



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

EKSENEL YÜKLEMeye MARUZ DEĞİŞKEN KESİTLİ EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN ÜSTEL MATRİS YÖNTEMİ İLE ENİNE TİTREŞİM ANALİZİ

Muhammet Mustafa Bahşı ve Mehmet Çevik

Celal Bayar Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü 45140, Manisa, Türkiye

mustafa.bahsi@cbu.edu.tr, m.cevik@cbu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada eksenel yüklemeye maruz kirişin enine titreşim denklemi olan yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemin üstel matris yöntemiyle çözümü sunulmuştur. Bu yöntemde temel olarak, üstel fonksiyonlar ve türevlerinin matris formları inşa edilmiş ve matris formlarının toplamlarına sıralama noktaları uygulanarak temel matris denklemi elde edilmiştir. Elde edilen bu matris denklemi cebirsel lineer denklem sistemine karşılık gelmektedir. Bu denklem sistemi temel matris işlemleri ile çözülmüştür. Elde edilen yaklaşık çözümlerin artık ve mutlak hataları incelenmiştir. Yöntemin etkinliğini gösterebilmek için birkaç sayısal problem örnek olarak ele alınmıştır.

ABSTRACT

This paper presents an exponential matrix method for the solution of transverse vibration of a beam subjected to an axial compressive load of N_0 , governed by the high order linear differential equation with variable coefficients. The problem is considered with the mixed conditions. In this method, the matrix forms of exponential functions and their derivatives are constructed basically and then the fundamental matrix equation is formed by the use of collocation points. This matrix equation corresponds to a system of linear algebraic equations and it is solved by basic matrix operations. The residual and absolute errors of the approximate solution are investigated. Some numerical examples are given to demonstrate the efficiency of the method.

1. GİRİŞ

Euler-Bernoulli kirişinin enine titreşimi birçok araştırmacı tarafından yaygın olarak çalışılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş modelinin ayrıntılı derivasyonlarını Inman [1], Meirovitch [2] ve Rao'nun [3] kitaplarında bulmak mümkündür. Ayrıca birçok araştırmacı farklı koşullar altındaki ve durumlardaki Euler-Bernoulli kirişlerinin titreşim analizlerini çeşitli matematiksel yöntemlerle yapmışlardır. Hsu et. al. [4], farklı koşullar altındaki düzgün olmayan kesitli

Euler-Bernoulli kirişinin serbest titreşim problemi için modifiye edilmiş Adomian decomposition yöntemini kullanmıştır. Mabie ve Rogers [5,6] bir çok durumda, farklı sınır koşulları ile verilmiş değişken kesitli kirişleri çalışmışlardır. Naguleswaran [7-9] kama ve koni şeklindeki Euler-Bernoulli kirişlerinin enine titreşimlerinin direk çözümlerini elde etmiştir. Lee et al. [10], Laplace dönüşümü alanındaki Green fonksiyonları ile düzenli olmayan kirişlerin titreşim analizini çalışmıştır. Kocatürk ve Şimşek [11] hareketli harmonik yüklere maruz viskoelastik kirişleri titreşimlerini Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde analiz etmişlerdir. Rosa ve Auciello [12] esnek sınır koşulları altındaki koni şeklindeki kirişlerin serbest titreşimini analizlerini Bessel fonksiyonlarını kullanarak yapmışlardır.

Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş modelinin analizinde ve modlara göre hareket denklemlerinin çözümünde üstel matris metodu yaklaşımı ile üstel çözümler elde etmeye odaklanacağız. Üstel polinomlar ve fonksiyonlar birçok bilim dalında farklı uygulamalara sahiptir. Üstel polinomların ya da üstel fonksiyonların [13] optik ve kuantumdaki elektronik analizlerinde [14] ve kontrol sistemlerinin güvenlik analizlerinde [15] ilgi çekici uygulamaları bulunmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen bazı lineer olmayan olaylar, üstel fonksiyonlar kullanılarak bu denklemlerin çözümünü elde etmede alternatif bir yöntem olarak sunulmuştur [16]. Birçok istatistiksel tartışmada, özellikle veri analizinde, üstel polinomlar anahtar rol oynamış [17], ve üstel polinomlar spectral sentezin yapı tuğlası olarak kabul edilmiştir [18]. Kısa bir süre önce, Ouerdiane and Ounaies [19], ortalama periyodik fonksiyonların üstel polinomların serileri olarak ifade edilmesi problemini ele almışlardır.

l boyunda, aksenal N_0 yüklemesi altındaki değişken kesitli Euler-Bernoulli kirişinin enine titreşimleri incelenecektir. Bu kirişin enine serbest titreşim denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + N_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l$$

olarak verilmektedir [20]. Burada $y(x, t)$ kirişin enine yerdeğiştirmesi (sehim), x herhangi bir noktanın kirişin başlangıç noktasına olan uzaklığı, t zaman, E elastisite modülü, $A(x)$ herhangi bir x konumundaki kesit alanı, $I(x)$ bir x konumundaki $A(x)$ kesit alanının atalet momenti ve ρ kiriş malzemesinin kütle yoğunluğu olarak tanımlanmıştır.

Her bir titreşim modu için $y(x, t)$ enine yerdeğiştirmesi

$$y(x, t) = w(x)h(t)$$

olarak yazılabilir. Burada $w(x)$ moda bağlı yerdeğiştirme ve $h(t)$, t zamanına bağlı harmonik fonksiyondur. Eğer ω , $h(t)$ harmonik fonksiyonunun dairesel fonksiyonu olarak tanımlanırsa

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 w(x)h(t)$$

olur. Burada ω enine titreşimin boyutsuz frekansı olarak tanımlanmıştır. N_0 aksel yükü altındaki düzgün olmayan kesitli elastik kirişin enine titreşim hareketi için verilen denklemin öz değer problemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) + N_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \rho A(x) \omega^2 w(x), \quad 0 < x < l \quad (1)$$

diferansiyel denkleminde indirgenmiş olur. Sınır şartlarını ise

$$\begin{aligned} w(0) &= \lambda_0 \\ w'(0) &= \lambda_1 \\ w(l) &= \lambda_2 \\ w''(l) &= \lambda_3 \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada $\lambda_k, (k = 0, 1, 2, 3)$ bilinen katsayılarıdır.

Üstel polinomlar $\{1, e^{-x}, e^{-2x}, \dots\}$ üstel taban kümesi üzerine kurulmalarına dayanır ve $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^b b_k e^{-kx}, 0 \leq x \leq \infty$ olarak tanımlanır [21]. Bu çalışmada amacımız üstel polinomların terimlerinin

$$w(x) \cong w_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n e^{-nx}, \quad 0 \leq x \leq b < \infty \quad (3)$$

formundaki yaklaşık çözümünü bulmaktır.

$\{1, e^{-x}, e^{-2x}, \dots\}$ üstel taban kümesi olarak alınmak üzere a_0, a_1, \dots, a_n bilinmeyen üstel polinom katsayıları belirlenmeye çalışılacaktır.

2. ÜSTEL MATRİS YÖNTEMİNDEKİ TEMEL MATRİS İLİŞKİLERİ

$w(x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq l < \infty$ aralığında yaklaşık açılımı olarak verilen (3) ifadesi aşağıdaki matris formunda verilebilir

$$[w_N(x)] = \mathbf{E}(x)\mathbf{A} \quad (4)$$

Burada

$$\mathbf{E}(x) = [1 \quad e^{-x} \quad e^{-2x} \quad \dots \quad e^{-Nx}] \quad (5)$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T.$$

