



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## WINKLER ZEMİNİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKADA DEĞME PROBLEMİ

İsa Çömez<sup>1</sup>, Handan Adıbelli<sup>2</sup>, Ragıp Erdöl<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Karadeniz Teknik Üniversitesi Trabzon

<sup>2</sup>Bozok Üniversitesi Yozgat

<sup>3</sup>Canik Başarı Üniversitesi Trabzon

### ABSTRACT

In this study, the frictionless contact problem for a functionally graded layer on a Winkler foundation is considered in the framework of the theory of elasticity and the Fourier integral transform technique. The layer is indented by a rigid cylindrical punch that applies a concentrated load in the normal direction. The elasticity modulus is assumed to vary exponentially through the thickness of the layer and Poisson's ratio is taken as constant. The problem is reduced to a singular integral equation with the use of Fourier integral transform technique and the boundary conditions. The numerical solution of the problem is executed by using Gauss-Chebyshev integration formulas. The effect of the material nonhomogeneity parameter ( $\gamma$ ) and stiffness of the Winkler foundation ( $k_w$ ) on the contact area and the contact stress are investigated.

### ÖZET

Bu çalışmada, Winkler zeminine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz değme problemi, elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak incelenmiştir. Tabakaya rijit dairesel bir paç (zımba) vasıtasıyla normal doğrultuda bir tekil yük etki ettirilmiştir. Tabakanın elastisite modülünün kalınlık boyunca, üstel bir fonksiyona bağlı olarak, değiştiği kabul edilirken Poisson oranı sabit alınmıştır. Sınır şartları ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak problem bir tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak tekil integral denklemin sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. Tabakanın kalınlık boyunca elastisite modülünü belirleyen ( $\gamma$ ) katsayısının ve zemin elastik yay katsayısının ( $k_w$ ) değme uzunlukları ve değme gerilmeleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

<sup>1</sup> Yrd. Doç. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: isacomez@ktu.edu.tr

<sup>2</sup> Yrd. Doç. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: : ahandana@hotmail.com

<sup>3</sup> Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: erdol@ktu.edu.tr

## 1.GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), malzeme özellikleri eleman boyunca bir noktadan başka bir noktaya bir fonksiyona bağlı olarak değişen, homojen olmayan kompozitlerdir. Yeni teknolojilerde FD malzemelerin kullanımına paralel olarak bu malzeme türünün mekanik davranışları üzerine yapılan çalışmalarda da artış görülmektedir.

FDM'le ilgili değme problemleri son 20 yıldır incelenmekte olup, çalışmalar daha çok bir tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin değme probleminde yoğunlaşmıştır. Guler ve Erdogan [1,2] ile Liu ve Wang [3]'ün çalışmalarında tabakanın kayma modülünün üstel olarak değiştigi kabul edilirken, Ke ve Wang [4,5], Liu vd. [6] ile Chen ve Chen [7]'in çalışmalarında kayma modülünün lineer değişimini gözetererek değme problemini incelemiştirlerdir.

Guler ve Erdogan [8] iki FD silindirin sürtünmeli değme problemini, Yang ve Ke [9] homojen tabaka, FD tabaka ve yarım düzlemden oluşan sistemde değme problemini incelemiştirlerdir. Borgi vd. [10] ile Rhimi vd. [11] homojen yarım düzlem üzerine oturan FD tabakanın düzlem ve döneel simetrik problemini ele almışlardır. Choi [12] rijit bir düzleme oturan tabakanın, Bakırtas [13] rijit pançla bastırılan FD yarım düzlemin değme problemini incelemiştirlerdir.

Winkler zemin modelinde zeminin sonsuz sayıdaki elastik yaylardan oluştuğu ve zeminde oluşan reaksiyoun zemindeki çökmeye doğru orantılı olduğu kabul edilmektedir. Dempsey vd. [14] ve Dempsey vd. [15], Birinci ve Erdöl [16], Wozniak vd. [17] elastik zemine oturan homojen tabakalarla ilgili çalışmalar yapmışlardır. Matysiak ve Pauk [18] Winkler zeminine oturan homojen tabakanın, Kadioglu vd. [19] FD tabakanın çatlak problemlerini incelemiştirlerdir.

