



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

EŞYÖNSÜZ MİKRO YAPIYA SAHİP KALP DOKUSUNDAKİ BÜYÜMENİN MODELLENMESİ ÜZERİNE

Serdar Göktepe¹

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 06800, Ankara

ABSTRACT

This work is concerned with the generalized kinematic framework for finite growth in cardiac tissue. For this purpose, the deformation gradient is multiplicatively decomposed into an elastic part and a growth part. This naturally brings about an incompatible intermediate growth configuration. While the direction of growth is dictated by the architecture of the cardiac tissue, the amount of growth is determined by a scalar growth field whose evolution is governed by a corresponding disease-dependent growth criterion function and its bounded coefficient. Once the growth tensor is known, the elastic part of the deformation gradient, which directly enters the orthotropic energy storage function, can be readily obtained and the relevant stress tensor is determined through the Doyle-Ericksen formula.

Keywords: Biomechanics, Cardiac Mechanics, Growth, Hypertrophy

ÖZ

Bu çalışma eşyönsüz mikro yapıya sahip kalp dokusunda meydana gelen fizyolojik ve patolojik büyümenin modellenmesi için geliştirilen genel bir kinematik yaklaşımı konu almaktadır. Bu amaçla, şekil değiştirme gradyanı çarpımsal olarak elastik şekil değiştirme gradyanı ve büyüme tensörlerine parçalanmıştır. Büyümenin yönü kalp dokusunun mikro yapısı tarafından kontrol edilirken, büyümenin miktarı skalar büyüme değişkeni ile belirlenmektedir. Bu büyüme değişkeninin zamanla değişimini de hipertrofinin tipine göre değişen büyüme kriteri ve onun sınırlandırılmış çarpanı tarafından kontrol edilmektedir. Büyüme tensörü elde edildikten sonra şekil değiştirme gradyanının elastik kısmı hesaplanır. Bu tensör cinsinden ifade edilmiş olan serbest enerji fonksiyonundan Doyle-Ericksen formülü yardımı ile Kirchhoff gerilme tensörü elde edilir.

Anahtar Kelimeler: Biyomekanik, Kalp Mekaniği, Büyüme, Hipertrofi

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı eşyönsüz mikro yapıya sahip kalp dokusunda meydana gelen ve farklı mekanizmalarla tetiklenen eksentrik ve konsantrik büyümenin modellenmesi için genel bir kinematik yaklaşım geliştirmek ve geliştirilen bu kinematik denklemler için bünye

¹ E-posta: sgoktepe@metu.edu.tr

denklemleri oluşturmaktır. Önerilen kinematik yaklaşımda; ilk olarak kristal malzemelerin elastoplastik davranışının modellenmesinde kullanılan (bkz. [6], [8]) ve sonra Rodriguez ve diğerleri [9] tarafından biyomalzemelerde büyümenin modellenmesinde kullanılan şekil değiştirme gradyanı çarpımsal olarak elastik şekil değiştirme gradyanı ve büyüme tensörlerine parçalanması yöntemi izlenmiştir. Bu parçalanmanın doğal sonucu olarak uyumsuz ara büyüme konumu ortaya çıkmaktadır. Bu yaklaşım atardamarların çeperlerindeki büyümenin modellenmesinde [5], [7] ve kalp dokusundaki büyümenin modellenmesinde de [2], [3] kullanılmıştır.

2. EŞYÖNSÜZ MİKRO YAPILI MALZEMELERDE BÜYÜMENİN KİNEMATİĞİ

Bu bölümde eşyönsüz mikro yapıya sahip malzemelerdeki büyümenin kinematik olarak açıklanması için gerekli kavramlar tanımlanacak, büyüme problemi geometrik olarak ele alınacaktır.

