel destek alanındaki düğüm nokta sayısı olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{2n} B_i(x) a_i \quad (2)$$

Temel fonksiyonu olarak polinom kullanıldığında $u(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{2n} p_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (3)$$

Burada verilen $p_i(x)$ kartezyen koordinatlarda tanımlı terimleri, a_i temel fonksiyonun katsayı matrisidir. n destek alanındaki nokta sayısı olmak üzere, bir boyutta polinom temel fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^{2n-1}] \quad (4)$$

k düğüm noktasında (3) numaralı eşitlik aşağıdaki formatta ifade edilir:

$$\mathbf{u}^{sd} = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (5)$$

Genel \mathbf{u}^{sd} vektörü:

$$\mathbf{u}^{sd} = \{[w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, \dots, w_n, \theta_n]^T\} \quad (6)$$

ve bir boyutta moment matrisi \mathbf{P}_Q şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{P}_Q = \left[\mathbf{p}(x_1), \frac{d\mathbf{p}(x_1)}{dx}, \dots, \mathbf{p}(x_n), \frac{d\mathbf{p}(x_n)}{dx} \right]^T \quad (7)$$

Eğer, moment matrisin tersi varsa, (5) numaralı eşitliği kullanarak katsayı matrisi:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (8)$$

Son olarak (3) numaralı eşitlik:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{2n} p_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{p}^T \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (9)$$

H , NİY şekil fonksiyonu olmak üzere:

$$H = \mathbf{p}^T \mathbf{P}_Q^{-1} = [H_1(x) \ H_2(x) \ \dots \ H_{2n}(x)] \quad (10)$$

3. RADYAL NOKTASAL İNTERPOLASYON YÖNTEMİ (RNİY)

Polinom temelli NİY, kolay kullanımı ve yüksek doğruluk avantajları olmasına rağmen, önemli bir dezavantaja sahiptir. Farklı düğüm noktalarının birbirine çok yakın koordinatlarda olması ya da çakışık olması durumunda moment matrisi \mathbf{P}_Q , tekil çıkabilmekte ve yöntem sonuçsuz kalmaktadır. Bu dezavantajdan kaçınmak için, radyal temel fonksiyonları kullanılabilir. Ve alan değişkeni, radyal temel fonksiyonu kullanılarak hesaplanır.

Böylece, (2) numaralı eşitlik; \mathbf{a} , radyal temel fonksiyonun katsayı matrisi; \mathbf{R} , radyal temel fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılır [4]:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2n} R_i(x) a_i = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} \quad (11)$$

r değeri, üzerinde hesap yapılan düğüm noktası x ile destek alanındaki diğer düğüm noktası x_i arasındaki uzaklık olduğu üzere, vektörel olarak temel fonksiyonu \mathbf{R} aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{R}^T = [R_1(r_1)^0, R_2(r_2)^1, R_3(r_3)^2, \dots, R_n(r_n)^{2n-1}] \quad (12)$$

Literatürde birçok radyal temel fonksiyonu bulunmakla birlikte, bu çalışmada ikinci dereceden radyal temel fonksiyonu (MQ RTF) $((r_i^2 + (\alpha_c * d_c)^2)^q)$ kullanılmıştır. Burada bulunan r_i incelenen düğüm noktası ile komşu düğüm noktası arasındaki mesafeyi vermektedir. MQ RTF 'nun yapısında, şekil fonksiyonun kontrol eden α_c ve q olmak üzere iki şekil parametresi bulunmaktadır. Bu parametrelerin alabileceği değerler [7] numaralı kaynaktan yapılan çalışmada sunulmuştur. Fonksiyonda bulunan d_c , problem alanındaki noktasal yerleşimi ifade eder. Eğer, düğüm noktaları eşit aralıklarla dağıtılmışsa, bu değer iki düğüm noktasındaki mesafeye eşit olur. Diğer durumlarda, düğüm noktaları arasındaki ortalama mesafeye eşit olur. Bu parametreler, çözümün hassasiyetini artırma amaçlı değiştirilebilir.