Homojen tabakanın değme problemleri daha önce çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş olmasına rağmen, literatürde Winkler zeminine oturan homojen olmayan FD tabakanın değme probleminin henüz incelenmemiş olduğu görülmektedir. Bu çalışmada rijit dairesel bir panç ile Winkler zeminine bastırılan ağırlıksız FD tabakanın değme problemi incelenmiştir.

## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

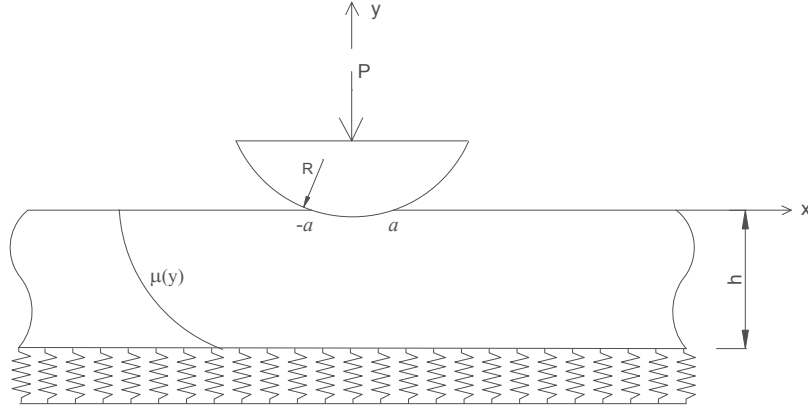
Şekil1.'de Winkler zeminine oturan  $h$  yüksekliğindeki FD tabakanın geometrisi görülmektedir.  $P$  tekil yükü tabakaya  $R$  yarıçaplı rijit bir dairesel panç yardımıyla iletilmektedir. Tabakanın Poisson oranı  $\nu$  sabit iken elastisite modülü dolayısıyla kayma modülü kalınlık boyunca

$$\mu(y) = \mu_0 e^{\gamma y} \quad (1)$$

olarak üstel biçimde değişmektedir. Burada  $\mu_0$  tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülünün değeri ve  $\gamma$  ise malzeme inhomojenliğini belirleyen bir katsayıdır.

Bünye denklemleri ve yer değiştirme, şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla gerilmeleri yer değiştirmeler cinsinden yazmak mümkündür.

Gerilme yer değiştirme bağıntıları



Şekil 1. Değme probleminin geometrisi

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\mu(y)}{\kappa - 1} \left[ (\kappa + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (3 - \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (2a)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\mu(y)}{\kappa - 1} \left[ (3 - \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + (\kappa + 1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (2b)$$

$$\tau_{xy} = \mu(y) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2c)$$

olarak yazılabilir. Burada  $u, v$  sırasıyla  $x, y$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini ifade etmekte ve düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa = 3 - 4\nu$  değerini almaktadır.

(2) nolu denklemler kütle kuvvetleri ihmal edilip denge denklemlerinde yazıldığında  $u(x, y)$  and  $v(x, y)$  için iki denklemden oluşan bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir

$$(\kappa + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \gamma(\kappa - 1) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (3a)$$

$$(\kappa - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \left[ (3 - \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + (\kappa + 1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (3b)$$

Problem bu kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünden yani  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yer değiştirmelerinin bulunmasından ibarettir. Navier denklemlerinin, kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini, adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılmaktadır.  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yer değiştirme bileşenleri Fourier dönüşümü şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (4a)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4b)$$

burada  $\phi(\alpha, y)$  ve  $\psi(\alpha, y)$  yer değiştirme bileşenlerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır.

(4a,b) ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (3a,b) denklemlerinde yerine yazılarak; Navier denklemleri, kısmi türevli diferansiyel denklem takımından adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülür

$$-(\kappa+1)\alpha^2\phi + (\kappa-1)\frac{d^2\phi}{dy^2} - 2\alpha\frac{d\psi}{dy} + \gamma(\kappa-1)\left[\frac{d\phi}{dy} - \alpha\psi\right] = 0 \quad (5a)$$

$$-(\kappa-1)\alpha^2\psi + (\kappa+1)\frac{d^2\psi}{dy^2} + 2\alpha\frac{d\phi}{dy} + \gamma\left[(3-\kappa)\alpha\phi + (\kappa+1)\frac{d\psi}{dy}\right] = 0 \quad (5b)$$