2.1 Geometri

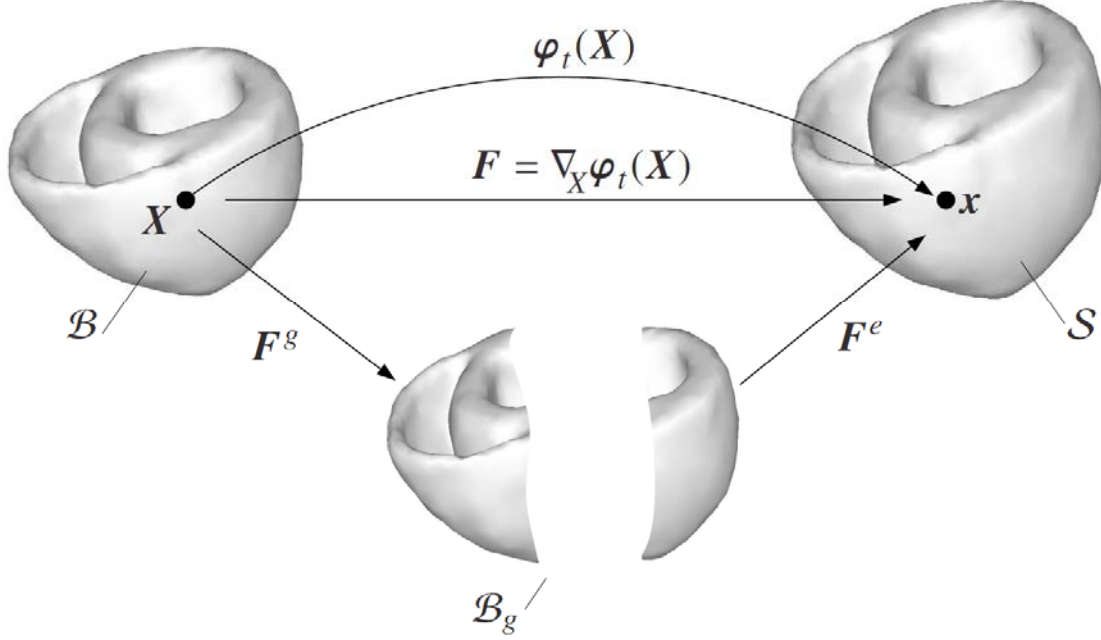
Varsayalım ki $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^3$ doğrusal olmayan şekil değiştirmeler gösterebilen katı bir cismin Öklit uzayındaki referans (Lagrange) konumunu ve $S \subset \mathcal{R}^3$ de aynı cismin t anındaki güncel (Euler) konumunu gösterebilir. Referans konumundaki malzeme noktalarının koordinatları $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$; bu noktaların t anındaki uzaysal koordinatlarına $\mathbf{x} \in S$, doğrusal olmayan şekil değiştirme fonksiyonu ile $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) : \mathcal{B} \rightarrow S$ eşlenirler, Şekil 1. Buna göre şekil değiştirme (deformasyon) gradyanı $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) : T_{\mathbf{X}}\mathcal{B} \rightarrow T_{\mathbf{x}}S$ iki konumun tanjant uzayları arasındaki eşlemeyi yapan tanjant fonksiyonu olarak da düşünülebilir. Gradyan operatörü $\nabla_{\mathbf{X}}[\cdot]$ malzeme koordinatlarına \mathbf{X} göre konumsal türevleri göstermektedir. Diğer yandan, şekil değiştirme gradyanının determinantı $J = \det(\mathbf{F}) > 0$ ortamın referans ve güncel konumları arasındaki hacim eşleme fonksiyonu olarak görev alır. Bunlara ek olarak, güncel manifold S yerel olarak \mathbf{x} noktasının $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ komşuluğunda uzaysal metrik tensörüne \mathbf{g} sahiptir. Uzaysal metrik tensör \mathbf{g} ; genleme, kayma, temel invariantlar gibi şekil değiştirme büyüklüklerinin güncel (Euler) konumunda hesaplanmasında kullanılacaktır.