(5)'te verilen $\mathbf{E}(x)$ matrisi ile x bağımsız değişkenine göre türevi $\mathbf{E}'(x)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{E}'(x) = \mathbf{E}(x)\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -N \end{bmatrix}.$$

matris denklemi ile verilir. Daha yüksek mertebeli türevler için bu işlemi devam ettirirsek

$$\begin{aligned} \mathbf{E}''(x) &= \mathbf{E}'(x)\mathbf{M} \\ &= \mathbf{E}(x)\mathbf{M}^2 \\ &\vdots \\ \mathbf{E}^{(k)}(x) &= \mathbf{E}(x)\mathbf{M}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{M}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-N)^k \end{bmatrix}$$

(4) ve (6)'daki bağıntıları kullanarak yaklaşık çözüm fonksiyonunun türevlerini

$$\begin{aligned} w^{(k)}(x) &= \mathbf{E}^{(k)}(x)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{E}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde yazabiliriz.

3. ÜSTEL SIRALAMA (KOLLOKASYON) YÖNTEMİ

(4) ve (7) matris bağıntılarını (1) denkleminde yerine koyarak problemin matris formunu elde ederiz.

$$\{EI''(x)\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^2 + EI(x)\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^4 + N_0\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^2 - \rho A(x)\omega^2\mathbf{E}(x)\}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Elde edilen temel matris formu (8) yeniden düzenlenerek kompakt formda yazılırsa

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (9)$$

burada

$$\mathbf{W}(x) = EI''(x)\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^2 + EI(x)\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^4 + N_0\mathbf{E}(x)\mathbf{M}^2 - \rho A(x)\omega^2\mathbf{E}(x)$$

olduğu açıkça görülmektedir. (9) denkleminin çözüm aralığındaki $x_s = \frac{l}{N}s$, ($s = 0, 1, \dots, N$) sıralama noktalarını uygularsak matris denkleminiz aşağıdaki matris denklemin sistemine dönüşür.

$$\mathbf{W}(x_s)\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (10)$$

Denklemin sistemi düzenlenerek aşağıdaki matris denklemin formunda yazılabilir.

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \text{ yada } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (11)$$

burada, denklem (10) daki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) \\ \mathbf{W}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(x_N) \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

Aynı matris notasyonu ile devam edebilmek için (2)'de verilen sınır şartları da (4)-(7) matris denklemleri kullanılarak

$$[\mathbf{U}; \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(0) & ; & \lambda_0 \\ \mathbf{E}(0)\mathbf{M} & ; & \lambda_1 \\ \mathbf{E}(l) & ; & \lambda_2 \\ \mathbf{E}(l)\mathbf{M}^2 & ; & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

matris formunda yazılır.

Problemin (11) formundaki temel matris denkleminin uygun dört satırı silinip, matris formunda yazılan sınır şartlarının (12) dört satırı bunların yerine yazılarak $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ eklenmiş matris formu elde edilir. Yani

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (13)$$

matris denklemi elde edilir. Sonuç olarak $\det|\tilde{\mathbf{W}}| \neq 0$ olmak üzere bilinmeyen katsayılar matrisi olan \mathbf{A} matrisi $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}$ olarak hesaplanır. Böylelikle elde edilen $N + 1$ adet katsayı yardımıyla problemin yaklaşık çözümü (3) de verilen üstel formda elde edilmiş olur.

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde (2) sınır koşulları altında verilen aksenal yüklemeye maruz kirişin sabit kesitli ve değişken kesitli olma durumundaki ilk üç mod yapısının sayısal sonuçları sunulmuştur. Ayrıca aksenal yükün parametrik olarak değişimi de grafiklerle sunulmuştur. Tüm sayısal işlemlerde Maple paket programı kullanılmıştır.