Q düğüm noktasında yapılan interpolasyon neticesinde (11) numaralı eşitlik aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x_Q) = \sum_{i=1}^{2n} a_i R_i(x_Q) \quad (13)$$

Yukarıdaki eşitlik, vektörel formda genel \mathbf{u}^{sd} vektörü kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{u}^{sd} = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \quad (14)$$

(14) numaralı eşitlikte bulunan \mathbf{R}_Q radyal temel fonksiyonunun moment matrisidir.

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

\mathbf{R}_Q moment matrisinin tersi olduğundan, katsayı matrisi \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (16)$$

Katsayı matrisi \mathbf{a} , (11) numaralı eşitlikte kullanıldığında:

$$u(x, x_Q) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (17)$$

Son olarak, RNİY şekil fonksiyonu H aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$H(x) = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{R}_Q^{-1} = [H_1(x) \ H_2(x) \ \dots \ H_{2n}(x)] \quad (18)$$

4. İNTEGRASYON YÖNTEMLERİ

Destek alanındaki \mathbf{u} matrisi, (17) ve (18) ya da (9) ve (10) numaralı eşitlikler kullanıldığında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{H}^T \mathbf{u}^{sd} \quad (19)$$

Deplasman matrisi, (1) numaralı denklemde yazıldığında:

$$U = EI_z (\mathbf{u}^{sd})^T \int \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{H}^T \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{H} \mathbf{u}^{sd} dx \quad (20)$$

Noktasal direngenlik matrisi, k_{ij} :

$$k_{ij} = EI_z \int \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} \right) dx \quad (21)$$

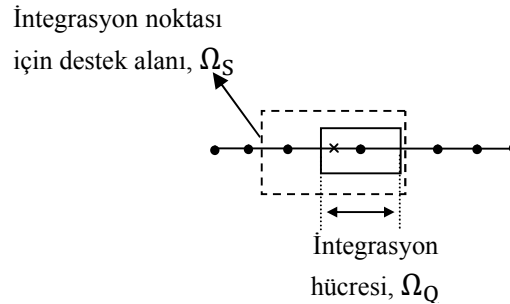
burada i ve j sayacıları 1'den n 'ye kadar değişir. n destek alanındaki düğüm noktası sayısını gösterir. Global direngenlik matrisi için birleştirme işlemi (assembling procedure), sınır koşulları uygulaması ve diğer ayrıntılar [8] numaralı kaynakta bulunabilir.

4.1. Gauss İntegrasyon Yöntemi

(21) numaralı denklemi çözmek için iki farklı integrasyon şeması kullanılmıştır. Bunlardan ilki standart Gauss integrasyonudur. Bu yöntemde, Şekil 1'de gösterilen integrasyon hücreleri kullanılır. Ve şekil fonksiyonları, destek alanı içinde her bir düğüm noktası için hesaplanır. Noktasal direngenlik matrisi \mathbf{k} aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{k} = EI * (Jac) * \left[(w_1) \left([\mathbf{H}]_{q1}^T * [\mathbf{H}]_{q1} \right) + (w_2) \left([\mathbf{H}]_{q2}^T * [\mathbf{H}]_{q2} \right) \right] \quad (22)$$

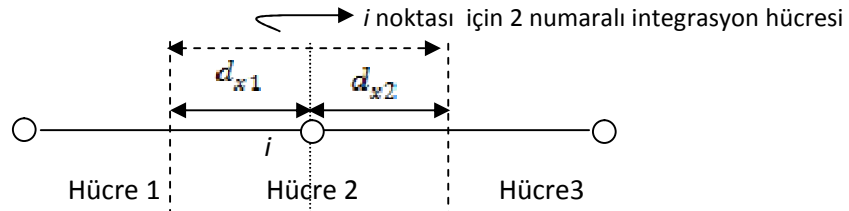
Burada Jac , Jacobian matrisi; w_1, w_2 ağırlık fonksiyonlarını; $q1, q2$ integrasyon noktalarını; H ise NİY ya da RNİY ile hesaplanan şekil fonksiyonlarını belirtmektedir.



Şekil 1. Gauss integrasyon yöntemi için integrasyon hücresi ve integrasyon noktası için destek alanının gösterimi.

