



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

KAVİTASYON KABARCIĞI BÖLÜNME DİNAMİĞİ

Can Fuat Delale¹
Işık Üniversitesi
İstanbul

Şenay Pasinlioğlu²
İstanbul Teknik Üniversitesi
İstanbul

Patrik Zima³
Institute of Thermomechanics (CAS)
Prague Czech Republic

ÖZET

Kavitasyon kabarcığı dinamiğinde, ısı iletimi, ağırlılık, kütle yayılımı ve akustik ışınım sonucu mekaniksel enerjinin önemli bir bölümü yutulmaktadır. Bu fiziksel olgulara ek olarak, kabarcığın yüksek bir basınç alanı etkisiyle aniden büzülmesiyle parçalara (fragmanlara) bölünmesi sonucu da mekaniksel enerjinin bir bölümü yutulmaktadır. Brennen [1], Rayleigh-Taylor kararsızlığı ve mikrojet oluşumu sonucu kabarcığın bölünmesi halinde yutulan mekaniksel enerjinin, yukarıdaki klasik olgulardan kaynaklanankinden çok daha fazla olabileceğini göstermiştir. Daha sonra Delale ve Tunç [2] Rayleigh-Taylor kararsızlığı sonucu oluşan bir kabarcık bölünmesi dinamiği modeli geliştirmiştir. Bu model, deney ve gözlemlerdeki sonuçları doğrulamakla birlikte, hangi koşullar altında Rayleigh-Taylor kararsızlığının kabarcık bölünmesine yol açacağı hakkında bilgi vermemektedir [3]. Bu çalışmada, Rayleigh-Taylor doğrusal kararsızlığının en kararsız modu kullanılarak, Delale-Tunç modelindeki kabarcık fragmanları dinamiğine yol açan kabarcık bölünmesinin hangi koşullar altında oluşabileceği belirlenmektedir.

GİRİŞ

Kabarcık dinamiğinde ağırlılık, ısı iletimi, kütle yayılımı ve akustik ışınım gibi klasik sönüm mekanizmalarından dolayı enerjinin önemli bir bölümü yutulur. Kabarcığın şiddetli büzülmesiyle parçalara (fragmanlara) bölünmesi durumunda da enerjinin bir kısmı yutulur. Brennen [1], kavitasyon kabarcığının bölünmesi esnasında yutulan enerjinin, klasik sönüm mekanizmalarinkinden çok daha fazla olabileceğini göstermiştir. Enerji yutulma mekanizmasına dayalı bir kabarcık bölünme modeli, Brennen [1] tarafından önerilen Rayleigh-Taylor kararsızlığı yöntemi kullanılarak Delale ve Tunç [2] tarafından geliştirilmiştir. Bu modelde bölünme esnasında kabarcık içindeki gaz basıncının sürekliliği ve kabarcık hacminin korunduğu varsayılarak, büzülmekte olan ana kabarcığın minimum

¹ Prof. Dr., Makine Müh. Böl., E-posta: delale@isikun.edu.tr

² Öğr. Gör. Dr., Matematik Müh. Böl., E-posta: pasinliogl@itu.edu.tr

³ Dr., E-posta: zimap@it.cas.cz

hacmindeki ortalama yarıçapında süreksizlik ile bölünmesi öngörülmüştür. Modelde bölünme sonucu oluşan kabarcıkların (fragmanların) ortalama yarıçapının evrimi, bu kabarcıkların sayısı serbest bir parametre alınarak iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi ile belirlenmektedir. Model deneylerle karşılaştırıldığında, yutulan enerji miktarını ve kabarcık bölünmesi sonucu oluşan kabarcık sayısını tahmin etmede başarılı olmasına rağmen, kabarcık bölünmesinin hangi koşullar altında oluşacağı hakkında bilgi vermemektedir [3]. Ayrıca kabarcık bölünmesinin minimum hacimden önce oluşacağı gerçeği göz önüne alınmalıdır. Son araştırmalar [4,5] aynı zamanda kavitasyon kabarcıklarının şiddetli büzülmeleri esnasında ısıtılmanın önemini göstermiştir.