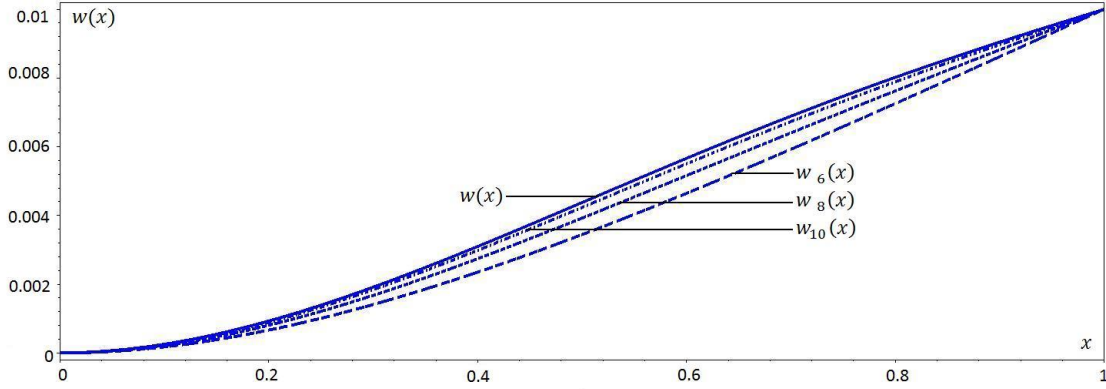
Örnek 1: Sabit kesitli $1m$ uzunluktaki ankastre-serbest kirişin geometrik ve fiziksel parametreleri $E = 20 \times 10^{10} N/m^2$, $\rho = 8 \times 10^3 kg/m^3$, $A(x) = 0.01m^2$, $I(x) = 8.33 \times 10^{-6}m^4$ ve $N_0 = 100N$. Sınır şartları $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.01$ ve $\lambda_3 = 0$.

Kesme sınırının (N) 6 ve 8 değerleri için temel matrisler oluşturulmuş ve katsayılar matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen katsayılar matrisleri yardımıyla birinci mod yer değiştirme fonksiyonları

$$w_6(x) = 0.03454951907 - 0.1112688373e^{-x} + 0.1790689348e^{-2x} \\ - 0.2112160137e^{-3x} + 0.1722887750e^{-4x} - 0.07815817593e^{-5x} \\ + 0.01473579808e^{-6x}$$

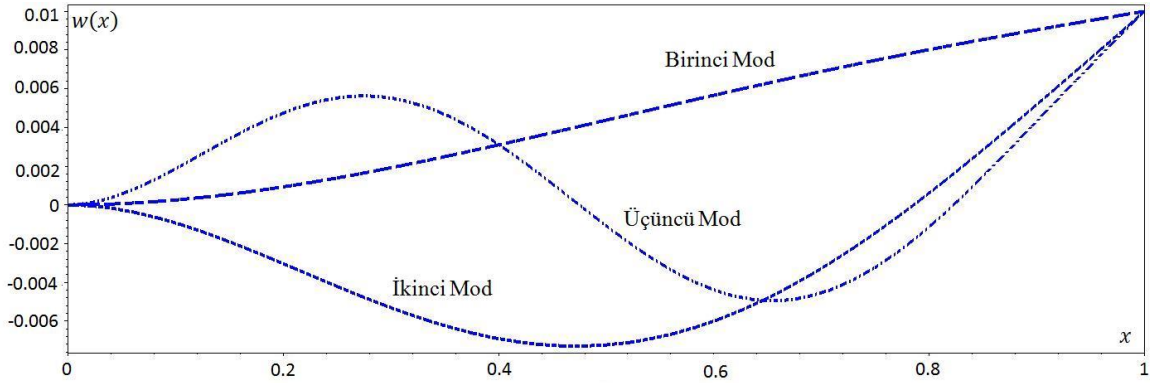
$$w_8(x) = 0.05478702010 - 0.3777998567e^{-x} + 1.540917696e^{-2x} - 3.865378467e^{-3x} \\ + 5.988165288e^{-4x} - 5.815166933e^{-5x} + 3.479446114e^{-6x} \\ - 1.178363580e^{-7x} + 0.1733927202e^{-8x}$$

olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, kesme sınırının artmasıyla birlikte tam çözüme [20] daha da yakınlaştığı Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1. Birinci mod yapısının farklı N değerleri için tam çözüme yaklaşımı