2.2 Kalbin Mikro Yapısı

Kalbin mekanik davranışını birincil olarak kontrol eden kalp kasının (miyokard) mikro yapısı konumsal olarak değişkenlik gösteren tabaka benzeri düzlemler şeklinde düzenlenmiş kas liflerinden (miyofiber) oluşur, Şekil 2. Kalp dokusunun sahip olduğu bu eşyönsüz mikro yapı nedeniyle, kalp kası ortotropik bir biyomalzeme olarak düşünülmektedir. Yöresel (lokal) olarak bu ortotropik malzeme, birbirine dik olan $\mathbf{f}_0 \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ ve $\mathbf{s}_0 \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ birim vektörleri ile tanımlanır. Şematik olarak Şekil 2'de de gösterildiği gibi $\mathbf{f}_0 \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ ve $\mathbf{s}_0 \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$ birim vektörleri; sırasıyla, kas lifi ve bunların içinde düzenli bir biçimde yer aldığı tabakaların yönlerini temsil etmektedir.

Bunu takip eden kısımda, kalpte meydana gelen fizyolojik ve patolojik (hipertrofi) büyümeleri etkin bir şekilde modellemek için kompakt bir kinematik formülasyon sunulacaktır. Patolojik durumlar kalbin eksentrik (dilatasyon) ve konsantrik (çeper kalınlaşması) biçimde büyümesini anlatırken, fizyolojik durum kalbin eşyönlü büyümesini temsil eder. Tamamen matematiksel olarak, kalbin bu farklı büyüme şekilleri (2) denkleminde tanımlanan büyüme tensörü \mathbf{F}^g ve (17) denkleminde verilen büyüme kriterinin fonksiyonel bağımlılığı ile birbirinden ayrılırlar. Bu üç farklı kalp büyüme olayını aynı kompakt kinematik

çerçevede verebilmek için birbirine dik olan $\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0 \in T_X \mathcal{B}$ birim vektörlerini kullanacağız. Büyümenin tipine göre bu birim vektörler, \mathbf{f}_0 ve \mathbf{s}_0 birim vektörleri ile ayrı ayrı eşleneceklerdir. Buna göre; eksentrik büyümede eşleme $\mathbf{m}_0 = \mathbf{f}_0$ ve $\mathbf{n}_0 = \mathbf{s}_0$ olurken, konsantrik büyümede $\mathbf{m}_0 = \mathbf{s}_0$ ve $\mathbf{n}_0 = \mathbf{f}_0$ şeklinde olacaktır



Şekil 1: Kalbin üç boyutlu Öklit uzayındaki \mathcal{R}^3 , t anındaki hareketi için tanımlı doğrusal olmayan şekil değiştirme fonksiyonu $\varphi_t(\mathbf{X})$ ve şekil değiştirme gradyanının $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X})$ gösterimi. Yer değiştirme gradyanı \mathbf{F} 'nin çarpımsal olarak elastik deformasyon gradyanı \mathbf{F}^e ve büyüme tensörü \mathbf{F}^g olmak üzere iki kısma parçalanması ile imgesel ve uyumsuz \mathcal{B}_g ara vektör uzayının oluşması.

2.3 Büyümenin Kinematığı

Kalbin büyük şekil değiştirmeler gösteren büyümesinin modellenmesi için önerilen kinematik yaklaşımda yer değiştirme gradyanı \mathbf{F} çarpımsal olarak elastik deformasyon gradyanı \mathbf{F}^e ve büyüme tensörüne \mathbf{F}^g olmak üzere iki kısma parçalanır.