Bu araştırmanın amacı, bu eleştiriler ışığında modeli iyileştirmektir. Bu vesileyle, Rayleigh-Taylor kararsızlığının en kararsız modunda bozunma genliğinin kabarcığın ortalama yarıçapıyla aynı mertebede olacağı dikkate alınarak bir kabarcık bölünmesi kriteri ortaya atılmıştır. Böylece, ana kabarcık minimum hacime ulaşmadan önce bir kabarcık bölünme zamanı tanımlanmıştır. Delale ve Tunç [2] modelindeki ortalama kabarcık yarıçapındaki süreksizlik bu kabarcık bölünme zamanına taşınarak önceki kabarcık bölünme modeli [2] iyileştirilmiştir. Önerilen kabarcık bölünme kriteriyle elde edilen sonuçlar, Delale ve Tunç modeli ile karşılaştırıldığında, şiddetli büzülen tipik bir kavitasyon kabarcığının bölünmesi esnasında yutulan enerji miktarında modeller arasında önemli bir fark oluşmadığı görülmüştür.

KAVİTASYON KABARCIĞI BÖLÜNMESİ İÇİN BİR KRİTER

Bu bölümde kavitasyon kabarcığının şiddetli büzülmesi esnasında kabarcık bölünmesi oluşumu için bir kriteri tartışacağız. Bu nedenle ilk olarak büzülmekte olan kavitasyon kabarcığının hacimsel değişimini, ortalama kabarcık yarıçapı $R(t)$ kullanarak Rayleigh-Plesset denklemi

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\sigma}{2}[1 - R^{-3k}] + \frac{4}{(Re)R}\dot{R} + \frac{2}{(We)R}[R^{-1} - R^{-3k}] + \frac{C_p}{2} = 0 \quad (1)$$

ile göstereceğiz. Burada R normalize yarıçap, t normalize zaman, C_p basınç katsayısı ve σ kavitasyon sayısı

$$R = \frac{R'}{R'_0}, \quad t = \frac{t'U'}{R'_0}, \quad C_p = \frac{p'_\infty(t) - p'_0}{(1/2)\rho'_\ell U'^2}, \quad \sigma = \frac{p'_0 - p'_v}{(1/2)\rho'_\ell U'^2} \quad (2)$$

denklemleri ile veriliyor. Denklemlerdeki (') boyutlu değişkenleri göstermekte olup, R'_0 , $p'_\infty(t)$, p'_0 , U' , ρ'_ℓ ve p'_v sırasıyla başlangıç kabarcık yarıçapı, akustik basınç, başlangıç karışım basıncı, karakteristik akış hızı, sıvı yoğunluğu ve kabarcık içindeki kısmi buhar basıncıdır. Ayrıca kabarcık içindeki p_g normalize kısmi gaz basıncının

$$p_g = \frac{p_{g0}}{R^{3k}} \quad (3)$$

politropik yasasıyla değiştiği varsayılmaktadır. (3) denkleminde k politropik indeksi ve p_{g0} başlangıçtaki normalize kısmi gaz basıncını göstermektedir (başlangıçtaki kabarcıklar için $p_{g0} = \sigma/2 + C_p/2$ denge koşulu ile belirlenir). Ayrıca Reynolds sayısı Re ve Weber sayısı We

$$Re = \frac{\rho'_l U' R'_0}{\mu'_{eff}} \quad \text{ve} \quad We = \frac{\rho'_l U'^2 R'_0}{S'} \quad (4)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada S' yüzey gerilim katsayısını ve μ'_{eff} viskoz yutulma şeklindeki tüm sönüm mekanizmalarını betimleyen efektif viskoziteyi gösterir ve μ'_l sıvı viskozitesinin katı olarak alınır. Kavitasyon kabarcığının büzülmesi sırasında küresel simetriden sapmalar, sıvı ve/veya kabarcık içerisindeki bozunmalardan oluşur. Bu durumda büzülen kabarcık yüzeyinin

$$r(\phi, \theta, t) = R(t) + a_n(t) Y_n^\ell(\phi, \theta) \quad (5)$$

ifadesi ile bozunduğu öngörülür. Burada $Y_n^\ell(\phi, \theta)$, $n > 1$ modlu küresel harmonik fonksiyonu ve $a_n(t)$, kabarcık yarıçapı $R(t)$ ile karşılaştırıldığında çok küçük olduğu varsayılan ($|a_n(t)| \ll R(t)$) bozunma genliğini göstermektedir. Bu durumda Rayleigh-Taylor kararsızlığı $a_n(t)$ genliği için