İlk üç mod için üstel matris yöntemi ile elde edilmiş olan mod yapıları Şekil 2’de görülmektedir. Her üç moda da etkin yaklaşık çözümler elde edilmiş ve çözümler tam çözüme iyi bir yaklaşım göstermiştir. Birinci mod çözümü 10^{-8} , ikinci mod çözümü 10^{-7} basamak hassasiyeti ve üçüncü mod çözümü ise 10^{-6} basamak hassasiyet ile hesaplanmıştır.



Şekil 2. İlk üç mod titreşiminin $N = 20$ kesme sınırı için üstel matris çözümü

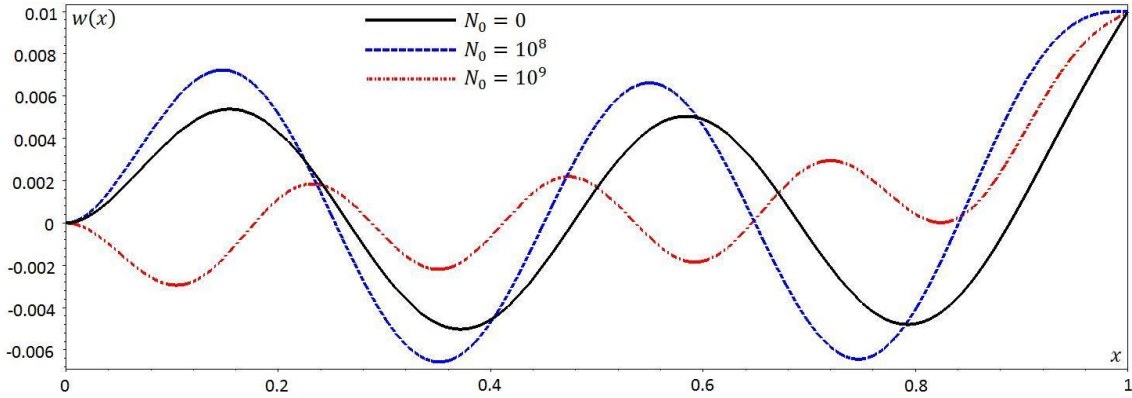
Her modda kesme sınırının artmasıyla çözümün tam çözüme daha da yakınlaştığı Tablo 1’de görülmektedir.

Tablo 1. Üstel matris çözümünün ilk üç mod titreşiminin $N = 10, 20$ kesme sınırları için belli noktalardaki mutlak hata değerleri

x	Birinci Mod		İkinci Mod		Üçüncü Mod	
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$
0	0	0	0	0	0	0
0.2	3.852e-05	9.629e-09	5.559e-04	2.927e-07	2.720e-03	6.847e-06
0.4	1.117e-04	2.789e-08	1.324e-03	6.978e-07	1.726e-03	4.324e-06