(5) denklemlerinin çözümünden Fourier dönüşüm fonksiyonları

$$\phi(y) = \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \quad (6a)$$

$$\psi(y) = \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \quad (6b)$$

olarak elde edilir.  $A_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) bilinmeyen katsayılar olup problemin sınır şartlarından elde edilecektir.  $n_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) değerleri aşağıdaki karakteristik denklemi sağlamaktadır.

$$n_j^4 + 2\gamma n_j^3 + (\gamma^2 - 2\alpha^2)n_j^2 - 2\alpha^2\gamma n_j + \alpha^2(\alpha^2 + \gamma^2 \frac{3-\kappa}{1+\kappa}) = 0 \quad (7)$$

Buradan

$$n_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\gamma + \sqrt{4\alpha^2 + \gamma^2 \mp 4i\alpha|\gamma|\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}}\right), \quad n_{3,4} = -\frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{4\alpha^2 + \gamma^2 \mp 4i\alpha|\gamma|\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}}\right) \quad (8a,b)$$

$$m_j = \frac{(n_j + 2\gamma v)(-2n_j^2(1-v) + 2n_j\gamma(1-v) - \alpha^2(3-2v))}{\alpha(\alpha^2 - 4\gamma^2(-1+v)v)} \quad (9)$$

değerlerini almaktadır. (4,6) denklemleri (2) denklemlerinde yazıldığında tabaka için gerilme ifadeleri

$$\frac{\sigma_x(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\kappa-1} [(3-\kappa)m_j n_j + \alpha(\kappa+1)] e^{(n_j+\gamma)y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (10a)$$

$$\frac{\sigma_y(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\kappa-1} [(\kappa+1)m_j n_j + \alpha(3-\kappa)] e^{(n_j+\gamma)y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (10b)$$

$$\frac{\tau_{xy}(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(n_j - \alpha m_j)] e^{(n_j + \gamma)y} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (10c)$$

olarak elde edilir.

### 3. SINIR ŞARTLARI VE İNTEGRAL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

Tabakaya ait sınır şartları aşağıda verilmiştir:

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} -p(x) & 0 < x < a \\ 0 & a \leq x < \infty \end{cases} \quad (11a)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (11b)$$

$$\tau_{xy}(x, -h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (11c)$$

$$\sigma_{y2}(x, -h) = k_w v(x, -h) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (11d)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = F(x) \quad 0 < x < a \quad (12)$$

burada  $p(x)$  rijit dairesel panç ile tabaka arasında oluşan değme bölgesindeki  $(-a, a)$  bilinmeyen değme gerilmesidir.  $k_w$  elastik yay sabiti ve  $F(x)$  dairesel pançın şekil fonksiyonunun türevidir

$$F(x) = \frac{x}{R} \quad (13)$$

Probleme ait düşey denge şartı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \quad (14)$$

Probleme ait (11) no'lu sınır şartlarından bilinmeyen katsayılar yine bilinmeyen olan değme gerilmesi  $p(x)$  ' e bağlı olarak elde edilir. (12) nolu sınır şartı yardımıyla  $p(x)$  için bir tekil integral denklem oluşmaktadır.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) \left[ \frac{1}{t-x} + k(x, t) \right] dt = \frac{\mu_0}{\beta} \frac{x}{R} \quad (15)$$

Burada

$$k(x, t) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} [M(\alpha) - \beta] \sin \alpha(t-x) d\alpha \quad (15a)$$

$$M(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha m_j A_j, \quad \beta = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(\alpha) = -\frac{\kappa+1}{4} \quad (15b,c)$$

olarak tanımlıdırlar. Tekil integral denklemde (14) değme gerilmesi  $p(x)$  yani sıra değme uzunluğu  $a'$  da incelenen problemde bir bilinmeyendir. Problemin çözümü için aşağıdaki düzey denge şartına da ihtiyaç vardır

$$\int_{-a}^a p(t)dt = P$$

#### 4- TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

İntegral denklemi sayısal çözümü için  $\alpha = z/h$  değişken dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$s = x/a, \quad t = r/a \quad (16a)$$

$$\phi(r) = \frac{p(r)}{P/h} \quad (16b)$$

Boyutsuzlaştırmalar ve değişken değişimleri sonucunda integral denklem ve denge şartı

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(r) \left[ \frac{1}{r-s} + \frac{a}{h} k(s,r) \right] dr = \frac{\beta}{R/h} \frac{\mu_0}{P/h} \frac{a}{h} s \quad (17)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 \phi(r) dr = 1 \quad (18)$$

olarak sayısal çözüme hazır hale getirilmiştir.