$$\ddot{a}_n + B(t)\dot{a}_n - A_n(t)a_n = 0 \quad (6)$$

lineer diferansiyel denkleminde dönüşür. Bu denkleminde $A_n(t)$ ve $B_n(t)$ katsayıları, viskozitenin etkisi ihmal edildiğinde,

$$A_n(t) = \frac{(n-1)\dot{R}}{R} - \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(We)R^3} \quad (7)$$

ve

$$B(t) = \frac{3\dot{R}}{R} \quad (8)$$

ifadeleri ile belirlidir. Büzülme periyodunda kabarcık parçalanmasından önce herhangi bir t_i anında kabarcık yarıçapının değeri R_i olmak üzere (6) denkleminde

$$a_n(t) = \alpha_n(t) \exp\left[-\frac{3}{2} \int_{t_i}^t \frac{\dot{R}(t_1)}{R(t_1)} dt_1\right] = \left(\frac{R_i}{R}\right)^{3/2} \alpha_n(t) \quad (9)$$

dönüşümü kullanılarak

$$\ddot{\alpha}_n - G_n(t)\alpha_n = 0 \quad (10)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$G_n(t) = \frac{3\dot{R}^2}{4R^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(We)R^3} \quad (11)$$

ile tanımlanır. Yukarıdaki denklemlerde en kararsız mod n_m

$$n_m = \frac{\sqrt{7 + 3(We)R^2\ddot{R}} - 2}{3} \quad (12)$$

olarak belirlenir [1,2].

Şimdi (10) denklemi için başlangıç değeri problemi çözmek üzere

$$\ddot{\alpha}_n - G_{n_m}(t)\alpha_n = 0 \quad (13)$$

denklemi ile en kararsız modu kullanarak büzülme periyodu boyunca

$$\alpha_n(t_i) = \varepsilon_i \quad ; \quad \dot{\alpha}_n(t_i) = 0 \quad (14)$$

başlangıç koşullarını göz önüne alalım. Burada ε_i 'nin, t_i anında kabarcık yarıçapı R_i ile karşılaştırıldığında çok küçük kaldığı varsayılmaktadır ($|\varepsilon_i| \ll R_i$). Yukarıdaki başlangıç değeri probleminin çözümünden,

$$a_{n_m}(t) = \left(\frac{R_i}{R}\right)^{3/2} \alpha_{n_m}(t) \quad (15)$$

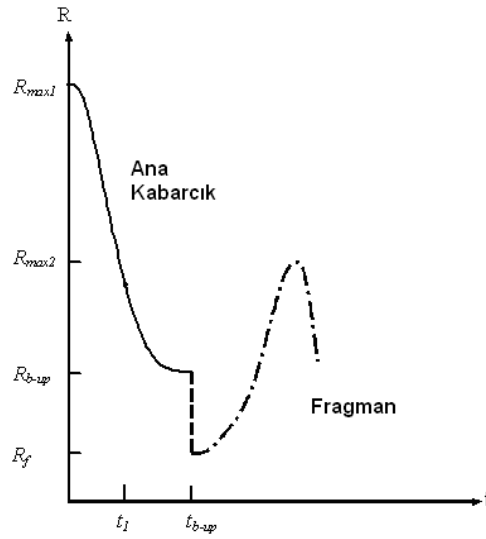
ile belirlenen bozunma genliği, kabarcık büzülmesi esnasında $O(R)$ boyutuna eriştiğinde, kabarcık bölünmesinin gerçekleşeceği açıktır. Bu yüzden kabarcık parçalanması için kriteri

$$a_{n_m}(t_{b-up}) = \beta R_{b-up} \quad (16)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada t_{b-up} büzülme esnasında kabarcığın bölünme zamanını, R_{b-up} da bölünen kabarcığın bu esnadaki ortalama yarıçapını göstermekte olup β , $O(1)$ büyüklüğünde pozitif bir sabittir. $\beta < 1/2$ iken $2a_{n_m}(t_{b-up}) < R_{b-up}$ 'dir. Ayrıca en kararsız moddaki bozunma, ortalama kabarcık yarıçapının dörtte birine kadar büyüdüğüde, kabarcığın büyük bir olasılıkla parçalanacağı gösterilebilir. Sonuç olarak kabarcığın parçalanma kriterini, büzülme esnasında bozunma genliğinin