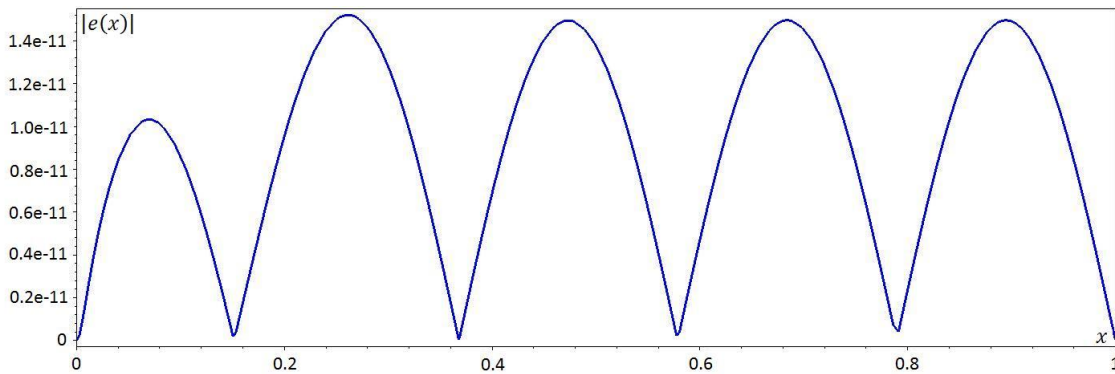
0.6	1.592e-04	4.016e-08	1.370e-03	7.139e-07	2.835e-03	6.430e-06
0.8	1.295e-04	3.338e-08	6.800e-04	3.258e-07	2.247e-03	4.430e-06
1	0	0	0	0	0	0

Eksenel yükün değişiminin etkisini görebilmek için dördüncü mod da üç farklı durumu incelenmiştir ($N_0 = 0, N_0 = 10^8, N_0 = 10^9$). Her üç duruma ait mod yapıları Şekil 3’ te görülmektedir. Hesaplanan dördüncü mod çözümleri $N = 50$ kesme sınırı için on basamak hassasiyeti ile hesaplanmıştır.



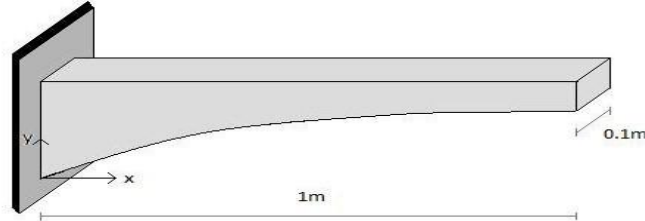
Şekil 3. Farklı eksenel yüklerin ($N_0 = 0, 10^8, 10^9$) dördüncü mod titreşiminin $N = 50$ kesme sınırı için üstel matris çözümü

Ayrıca Şekil 4’te $N_0 = 10^9$ eksenel yük değeri için dördüncü mod titreşiminin $N = 50$ kesme sınırı için üstel matris çözümünün mutlak hata fonksiyonu verilmiştir. Mutlak hata $|e_N(x)| = |w(x) - w_N(x)|$ şeklinde hesaplanmıştır. Mutlak hatanın 10^{-11} mertebesinde olduğu görülmektedir.



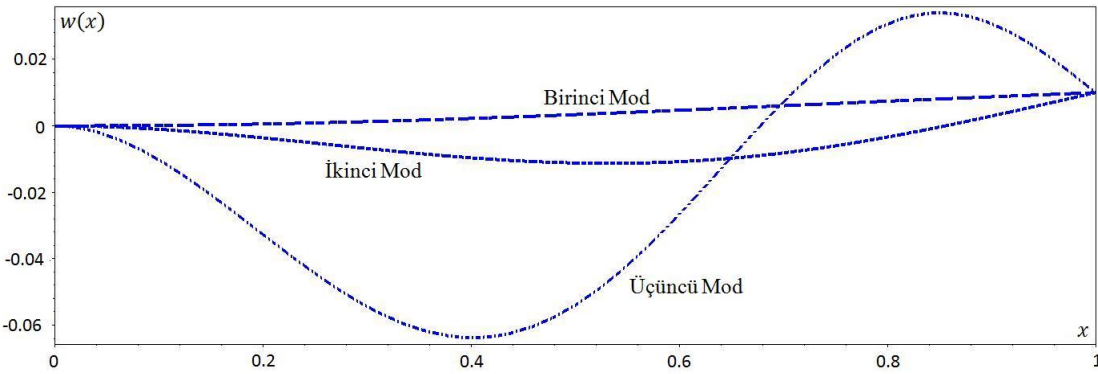
Şekil 4. $N_0 = 10^9$ eksenel yük değerinde dördüncü mod için üstel matris çözümünün mutlak hata fonksiyonu