4.2. Noktasal İntegrasyon Yöntemi

Diğer integrasyon yöntemi [9] tarafından öne sürülen noktasal integrasyon yöntemidir. Bu yöntemde, noktasal direngenlik matrisleri Taylor açılımı kullanılarak yazılır. Böylece noktasal direngenlik matrisleri şu şekilde ifade edilebilir:



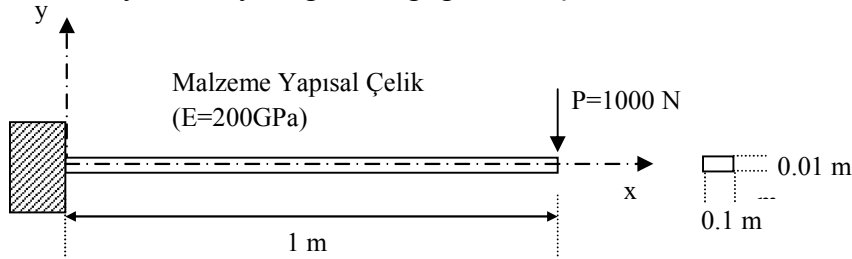
Şekil 2. Noktasal integrasyon yöntemi integrasyon hücresi gösterimi.

$$k = EI * \left\{ \begin{aligned} & ([\mathbf{H}]_{x_0}^T * [\mathbf{H}]_{x_0})(d_{x_2} - d_{x_1}) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} ([\mathbf{H}]_{x_0}^T * [\mathbf{H}]_{x_0})(d_{x_2}^2 - d_{x_1}^2) \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ([\mathbf{H}]_{x_0}^T * [\mathbf{H}]_{x_0})(d_{x_2}^3 - d_{x_1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

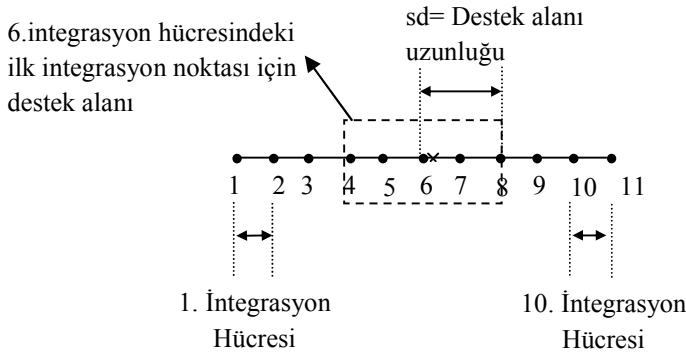
5. ÇÖZÜMLER VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Şekil 3’ de gösterilen ankastre kiriş problemi yukarıda belirtilen integrasyon yöntemleri ile, Şekil 4’ de verilen model ve farklı destek alanı uzunlukları kullanılarak çözülmüştür. Şekil 5’ de görüldüğü gibi, integrasyon yöntemi olarak Gauss kullanıldığında, destek alanı büyüklüğü 0.3 olana kadar, ki bu büyüklük düğüm noktası sayısının 7 olma durumudur, deplasman sonuçları analitik ve ANSYS sonuçlarıyla iyi bir uyum içindedir. Ancak destek alanı büyüklüğü 0.4 ve 0.5 için sonuçlar ciddi hatalar içermektedir. İntegrasyon yöntemi olarak Noktasal integrasyon yöntemi kullanıldığında, Şekil 6’da görüldüğü gibi, destek alanı büyüklüğü sonuçları çok fazla etkilememektedir. RNİY kullanıldığında Şekil 5 ve Şekil 6 ‘da ki durumlar, Şekil 7 ve Şekil 8’de aynı şekilde gözlemlenmiştir.