$$a_{n_m}(t_{b-up}) = 0.25R_{b-up} \quad (17)$$

büyüklüğüne eriştiği koşul olarak tahmin edebiliriz. Kabarcık bölünmesi için bu koşul sağlandığında, bölünen ana kabarcık için Rayleigh-Plesset denkleminin çözümünden, kabarcık bölünme zamanı t_{b-up} , o andaki bölünen ortalama kabarcık yarıçapı R_{b-up} ve kabarcık büzülme hızı \dot{R}_{b-up} 'yi belirliyebiliriz.



Şekil 1: Delale ve Tunç [2] kabarcık bölünme modelinde, R normalize yarıçapının normalize zamanla değişimi (t_{b-up} bölünme anında yarıçapta bir süreksizlik oluşur).

KABARCİK BÖLÜNME MODELİ VE FRAGMANLARIN YENİDEN BÜYÜME DİNAMİĞİ

Büzülen kavitasyon kabarcıkları için bir kabarcık bölünme modeli Delale ve Tunç [2] tarafından önerilmiştir. Bu modelde kabarcık bölünmesinin olduğu zaman aralığı, karakteristik büzülme zamanına göre ihmal edilmiştir. Ayrıca kabarcık bölünmesi esnasındaki enerji yutulması, kabarcık minimum hacime eriştiğinde, ortalama kabarcık yarıçapında bir süreksizlik öngörülerek modellenmiştir. Modelde, (i) kabarcık bölünmesinin kabarcığın minimum hacime eriştiği esnada olduğu, (ii) bölünme esnasında kabarcığın hacminin, ortaya çıkan fragmanların toplam hacmine eşit olduğu ve (iii) bölünme esnasında kabarcığın içindeki kısmi gaz basıncının aynı kaldığı varsayılmıştır. Bu koşullar altında fragmanların ortalama yarıçapının

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\sigma}{2}\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_{b-up}}\right)^{3k} R^{-3k}\right] + \frac{4}{(Re)}\frac{\dot{R}}{R} + \frac{2}{(We)}\left[R^{-1} - \left(\frac{R_f}{R_{b-up}}\right)^{3k} R^{-3k}\right] + \frac{C_p}{2} = 0 \quad (18)$$

iyileştirilmiş normalize Rayleigh-Plesset denklemini sağladığı gösterilmiştir. Burada R_f ortalama normalize fragman yarıçapını gösterir ve bölünme esnasında hacim korunumu gözönüne alınarak, N_m fragman sayısını göstermek üzere,

$$R_f = \frac{R_{b-up}}{N_m^{1/3}} \quad (19)$$

formülüyle belirlenir. Ayrıca bu modelde tüm sönüm mekanizmaları efektif viskozite kullanılarak viskoz yutulma şeklinde düşünülmüş olup, kabarcık bölünmesinin hangi koşullar altında ve ne zaman oluşabileceği belirtilmemiştir.

Önceki bölümde kabarcık bölünmesi için Rayleigh-Taylor kararsızlığından bir bölünme kriteri tanımlamıştık. Bu kriter sağlandığında, kabarcık hacmi minimuma erişmeden kabarcık bölünür. Bölünme sonucu oluşan fragmanların dinamiği için yine (18) iyileştirilmiş Rayleigh-

Plesset denklemini kullanabiliriz. Bu durumda bölünme anında fragmanların R_f ortalama yarıçapı (19) denkleminde elde edilebilir. Bu denkleminde fragmanların sayısı $N_m \geq 2$ olup serbest bir parametre olarak alınabilir. Fragman yüzeylerinin ortalama başlangıç hızı \dot{R}_f 'yi bulmak için Brennen [1]'in

$$v = \frac{E'_{kin} - E'_{loss}}{E'_{kin}} = \left(\frac{\dot{R}_f}{\dot{R}_{b-up}} \right)^2 \quad (20)$$

v yutulma enerji indeksinden yararlanabiliriz. Bu denkleminde E'_{kin} bölünen kabarcığın kinetik enerjisini, E'_{loss} kabarcık bölünmesi esnasında yutulma mekanizmalarından kaynaklanan enerji kaybını, \dot{R}_{b-up} ise bölünen kabarcığın bölünme esnasındaki büzülme hızını göstermektedir. Şimdi (18) denkleminin ile birlikte