Temas uç noktalarında gerilme “0” olacağından integral denklemin (17) indeksi “-1” olur (Erdogan, 1978). Gauss-Chebyshev integrasyon formülü ile integral denklemin çözümü

$$\phi(r) = g(r) \sqrt{1-r^2} \quad (19)$$

olarak aranır (Erdogan,1978) ve  $g(r)$  fonksiyonunun N noktadaki değerleri için aşağıdaki cebrik denklem takımı elde edilir

$$\sum_{i=1}^N W_i^N \left[ \frac{1}{r_i - s_k} + \frac{a}{h} k(s_k, r_i) \right] g(r_i) = \frac{\beta}{R/h} \frac{\mu_0}{P/h} \frac{a}{h} s_k \quad k = 1, \dots, N+1 \quad (20)$$

denge denklemini ise

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^N W_i^N g(r_i) = \frac{1}{\pi} \quad (21)$$

haline gelir.  $r_i$  ve  $s_k$  ilgili Chebyshev polinomlarının kökleri ve  $W_i^N$  ise ağırlıklarıdır:

$$r_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad i = 1, \dots, N \quad (22a)$$

$$s_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right) \quad k = 1, \dots, N+1 \quad (22b)$$

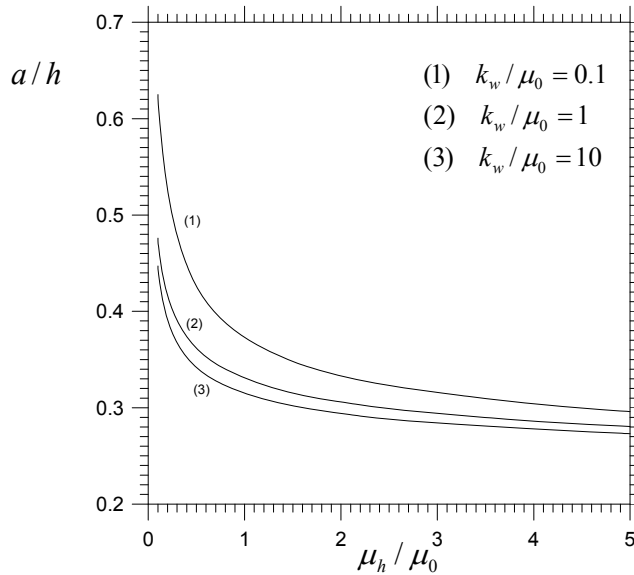
$$W_i^N = \frac{1-r_i^2}{N+1} \quad (22c)$$

Denklem (20)'de  $N$  tane bilinmeyen noktadaki  $g(r_i)$  değerleri için  $N+1$  tane denklem ortaya çıkmaktadır. Fazlalık olan bir denklem integral denklemi normalize ederken kullanıldığından  $N+1$  kollakasyon noktasından  $N$  tanesini kullanmak yeterlidir (Krenk, 1975). Böylelikle, bulunmak istenen  $N+1$  tane bilinmeyen  $g(r_i)$  ve  $a$  değerleri için (20) ve (21) denklemleri  $N+1$  tane denklem vermektedir. Denklem sistemi  $g(r_i)$  değerleri için doğrusal olsa da değme uzunluğunun  $a$  bilinmeyen olması problemi doğrusal olmayan hale getirmektedir. Bu nedenle değme uzunluğuna  $a$  başlangıçta rastgele bir değer verilerek doğrusal hale gelen (20) no'lu denklem sistemi çözülerek  $g(r_i)$  değerleri bulunur. Bu değerler istenilen hassaslıkta (21) no'lu denge şartını sağlatana kadar iterasyona devam edilir.