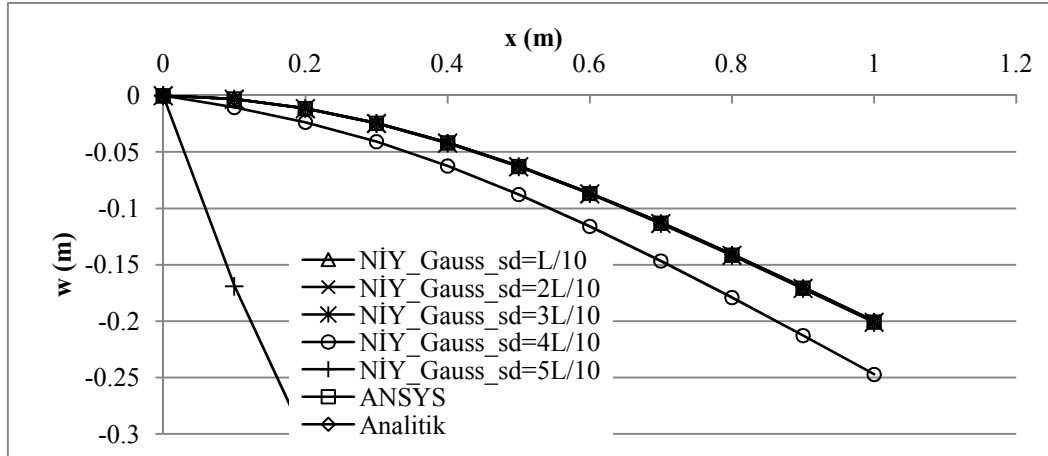
Şekil parametrelerinin (α_c ve q) RNİY üzerine etkileri incelendiğinde, α_c ’nin 1 olduğu durumda ve Gauss integrasyon yöntemi kullanıldığında (Şekil 9) bir sapma gözlenmiş; diğer bütün durumlarda Şekil 10, Şekil 11 ve Şekil 12’ de görüldüğü üzere sonuçların ANSYS ve analitik çözümlerle büyük bir uyum gösterdiği gözlenmiştir.



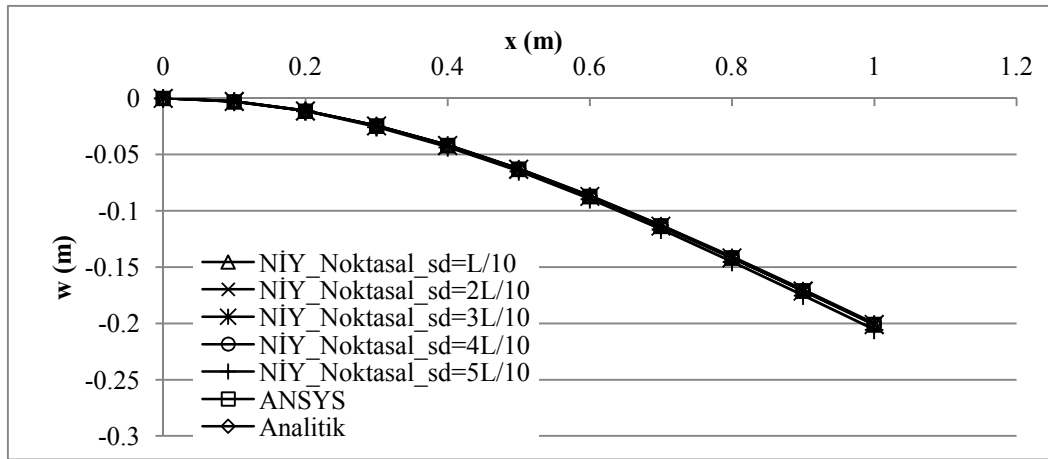
Şekil 3. Ankastre kiriş probleminin boyut ve malzeme bilgileri.



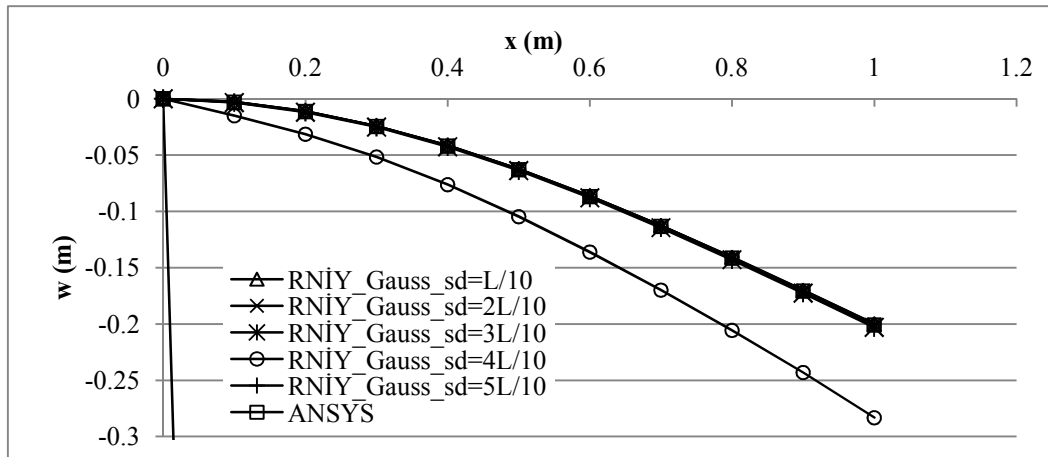
Şekil 4. Ankastre kiriş probleminin Gauss yöntemi ile çözümü için düzgün dağıtılmış 11 düğüm noktalı ve 10 integrasyon hücreli NİY ve RNİY modeli.