$$R = R_f \quad ; \quad \dot{R} = \dot{R}_f \quad (21)$$

başlangıç değerleri kullanılarak fragmanların dinamiği için başlangıç değer problemi çözülür. Burada R_f (19) denklemininle, \dot{R}_f ise (20) denkleminde $\dot{R}_f = v^{1/2} \dot{R}_{b-up}$ bağıntısıyla hesaplanır. Brennen'in v yutulma enerji indeksi ise, verilen bir N_m için,

$$R_{max,2} = v^{1/3} R_{max,1} \quad (22)$$

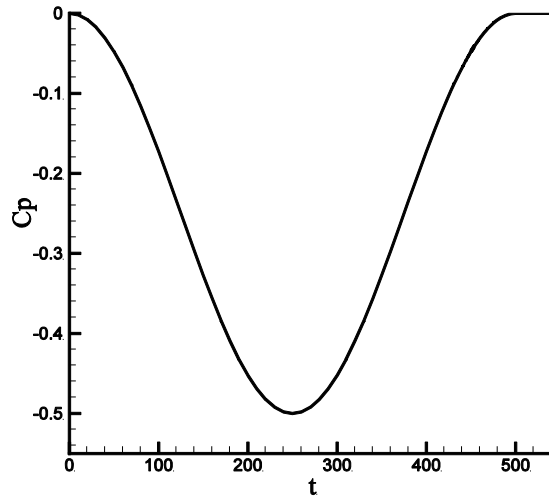
[1] bağıntısından iteratif olarak bulunur. Burada $R_{max,1}$ ve $R_{max,2}$, sırasıyla, bölünen kabarcığın bölünmeden önce eriştiği maksimum yarıçapını ve fragmanların yeniden büyüme sonucu eriştikleri maksimum ortalama yarıçapını göstermektedir.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde kabarcık bölünme oluşumu için önerilen kriterin sonuçları, Delale ve Tunç [2] modelinin sonuçlarıyla karşılaştırılmaktadır. Kavitasyon kabarcıklarının tipik basınç sinyali için Şekil 2'de görüldüğü gibi

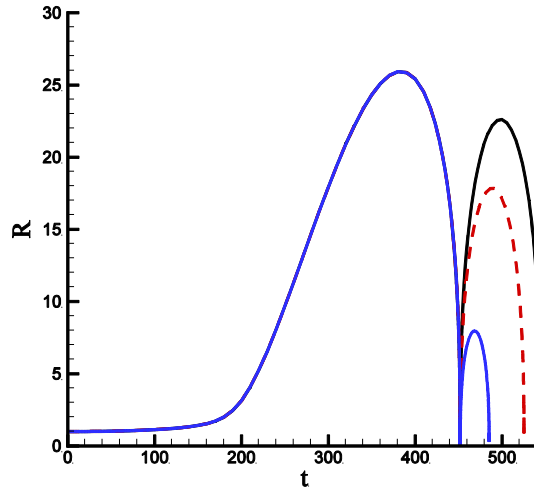
$$C_p(t) = \frac{C_{p,min}}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{t_G} \right) \right], \quad 0 < t < t_G \quad \text{ve} \quad C_p(t) = 0, \quad t \geq t_G \quad (23)$$

bağıntısı kullanılmaktadır. Burada $C_{p,min} = -0.5$ ve $t_G = 500$ değerindedir [1,6]. Büzülen kavitasyon kabarcığı için yukarıdaki basınç sinyali altında, su içindeki bir hava kabarcığını gözönünde bulunduralım. Suyun yoğunluğunu $\rho'_l = 1000 \text{ kg/m}^3$, yüzey gerilim katsayısını $S' = 0.072 \text{ N/m}$ ve dinamik viskozitesini $\mu'_l = 0.001 \text{ kg/m.s}$ değerlerinde alalım. Ayrıca başlangıç kabarcık yarıçapı için $R'_0 = 100 \text{ } \mu\text{/m}$, kavitasyon sayısı için $\sigma = 0.4$, k politropik indeksi için havanın izentropik indeksi $\gamma = 1.4$ ve karakteristik hız için $U' = 10.0 \text{ m/s}$ değerlerini kullanalım. Tüm klasik sönüm mekanizmalarının (viskoz, ısıl ve akustik) etkisi de tek bir sönüm katsayısı (efektif viskozite μ'_{eff}) kullanılarak viskoz yutulma şeklinde ele alınmış ve $\mu'_{eff} = 50\mu'_l$ tipik değeri kullanılmış olsun.