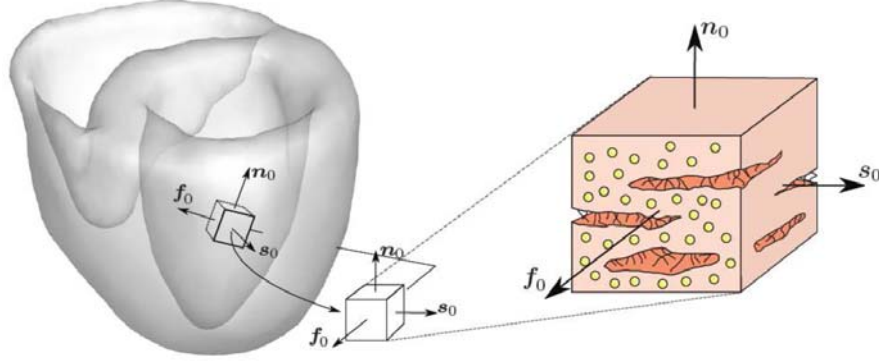
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^g \quad (1)$$

Doğrusal olmayan plastisite teorisinin çarpımsal kinematığında olduğu gibi, (1) denklemindeki parçalanma imgesel ve uyumsuz bir ara vektör uzayının varlığını işaret eder. Ancak, toplam şekil değiştirme gradyanının \mathbf{F} aksine, ne \mathbf{F}^e ne de \mathbf{F}^g herhangi bir doğrusal olmayan şekil değiştirme fonksiyonunun gradyanı ile ilişkilidir. Bu çalışmada önerilen formulasyonda büyüme tensörü için aşağıdaki gösterimi kullanacağız.

$$\mathbf{F}^g = \alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \quad (2)$$

Burada $\alpha(\nu^g)$ ve $\beta(\nu^g)$ çarpanları büyüme değişkenine ν^g bağlı skalar fonksiyonlardır. Yukarıda da belirtildiği üzere, genellenmiş birim vektör \mathbf{m}_0 kalbin büyüme tipine bağlı olarak

kalbin ortotropik mikro yapısını yansıtan f_0 , s_0 birim vektörlerinden birine karşılık gelmektedir. Büyüme tensörünün tersini alırsak



Şekil 2: Kalp kasının ortotropik mikro yapısı. Birbirine dik birim vektörler f_0 ve s_0 ; sırasıyla, kas lifi ve bunların içinde düzenlendiği tabakaların yönlerini referans konumda göstermektedirler. Bu iki birim vektöre dik olan üçüncü yön n_0 bu vektörlerin normallenmiş vektör çarpımı $n_0 = (f_0 \times s_0) / |f_0 \times s_0|$ ile elde edilir.

$$\mathbf{F}^{\mathbf{g}^{-1}} = \alpha^{-1} \mathbf{I} + \beta \alpha^{-2} / (1 + \beta \alpha^{-1}) \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \quad (3)$$

ifadesini elde ederiz. Buna göre elastik deformasyon gradyanı da aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{F}^e = \alpha^{-1} \mathbf{F} + \beta \alpha^{-2} / (1 + \beta \alpha^{-1}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}_0 \quad (4)$$

Bu denklemdeki \mathbf{m} vektörü $\mathbf{m} = \mathbf{F} \mathbf{m}_0$ şeklinde tanımlanmakta, benzer şekilde elastik olarak şekil değiştirmiş yönler

$$\mathbf{m}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{m}_0 = (\alpha + \beta)^{-1} \mathbf{m} \quad \text{ve} \quad \mathbf{n}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{n}_0 = \alpha^{-1} \mathbf{n} \quad (5)$$

olarak verilmektedir. Burada \mathbf{n} vektörü de $\mathbf{n} = \mathbf{F} \mathbf{n}_0$ olarak tanımlanmaktadır. Malzemenin mikro yapısını temsil eden vektörlerin şekil değiştirmiş yönlerini tanımladıktan sonra şekil değiştirmiş yapısal tensörler ve elastik yapısal tensörler; sırasıyla,