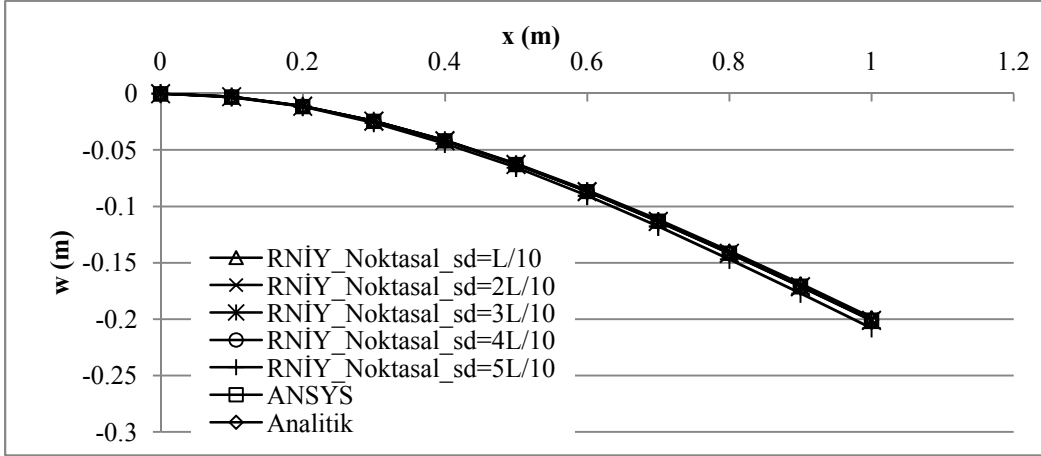
Şekil 5. Farklı destek alanı uzunluklarında, NİY ile Gauss integrasyonu kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



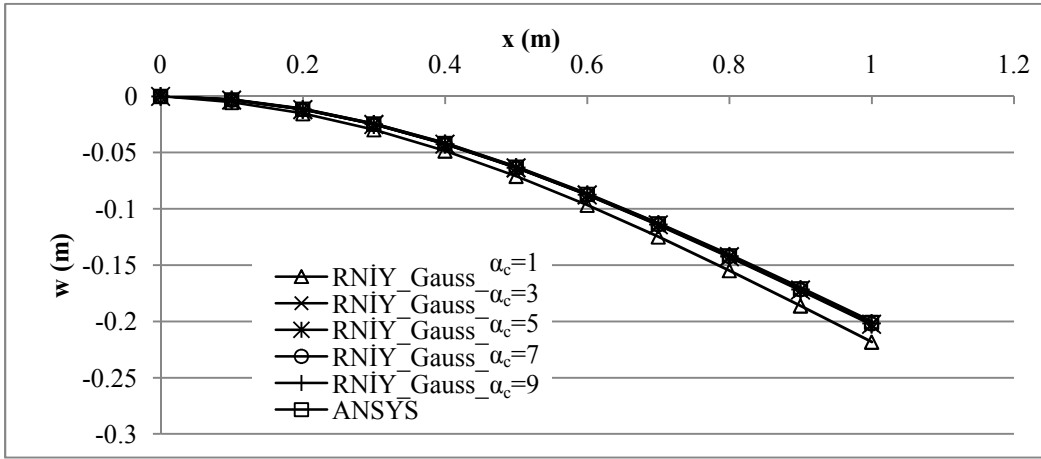
Şekil 6. Farklı destek alanı uzunluklarında, NİY ile noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