Örnek 2: Değişken kesitli 1m uzunluktaki ankastre-serbest kirişin yüksekliği değişimi $h(x) = 1/5 \times e^{-x}$ olarak modellenmiş (Şekil 5), ayrıca kirişin geometrik ve fiziksel parametreleri $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $A(x) = 1/5 \times x \times e^{-x} \text{ m}^2$, $I(x) = 2/3 \times 10^{-4} \times e^{-3x} \text{ m}^4$ ve $N_0 = 100\text{N}$ olarak verilmiştir. Sınır şartları ise $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.01$ ve $\lambda_3 = 0$.



Şekil 5. Değişken kesitli ankastre-serbest kiriş

Şekil 5'te görülen değişken kesitli kirişin yüksekliği $h(x)$ fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Verilen değerler ve yükseklik fonksiyonu üstel matris yöntemi ile kesme sınırı $N = 40$ alınarak çözülmüş ve değişken katsayılı diferansiyel denklemden elde edilen ilk üç mod yapısı Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6. Değişken kesitli konsol kiriş için üstel matris yöntemi ile bulunan mod yapıları

Tablo 2. $N = 10, 20, 30$ ve 40 kesme sınırları için üstel matris metodu ile hesaplanan moda bağlı yerdeğiştirme fonksiyonlarının sayısal değerleri

x	Birinci Mod					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$w_{10}(x)$	0	0.0004316	0.0018416	0.0041448	0.0069901	0.01
$w_{20}(x)$	0	0.0005617	0.0022273	0.0046896	0.0074173	0.01
$w_{30}(x)$	0	0.0005618	0.0022276	0.0049600	0.0074175	0.01

$w_{40}(x)$	0	0.0005618	0.0022276	0.0049600	0.0074175	0.01
İkinci Mod						
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$w_{10}(x)$	0	-0.0019694	-0.0049901	-0.0048923	0.0005236	0.01
$w_{20}(x)$	0	-0.0036348	-0.0096300	-0.0107871	-0.0033719	0.01
$w_{30}(x)$	0	-0.0036372	-0.0096365	-0.0107953	-0.0033772	0.01
$w_{40}(x)$	0	-0.0036372	-0.0096365	-0.0107953	-0.0033772	0.01
Üçüncü Mod						
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$w_{10}(x)$	0	-0.0057342	-0.0109957	-0.0363993	0.0085768	0.01
$w_{20}(x)$	0	-0.0319057	-0.0620351	-0.0258557	0.0299580	0.01
$w_{30}(x)$	0	-0.0327904	-0.0637624	-0.0265955	0.0307213	0.01
$w_{40}(x)$	0	-0.0327904	-0.0637624	-0.0265955	0.0307213	0.01

Tablo 2’de ilk üç mod da üstel matris metodu ile kesme sınırı $N = 10, 20, 30$ ve 40 için yerdeğiştirme fonksiyonunun $w(x)$ aldığı değerler verilmiştir. Değerler incelendiğinde $N = 20$ ’ de iyi bir yakınsamanın sağlandığı görülmektedir. Ayrıca $N = 30$ ve $N = 40$ ’ taki yakınsamanın aynı olması kesme sınırının $N = 30$ olarak seçilebileceğini ifade etmektedir.