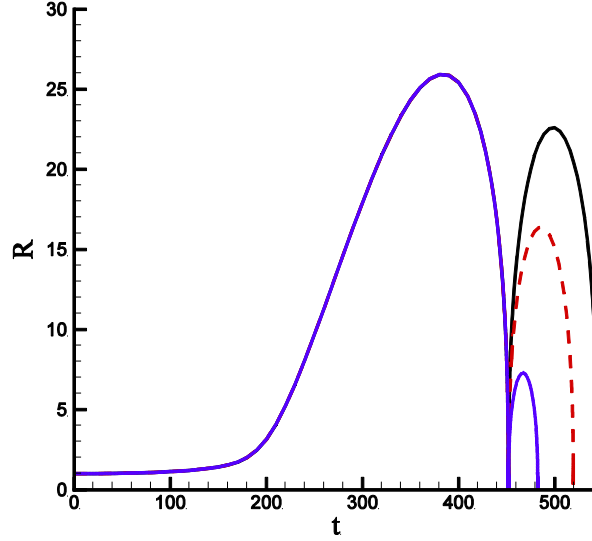
Şekil 2. (23) denklemi ile verilen basınç katsayısının normalize zamana göre değişimi.

Bu koşullar altında ana kabarcık için Rayleigh-Plesset denklemi (1) ve fragman kabarcıklar için iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi (18)'in başlangıç değer problemlerinin sayısal çözümlerinde uyarlamalı zaman adımlı beşinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 3-5 'te gösterilmiştir.



Şekil 3. $\sigma = 0.4$, $We = 137$, $R'_0 = 100 \mu m$ ve $Re = 20$ olmak üzere (23) denklemi ile verilen basınç sinyali altında Delale ve Tunç [2]'nin kabarcık bölünme modeli kullanılarak, ana kabarcık için (1) klasik Rayleigh-Plesset denklemi (1) ve fragmanlar için (18) iyileştirilmiş versiyonunun çözümleri (– sürekli düz çizgi, kabarcık bölünmesinin olmadığı durum; – – – kesik çizgi, kabarcık bölünmesinin $N_m = 2$ olduğu durum; \cdots noktalı çizgi, kabarcık bölünmesinin $N_m = 20$ olduğu durumdur).

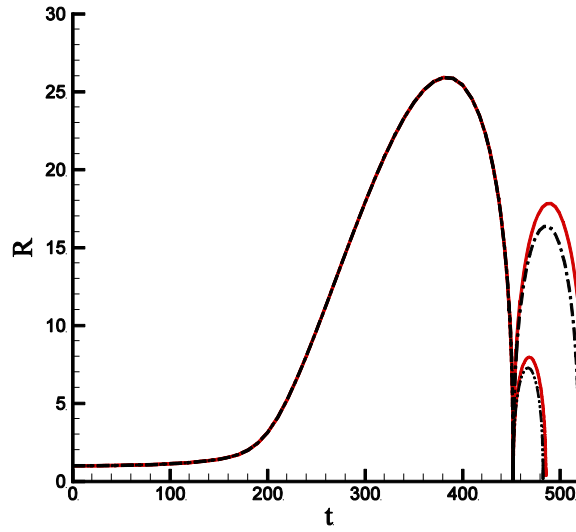
Şekil 3, yukarıda belirtilen koşullar altında fragman sayısı $N_m = 2$ ve $N_m = 20$ için Delale ve Tunç [2] modeli kullanılarak fragman kabarcığının ortalama yarıçapının zamanla değişimini göstermektedir. Burada birinci büzülme sonunda $R_{\min} = 9 \times 10^{-4}$ değerindedir.



Şekil 4. $\sigma = 0.4$, $We = 137$, $R'_0 = 100 \mu m$ ve $Re = 20$ olmak üzere (23) denklemi ile verilen basınç sinyali altında önerilen kabarcık bölünme kriteri kullanılarak, ana kabarcık için (1) klasik Rayleigh-Plesset denklemi (1) ve fragmanlar için (18) iyileştirilmiş versiyonunun çözümleri (– sürekli düz çizgi, kabarcık bölünmesinin olmadığı; – – – kesik çizgi, kabarcık bölünmesinin $N_m = 2$ olduğu; ··· noktalı çizgi, kabarcık bölünmesinin $N_m = 20$ olduğu durumdur).