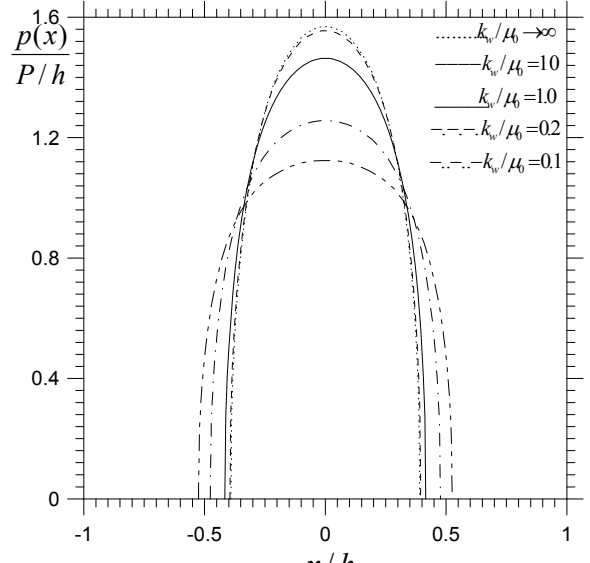
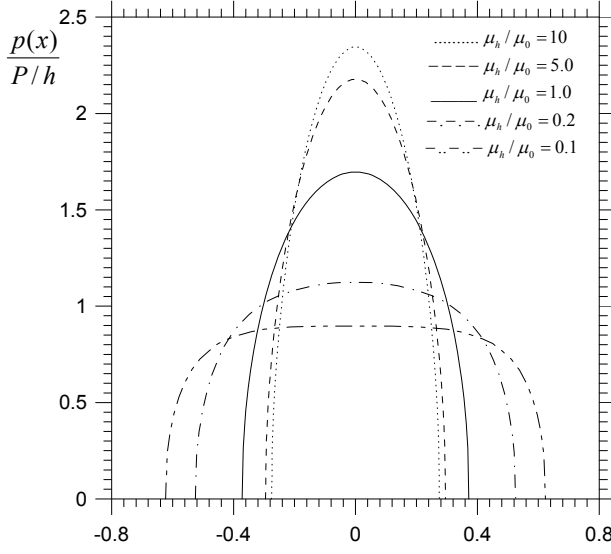
### 5. BULGULAR VE İRDELEME

Tabakanın kalınlık boyunca elastisite modülünü belirleyen ( $\gamma$ ) katsayısının, zemin elastik yay katsayısının ( $k_w$ ) değme uzunlukları ve değme gerilmeleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Çalışmada Poisson oranı  $\nu=0.2$ , yük faktörü  $P/(\mu_0 h)=0.002$  ve panç yarıçapı  $R/h=100$  sabit değerleri kullanılmıştır. İnhomojenite parametresinin ( $\gamma$ ) değişimi tabakanın elastisite modülünün  $E$  derinlik boyunca değişimini dolayısıyla alt yüzeyle üst yüzeyin kayma modülleri oranını ( $\mu_h/\mu_0$ ) belirlemektedir.

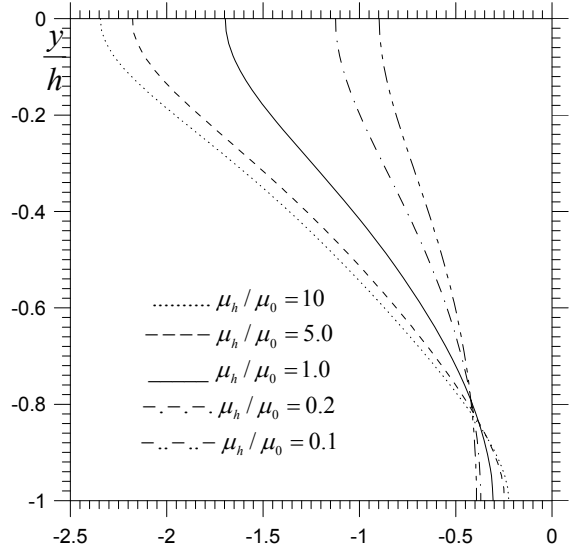
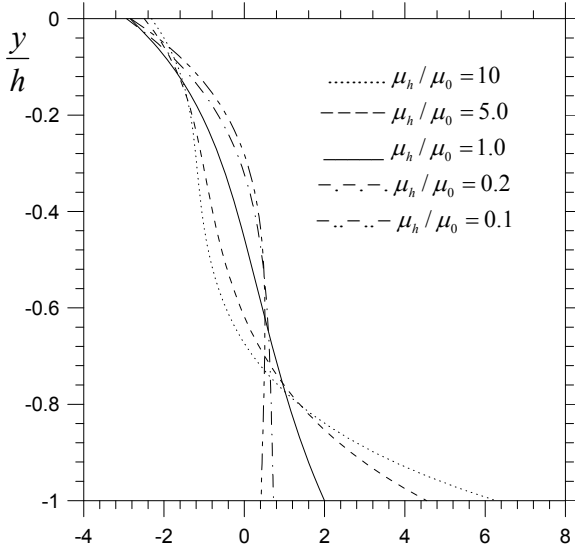
İlk olarak değme uzunluklarının  $k_w/\mu_0$  ve  $\mu_h/\mu_0$  değerleri ile değişimi araştırılarak, bulgular Şekil 2.'de verilmiştir. Elastik yay katsayısı  $k_w$  değeri arttıkça zemin rijitleşmekte ve tabakanın eğilmesi zorlaşmaktadır.  $\mu_h$  değerinin artması ise tabakanın üst yüzeyden alt yüzeye doğru elastisite modülünün artmasına ve dolayısıyla rijitleşmesine neden olmaktadır.  $\mu_0$  sabit kabul edildiğinde  $k_w$  ve  $\mu_h$  değerleri arttıkça tabaka ile panç (zımba) arasındaki değme uzunluğu azalmaktadır.