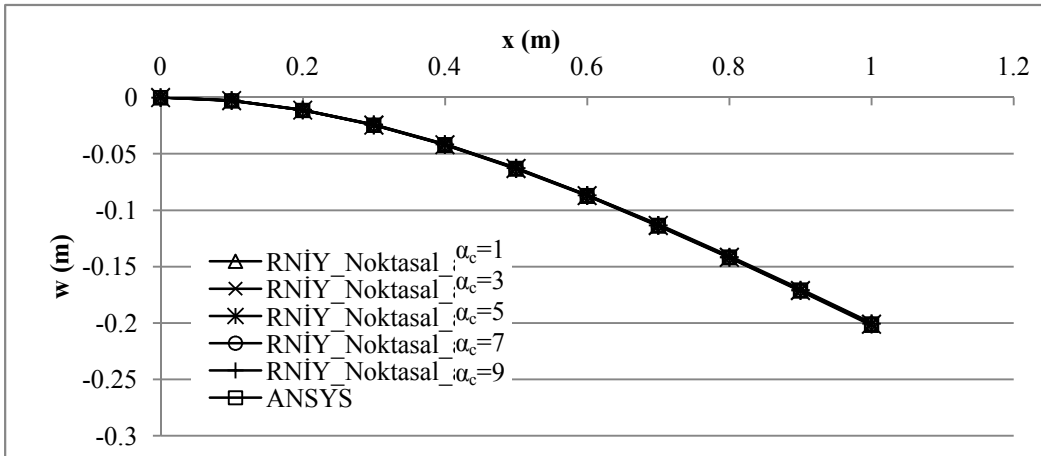
Şekil 7. Farklı destek alanı uzunluklarında, RNİY ile Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



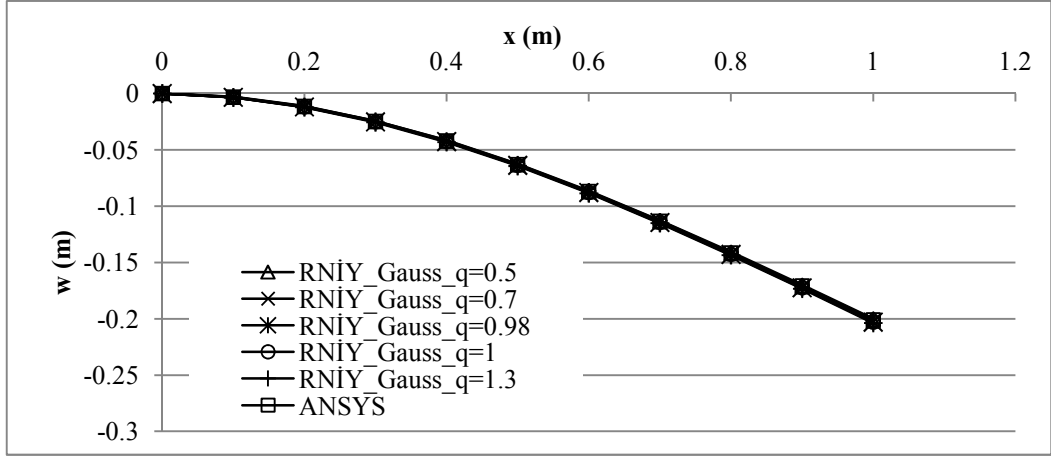
Şekil 8. Farklı destek alanı uzunluklarında, RNİY ile noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



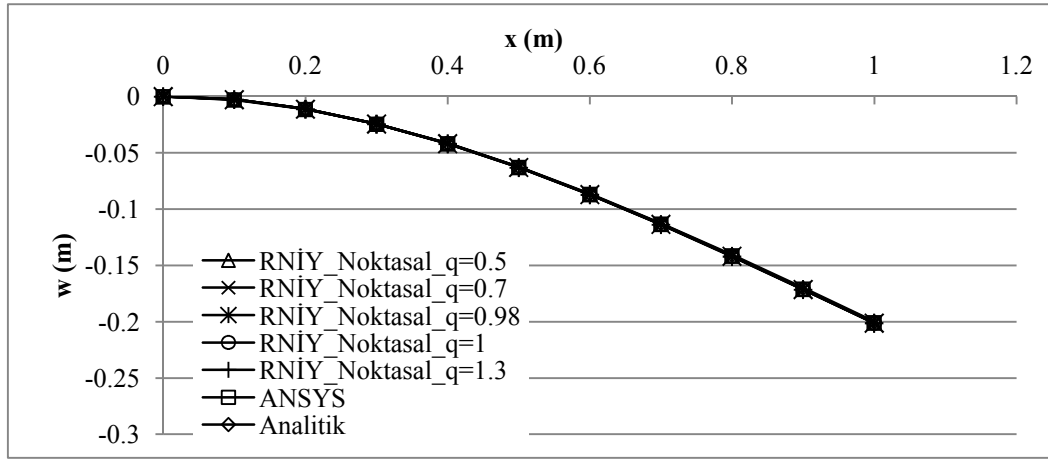
Şekil 9. Farklı α_c şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü $3L/10$ için RNİY ile Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması