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{K} = \text{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}), \quad (6)$$

ve

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{m}^e \otimes \mathbf{m}^e, \quad \mathbf{N}^e = \mathbf{n}^e \otimes \mathbf{n}^e, \quad \text{ve} \quad \mathbf{K}^e = \text{sym}(\mathbf{m}^e \otimes \mathbf{n}^e), \quad (7)$$

ifadeleri ile tanımlanmaktadır. Buradaki simetri operatörü $\text{sym}(\cdot) = 0.5 (\cdot + [\cdot]^T)$ tensör değişkenini kendisinin simetrik kısmına eşler. Yukarıdaki tanımlar (6,7) ışığında, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\mathbf{M}^e = (\alpha + \beta)^{-2} \mathbf{M}, \quad \mathbf{N}^e = \alpha^{-2} \mathbf{N} \quad \text{ve} \quad \mathbf{K}^e = (\alpha^2 + \alpha \beta)^{-1} \mathbf{K} \quad (8)$$

Buna göre elastik Finger şekil değiştirme tensörü

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^{eT} = \alpha^{-2} (\mathbf{b} - \mathbf{M}) + \mathbf{M}^e \quad (9)$$

olarak elde edilir. Elastik Finger şekil değiştirme tensörü ve elastik yapısal tensörler (7) elde edildikten sonra eldeki ortotropik malzemenin Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun değişkenlerini oluşturacak temel elastik invariantslar

$$I_1 = \mathbf{g} : \mathbf{b}^e, \quad J^e = \det(\mathbf{F}^e), \quad I_{4m} = \mathbf{g} : \mathbf{m}^e, \quad I_{4n} = \mathbf{g} : \mathbf{n}^e \quad \text{ve} \quad I_{4k} = \mathbf{g} : \mathbf{K}^e \quad (10)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada elastik Jakobyen $J^e = J J^{g-1}$ ve büyüme Jakobyeni $J^g = \det(\mathbf{F}^g) = \alpha^2 (\alpha + \beta)$ ifadeleri ile tanımlıdır.

3. BÜNYE DENKLEMLERİ

Kalp dokusunun sıkıştırılabilirliğini ve bundan da daha önemli olarak kalbin büyümesi sırasındaki hacim değişimlerini dikkate alabilmek için Holzapfel ve Ogden [4] tarafından, tamamen sıkıştırılmaz ortotropik malzemeler için geliştirilmiş olan modeli genişleteceğiz. Bunun için toplamsal olarak; tamamen hacimsel ve eşyönlü U ve eşyönsüz Ψ olarak iki kısma ayrılmış, aşağıdaki denklemde verilen serbest enerji fonksiyonunu kullanacağız.

$$W = U(J^e) + \Psi(I_1, I_{4m}, I_{4n}, I_{4k}) \quad (11)$$

Burada hacimsel kısım sadece elastik şekil değiştirme gradyanının determinantına J^e bağlı iken ikinci kısım hem izotropik hem de anizotropik energy tutma mekanizmalarını (10) denkleminde verilen invariantslar yardımı ile bünyesinde barındırır. Serbest enerji fonksiyonunun hacimsel kısmı

$$U(J^e) = \kappa (J^e - \ln(J^e) - 1) \quad (12)$$

denklemini ile tanımlı olsun. Burada κ hacimsel modülü göstermektedir. Serbest enerji fonksiyonunun eşyönsüz Ψ kısmı [4] ise

$$\Psi(I_1, I_{4m}, I_{4n}, I_{4k}) = (a/2b) \exp[b(I_1 - 3)] + (a_m/2b_m) \{ \exp[b_m (I_{4m} - 1)^2] - 1 \} \\ + (a_n/2b_n) \{ \exp[b_n (I_{4n} - 1)^2] - 1 \} + (a_k/2b_k) \{ \exp[b_k (I_{4k})^2] - 1 \} \quad (13)$$

fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Bu kısım, hacim modülüne ek olarak sekiz malzeme parametresi $a, b, a_m, b_m, a_n, b_n, a_k, b_k$ içermektedir. Euler konumunda, Kirchhoff gerilme tensörü Doyle-Ericksen formülü [1] ile elde edilir.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_g W = \boldsymbol{\tau}_u + \boldsymbol{\tau}_i \quad \text{burada} \quad \boldsymbol{\tau}_u = 2\partial_g W = J^e p \mathbf{g}^{-1} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{\tau}_i = 2\partial_g \Psi \quad (14)$$