Şekil 4'te aynı fragman sayıları için ($N_m = 2$ ve $N_m = 20$) bu makaledeki bölünme kriteri kullanılarak, fragman kabarcığının ortalama yarıçapının zamanla değişimi gösterilmektedir. Bu durumda kabarcık bölünmesi, parçalanmış kabarcık minimum hacime ulaşmadan önce $R_{b-up} = 1.1 \times 10^{-3}$ normalize yarıçapı değerinde oluşmaktadır. Ayrıca $N_m = 2$ için $\nu = 0.249$ ve $N_m = 20$ için $\nu = 0.022$ değerleri bulunmaktadır. Şekil 5'te fragman kabarcığı ortalama yarıçapının zamanla değişimi, bu makalede önerilen kabarcık bölünmesi modeliyle önceki Delale ve Tunç [2] modeli arasında karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırma, önerilen model ile Delale ve Tunç [2] modeli arasında kabarcık bölünmesinden dolayı enerji yutulmasındaki farkın önemsiz olduğunu göstermektedir.

Bu makalede önerilen kabarcık bölünme kriteri, Rayleigh-Taylor kararsızlığının lineer analizinden elde edilen en kararsız mod esas alınarak belirlenmektedir. Ancak kabarcık parçalanırken bozunmalar ortalama kabarcık yarıçapıyla aynı mertebeden olduğundan, bölünme esnasında Rayleigh-Taylor kararsızlığının lineer analizi geçerli değildir. Bu durumda lineer olmayan Rayleigh-Taylor kararsızlığı kullanılmalıdır. Ayrıca, birçok araştırmalarda [4,5] vurgulandığı üzere, ısıl sönümün etkisi de ayrı olarak gözönüne alınmalıdır. Modeldeki bu iyileştirmeler gelecek araştırmalara bırakılmıştır.



Şekil 5. $\sigma = 0.4$, $We = 137$, $R'_0 = 100 \mu m$ ve $Re = 20$ olmak üzere (23) denklemi ile verilen basınç sinyali altında Delale ve Tunç [2] 'un kabarcık bölünme modeli ve önerilen kabarcık bölünme kriteri kullanılarak, ana kabarcık için klasik Rayleigh-Plesset denklemi (1) ve fragmanlar için (18) iyileştirilmiş versiyonunun çözümlerinin karşılaştırılması (– sürekli düz çizgi, [2] kullanılarak kabarcık bölünmesinin $N_m = 2$ olduğu; \cdots noktalı çizgi, [2] kullanılarak kabarcık bölünmesinin $N_m = 20$ olduğu durum; $-\cdot-\cdot-$ noktalı kesik çizgi, önerilen kabarcık bölünme kriteri kullanılarak kabarcık bölünmesinin $N_m = 2$ olduğu durum; $-\cdot-\cdot-$ iki noktalı kesik çizgi, önerilen kabarcık bölünme kriteri kullanılarak kabarcık bölünmesinin $N_m = 20$ olduğu durumdur).

KAYNAKLAR

- [1] Brennen, C. E., “Fission of collapsing cavitating bubbles”, Journal of Fluid Mechanics, 472, 153-166, 2002
- [2] Delale, C. F. ve Tunç, M., “A bubble fission model for collapsing cavitation bubbles”, Physics of Fluids, 16, 4200-4203, 2004
- [3] Petrik, P., “Mathematical analysis and numerical algorithm for the Rayleigh-Plesset equation around the violent bubble collapse”, Master Thesis, Charles University, Prag, 2010.
- [4] Prosperetti, A., “The thermal behaviour of oscillating gas bubbles”, J. Fluid Mech., 222,587-616, 1991.
- [5] Preston, A., Colonius, T. and Brennen, C., “A reduced-order model of diffusive effects on the dynamics of bubbles”, Phys. Fluids, 19, Art. No. 123302, 2007.
- [6] Wang, Y. C., “Shock waves in bubbly cavitating flows”, PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, 1996.