Şekil 2. Değme uzunluklarının  $\mu_h / \mu_0$  ve  $(k_w / \mu_0)$  ile değişimi  
( $\nu = 0.2, P/(\mu_0 h) = 0.002, R/h = 100$ ).



Şekil 3. Değme gerilmesinin  $\mu_h / \mu_0$  ile değişimi. Şekil 4. Değme gerilmesinin  $k_w / \mu_0$  ile değişimi. ( $\nu = 0.2, P/(\mu_0 h) = 0.002, R/h = 100, k_w / \mu_0 = 0.1$ ) ( $\nu = 0.2, P/(\mu_0 h) = 0.002, R/h = 100, \mu_h / \mu_0 = 0.2$ )



Şekil 5a.  $\sigma_x(0, y) / \mu_0$  nin  $\mu_h / \mu_0$  ile değişimi. Şekil 5b.  $\sigma_y(0, y) / \mu_0$  nin  $\mu_h / \mu_0$  ile değişimi. ( $\nu = 0.2, P/(\mu_0 h) = 0.002, R/h = 100, k_w / \mu_0 = 0.1$ )

Değme gerilmesinin  $k_w / \mu_0$  ve  $\mu_h / \mu_0$  değerleri ile değişimi Şekil 3-4'de verilmiştir. Değme gerilmesi en büyük değerlerini pançın hemen altında ( $x = 0$ ) almakta, değmenin bittiği noktalara yaklaştıkça azalarak sıfır olmaktadır.  $k_w / \mu_0$  ve  $\mu_h / \mu_0$  değerleri arttıkça değme gerilmesinin en büyük değeri de artmaktadır. Problemden  $k_w / \mu_0 \rightarrow \infty$  için rijit zemine



oturan FD tabakanın değme problemi özel hali elde edilebilir. Değme gerilmesinin en büyük değerinin rijit zemin için bulunan değeri aşmayacağı görülmektedir (Şekil 4).

$\sigma_x(0, y)/\mu_0$  normal gerilmesi tabakanın üst kısımlarında basınç alt kısımlarında ise çekme olarak etkisini göstermektedir (Şekil 5).  $\mu_h/\mu_0$  değeri arttığında özellikle tabakanın alt yüzeyinde çekme gerilmesi önemli oranda artmaktadır. Çatlak problemleri gözetildiğinde bu bulgudan yola çıkılarak malzemenin  $\gamma$  katsayısının seçimine dikkat edilmesi gerekir.

## 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Winkler zeminine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz değme problemi, elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak incelenmiştir. Nonhomojenlik katsayısının ( $\gamma$ ) dolayısıyla elastisite modülünün tabaka derinliği boyunca üstel olarak değişiminin değme gerilmesine ve değme uzunluğuna etkisinin büyük olduğu görülmüştür. Elastisite modülü derinlik boyunca arttığında değme uzunluğunun azaldığı buna bağlı olarak değme gerilmesinin en büyük değerinin ise arttığı görülmüştür. Zemin rijitleştikçe de değme uzunluğu azalmakta ve değme gerilmesinin en büyük değeri artmaktadır. Mesnetlenen alt yüzeyde elastisite modülü üst yüzeye göre büyük değerler aldığı için çekme gerilmesinde büyük artışlar görülmekte ve çatlak problemi gözetildiğinde  $\gamma$  katsayısının seçimine dikkat edilmelidir.