Eldeki model (13) için Kirchhoff gerilme tensörünün eşyönsüz kısmı

$$\boldsymbol{\tau}_i = 2\Psi_1 \mathbf{b}^e + 2\Psi_{4m} \mathbf{M}^e + 2\Psi_{4n} \mathbf{N}^e + 2\Psi_{4k} \mathbf{K}^e \quad (15)$$

halini alır. Buradaki şekil değiştirmeye bağlı olan çarpanlar $\Psi_1, \Psi_{4m}, \Psi_{4n}$ ve Ψ_{4k} enerji denklemini (13) ile tutarlı şekilde, invariantslar cinsinden

$$\Psi_1 = \partial\Psi/\partial I_1 = (a/2) \exp[b(I_1 - 3)], \\ \Psi_{4m} = \partial\Psi/\partial I_{4m} = a_m (I_{4m} - 1) \exp[b_m (I_{4m} - 1)^2], \\ \Psi_{4n} = \partial\Psi/\partial I_{4n} = a_n (I_{4n} - 1) \exp[b_n (I_{4n} - 1)^2], \\ \Psi_{4k} = \partial\Psi/\partial I_{4k} = a_k I_{4k} \exp[b_k (I_{4k})^2] \quad (16)$$

şeklinde ifade edilmektedirler. Yöresel gerilim durumunun (14) hesabı, iç alan olarak modele giren skalar büyüme değişkeninin v^g değerinin bilinmesini gerektirir. Bunun için

$$dv^g/dt = k(v^g) \phi \quad (17)$$

bünye denklemini; skalar büyüme değişkeninin v^g zamana bağlı değişimini tanımlamaktadır.

Buradaki $k(\nu^s)$ fonksiyonu

$$k(\nu^s) = \tau^{-1} [(\nu_{\max} - \nu^s) / (\nu_{\max} - 1)]^Y \quad (18)$$

büyümenin sınırlılığını sağlamakta ve büyümenin hızını kontrol etmekte iken, diğer fonksiyon ϕ büyümenin tetiklenmesi kriterini belirlemektedir. Buna göre, büyüme sadece $\phi > 0$ durumu için artmaktadır. Büyüme kriteri ϕ , farklı fizyolojik ve patolojik, şartlar nedeni ile ortaya çıkan kalbin farklı büyüme tiplerini modellemede anahtar rol oynar. Sözelimi, kalp çeperinin kalınlaşması kan basıncının yüksek olması ile açıklanmaktadır. Bu nedenle, konsantrik büyüme için büyüme kriteri gerilme tensörünün fonksiyonu $\phi(\boldsymbol{\tau})$ olarak modellenenir. Buna karşılık kalbin aşırı genleşmesi sonucu ortaya çıkan dilatasyon, elastik gerilimin $\lambda^e = (I_{4m})^{0.5}$ bir fonksiyonu olarak $\phi(\lambda^e)$ şeklinde modellenenir. Aşağıdaki denklemler bu durumlara birer örnek oluşturmaktadırlar.

$$\phi(\boldsymbol{\tau}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) - p^{crt} \quad \text{ve} \quad \phi(\lambda^e) = \lambda^e - \lambda^{crt}. \quad (19)$$

Kalpte meydana gelen üç farklı büyüme için farklı büyüme tensörü F^g ve büyüme kriteri ϕ ifadeleri Tablo 1’de özetlenmektedir.