Şekil 10. Farklı α_c şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü $3L/10$ için RNİY ile noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması



Şekil 11. Farklı q şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü $3L/10$ için RNİY ile Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması



Şekil 12. Farklı q şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü $3L/10$ için RNİY ile noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması

SONUÇLAR

Çalışma sonunda, destek alanı büyüklüğüne bağlı olarak düğüm noktası sayısı artışı belirli bir seviyeye kadar çözüm doğruluğunu arttırmaktadır. Yapılan çözümlerde destek alanı büyüklüğü $4L/10$ değerini aşınca ve bu durumda Gauss integrasyon yöntemi kullanıldığında, sonuçlar dikkate değer hatalar içermeye başlamaktadır. Bunun sebebi, destek alanı içerisindeki düğüm noktası sayısının $8'$ e ulaşmasıdır. Bu durum 2 boyutlu elastik çözüm için tavsiye edilen maksimum düğüm noktası sayısının yarısıdır [10]. Çünkü iki boyutlu problemde her düğüm noktasında deplasman serbestliği var iken, kiriş probleminde her düğüm noktasında deplasman ve eğim serbestliği vardır. Noktasal integrasyon yöntemi kullanıldığında bu problem ortadan kalkmaktadır ve daha yüksek doğrulukta sonuç vermektedir. Şekil parametrelerinin RNİY üzerine etkileri incelenmiş, Gauss integrasyon yöntemi kullanıldığında α_c parametresinin optimum değeri olan 3 yerine 1 kullanıldığında deplasman sonuçlarında sapma gözlemlenmiştir.

Literatürde bulunan RNİY temel fonksiyonu vektörü (\mathbf{R}^T) iyileştirilmiş ve çözüm doğruluğu artırılmıştır. \mathbf{R}^T düzeni, NİY temel fonksiyonunda kullanıldığında, NİY moment matrisi (\mathbf{P}_0) tekillik durumu ortadan kalkmıştır. Bu durumda hesaplama süresi bir miktar artış göstermiştir.

Geliştirdiğimiz MATLAB kaynak kodları sayesinde, hangi integrasyon yöntemi kullanılırsa kullanılsın ve düğüm noktası sayısı ne olursa olsun yüksek hızda çözümler gerçekleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Liu, G. R. ve Quek, S. S., “The Finite Element Method: A Practical Course”, Butterworth Heinemann, Oxford-2002.
- [2] Hughes, T. J. R., “The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ-1987.
- [3] LeVeque, R. J., “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems”, Cambridge University Press, New York-2002.
- [4] Liu, G. R. ,”Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method”, CRC Press, New York-2002.
- [5] Gu, Y. T. and Liu, G. R., “A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams”, 5516-5518, 2000.
- [6] Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Gu, L.,”Element-free Galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 229-256,1994.
- [7] Wang, J. G. and Liu, G.R. ,”On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2D meshless methods”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191, 2611-2630,2002.
- [8] Liu G.R. ve Gu Y.T., “An introduction to Meshfree methods and their programming”, Springer, Berlin-2005.
- [9] Liu, G. R., Zhang, G. Y., Wang Y. Y., Zhong, Z. H., Li, G. Y., and Han, X., “A Nodal Integration Technique for Meshfree Radial Point Interpolation Method (NI-RPIM)”, Journal of Solid and Structures, vol. 44, 3845-3847, 2007.
- [10] Wang, J. G. ve Liu, G. R., “A point interpolation meshless method based on radial basis functions”, Int. J. Numer. Meth. Engng., 54, 1623-1648, 2002.