## KAYNAKLAR

- [1] Guler MA and Erdogan F. "Contact Mechanics of Graded Coatings" Int J Solids Struct, 41 3865–3889, 2004.
- [2] Guler MA and Erdogan F., "The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic And Cylindrical Stamps on Graded Coatings" Int J Mech Sci, 49 161–82, 2007.
- [3] Liu TJ and Wang YS., "Axisymmetric Two-Dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials With Arbitrary Spatial Variations of Material Properties" Acta Mech., 199 151–65, 2008.
- [4] Ke LL and Wang YS., "Frictionless Contact Problem of A Functionally Graded Coating With Exponentially Varying Modulus" Int J Solids Struct., 43 5779–98, 2006.
- [5] Ke LL and Wang YS. "Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally graded Materials" Eur J Mech. A/Solids, 26 171–88, 2007.
- [6] Liu TJ, Wang YS and Zhang C. "Axisymmetric Frictionless Contact of Functionally Graded Materials" Arch. Appl. Mech., 78 267–82, 2008.
- [7] Chen P and Chen S. "Contact Behaviors of A Rigid Punch And A Homogeneous Half-Space Coated With A Graded Layer" Acta Mech., 223 563-77, 2012.
- [8] Guler MA and Erdogan F. "Contact Mechanics of Two Deformable Elastic Solids With Graded Coatings".Mech. Mater. 38 633–47, 2006.
- [9] Yang J and Ke LL. "Two Dimensional Contact Problem For A Coating-Graded Layer-Substrate Structure Under A Rigid Cylindrical Punch" Int J Mech Sci 50 985–94, 2008.
- [10] El-Borgi S, Abdelmoula R, and Keer L. "A Receding Contact Problem Between A Functionally Graded Layer And A Homogeneous Substrate" Int J Solids Struct 43 658–74, 2006.
- [11] Rhimi M, El-Borgi S, Ben Said W, and Ben Jemaa F. "A Receding Contact Axisymmetric Problem Between A Functionally Graded Layer And A Homogeneous Substrate" Int J Solids Struct. 46 3633–42, 2009.

- [12] Choi HJ. "On The Plane Contact Problem of A Functionally Graded Elastic Layer Loaded By A Frictional Sliding Flat Punch" J Mech Sci Technol. 23 2703–13, 2009.
- [13] Bakirtas I. "The Problem of A Rigid Punch on A Nonhomogeneous Elastic Half Space". Int J Eng Sci 18 597-10, 1980.
- [14] Dempsey JP, Zhao ZG, Minnetyan L, and Li H. "Plane Contact of An Elastic Layer Supported By A Winkler Foundation". J Appl Mech 57, 974-80, 1990.
- [15] Dempsey JP, Zhao ZG, and Li H. "Axisymmetric Indentation of An Elastic Layer Supported By A Winkler Foundation" Int J Solids Struct 27, 73–87, 1991.
- [16] Birinci A and Erdöl R. "A Frictionless Contact Problem For Two Elastic Layers Supported By A Winkler Foundation" Struct Eng Mech 15, 331-44, 2003.
- [17] Wozniak M, Hummel A, and Pauk VJ. "Axisymmetric Contact Problems For An Elastic Layer Resting On A Rigid Base With A Winkler Type Excavitation" Int J Solids Struct 39 4117-31, 2002.
- [18] Matysiak SJ and Pauk VJ. "Edge Crack in An Elastic Layer Resting on A Winkler Foundation" Eng Fract Mech 70 2353–61, 2003.
- [19] Kadioglu S, Dag S, and Yahsi S. "Crack Problem For A Functionally Graded Layer on An Elastic Foundation" Int J Fracture 94 63–77, 1998.
- [20] Krenk S. "On Quadrature Formulas For Singular Integral Equations of The First And The Second Kind" Q Appl Math 33 225–32, 1975.
- [21] Erdogan F. "Mixed Boundary Value Problems in Mechanics" In: Nemat-Nasser S, editor. Mechanics Today, Vol. 4. Pergamon Press p.1-86, 1978.