Tablo 1: Fizyolojik ve patolojik kalp büyümesi için üç örnek

Büyüme Tipi	Büyüme Tensörü	Büyüme Kriteri
Fizyolojik (Sporcu Kalbi)	$F^g = \vartheta^g \mathbf{1}$	$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) - \pi^{crt}$
Eksentrik Hipertrofi	$F^g = \mathbf{1} + (\vartheta^g - 1)\mathbf{f}_0 \otimes \mathbf{f}_0$	$\tilde{\phi}(\lambda^e) = \lambda^e - \lambda^{crt}$
Konsantrik Hipertrofi	$F^g = \mathbf{1} + (\vartheta^g - 1)\mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{s}_0$	$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) - \pi^{crt}$

4. SONUÇ

Bu çalışmada eşyönsüz mikro yapıya sahip kalp dokusunda meydana gelen, farklı tetikleme mekanizmaları ile kontrol edilen eksentrik ve konsantrik büyümenin modellenmesi için genel bir kinematik yaklaşım geliştirilmiş, ilgili bünye denklemleri ile desteklenmiştir. Geliştirilen bu kinematik yaklaşım, modüler yapısı nedeni ile damarlar, deri, tümör vb. eşyönsüz mikro yapıya sahip diğer biyolojik dokularda meydana gelen büyüme olayını modellemek için de temel oluşturmaktadır. Özellikle sayısal benzetimler için geliştirilmesi gereken malzeme kodları düşünüldüğünde; eldeki modüler yapı ile bir doku için geliştirilen bir sayısal benzetim programı küçük değişikliklerle diğer dokulardaki büyümenin sayısal benzetiminde kullanılabilmesine olanak sağlayacaktır.

TEŞEKKÜR

Bu bildiriye sunulan çalışma AB 7. Çerçeve Programı (FP7/2007-2013) PCIG09-GA-2011-294161 kodlu ve "VHEART–Virtual Heart Models: Multi-Physics Approaches to Computational Cardiology" başlıklı proje ile desteklenmiştir. Yazar bu destek için teşekkür eder.

KAYNAKLAR

- [1] Doyle, T.C., Ericksen, J.L.: Nonlinear elasticity. In: H.L. Dryden, T. von Kármán (eds.) *Advances in Applied Mechanics*, vol. 4, pp. 53–116. Academic Press, New York (1956)
- [2] Göktepe, S., Abilez, O.J., Kuhl, E.: A generic approach towards finite growth with examples of athlete’s heart, cardiac dilation, and cardiac wall thickening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 58(10), 1661–1680 (2010)

- [3] Göktepe, S., Abilez, O.J., Parker, K.K., Kuhl, E.: A multiscale model for eccentric and concentric cardiac growth through sarcomerogenesis. *Journal of Theoretical Biology*, vol. **265**(3), 433–442 (2010)
- [4] Holzapfel, G.A., Ogden, R.W.: Constitutive modelling of passive myocardium: a structurally based framework for material characterization. *Philosophical Transactions. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, vol. **367**(1902), 3445–3475 (2009)
- [5] Humphrey, J.D.: Vascular adaptation and mechanical homeostasis at tissue, cellular, and sub-cellular levels. *Cell Biochemistry and Biophysics*, vol. **50**(2), 53–78 (2008)
- [6] Kröner, E.: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, 273–334 (1960)
- [7] Kuhl, E., Maas, R., Himpel, G., Menzel, A.: Computational modeling of arterial Wall growth. attempts towards patient-specific simulations based on computer tomography. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. **6**(5), 321–331 (2007)
- [8] Lee, E.H.: Elastic–plastic deformation at finite strain. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. **36**, 1–6 (1969)
- [9] Rodriguez, E.K., Hoger, A., McCulloch, A.D.: Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *Journal of Biomechanics*, vol. **27**(4), 455–467 (1994)