5. SONUÇLAR

Eksenel yüklemeye maruz kirişin enine titreşim denklemi üstel matris yöntemi ile çözümlenerek mod yapıları elde edilmiştir. Sistemin titreşim denklemi üstel fonksiyonların matris formları kullanılarak matris denklem sistemi haline getirilmiştir ve sistem bilgisayar yazılımı ile rahatlıkla çözülmüştür. Bu yöntemle elde edilen sonuçların tam çözüme hızla yakınsadıkları görülmüştür. Yapılan hata analizleri bu durumu teyit etmektedir. Yöntemin avantajı sistematik ve hassas sonuçlar vermesidir. Yöntemin etkinliğini gösterebilmek için bir tane sabit kesitli bir tane değişken kesitli kiriş örneği çözülmüştür. Elde edilen sonuçların tam çözümle uyumlu oldukları görülmüştür. Bu yöntem tam çözümü bilinmeyen titreşim denklemlerine de rahatlıkla uygulanabilir olması nedeniyle avantaj sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Inman, D. J., “Engineering Vibration”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc. 1994.
- [2] Meirovitch, L., “Principles & Techniques of Vibrations”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc.1997.
- [3] Rao, S. S., “Mechanical Vibrations”, 3rd Edition, Reading Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

- [4] Juang-Chang Hsu, Hsin-Yi Lai, C.K. Chen, “Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method”, *Journal of Sound and Vibration* 318, 965-981, 2008.
- [5] Mabie, H.H., Rogers, C.B., “Transverse vibrations of tapered cantilever beams with end supports”, *Journal of the Acoustical Society of America* 44 (4) 1739-1741, 1968.
- [6] Mabie, H.H., Rogers, C.B., “Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams with end support and with end mass”, *Journal of the Acoustical Society of America* 55, 986-991, 1974.
- [7] Naguleswaran, S., “Vibration of an Euler–Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth”, *Journal of Sound and Vibration* 153 (3) 509-522, 1992.
- [8] Naguleswaran, S., “A direct solution for the transverse vibration of Euler–Bernoulli wedge and cone beams”, *Journal of Sound and Vibration* 172 (3) 289-304, 1994.
- [9] Naguleswaran, S., Comments on “Vibration of non-uniform rods and beams,” *Journal of Sound and Vibration* 195 (2) 331–337, 1996.
- [10] Lee, S.Y., Ke, H.Y., Kuo, Y.H., “Exact solutions for the analysis of general elastically restrained non-uniform beams”, *Transactions of the ASME: Journal of the Applied Mechanics* 59, 205-212, 1992
- [11] Kocatürk, T., Şimşek, M., “Vibration of viscoelastic beams subjected to moving harmonic loads”, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences* 2004/3, 116-128, 2004.
- [12] De Rosa, M.A., Auciello, N.M., “Free vibrations of tapered beams with flexible ends”, *Computers & Structures* 60 (2) 197-202, 1996.
- [13] Mathews, J. H., Howell, R. W., “Complex Analysis for Mathematics and Engineering”, Johns and Bartlett Learning, 2012.
- [14] Alharbi, F., “Predefined Exponential Basis Set for Half-Bounded Multi Domain Spectral Method”, *Applied Mathematics*, 1 (3), 146-152, 2010.
- [15] Xu, M., Chen, L., Zeng, Z., Li, Z., “Reachability analysis of rational eigenvalue linear systems”, *International Journal of Systems Science*, 41 (12), 1411-1419, 2010.
- [16] Alipour, M. M., Domairry, G., Davodi, A. G., “An application of exp-function method to approximate general and explicit solutions for nonlinear Schrödinger equations”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27 (5), 1016-1025, 2011.
- [17] Shanmugam, R., “Generalized exponential and logarithmic polynomials with statistical applications”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 19 (5), 659-669, 1988.
- [18] Szekelyhidi, L., “On the extension of exponential polynomials”, *Mathematica Bohemica*, 125 (3), 365-370, 2000.
- [19] Ouerdiane, H., Ounaies, M., “Expansion in series of exponential polynomials of mean-periodic functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*”, 57 (5), 469-487, 2012.
- [20] Reddy, J. N., “An Introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill Higher Education, 2005.
- [21] Hewitt, E., Ross, K. A., “Abstract Harmonic Analysis”, Volumes 1-2, Springer Verlag, 1970.