



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## FONKSİYONEL DEĞİŞİMLİ MALZEMELERLE KAPLANMIŞ METAL SİLİNDİRİK KABUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİ

Abdullah Avey, U. Bestelci, M. Avcar, P. ÖZYİĞİT  
Süleyman Demirel Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta

### ABSTRACT

The free vibration problem of the metal cylindrical shell coated with functionally graded materials (FGMs) in the inner and outer surfaces is investigated. The basic relations and modified Donnell type basic equations of metal cylindrical shells coated with FGMs are derived and solved by using Galerkin method. Analytical expression for the dimensionless frequency parameter of the metal cylindrical shell coated with FGMs is found. Finally, the effects of variations of volume fractions, shell characteristics and variations of the thickness of inner and outer coatings on the values of the dimensionless frequency parameters of free vibrations for coated cylindrical shells are studied numerically.

**Keywords:** Functionally graded materials (FGMs), functionally graded (FG) coating, metal cylindrical shell, free vibration, dimensionless frequency parameter

### ÖZET

İç ve dış yüzeyleri fonksiyonel değişimli malzemelerle (FDM'ler) kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların temel bağıntıları ve değiştirilmiş Donnell tipi temel denklemleri türetilmekte ve Galerkin Yöntemi uygulanarak çözülmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşiminin boyutsuz frekans parametresi için analitik ifade bulunmaktadır. Analizler kısmında, kaplamalı silindirik kabukların serbest titreşimlerinin boyutsuz frekans parametrelerinin minimum değerlerine, hacim bileşenleri değişiminin, kabuk

karakteristiklerinin, iç ve dış tabakaların kalınlıkları değişiminin etkileri sayısal olarak incelenmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel değişimli malzeme (FDM), Fonksiyonel değişimli (FD) kaplama, metal silindirik kabuk, serbest titreşim, boyutsuz frekans parametresi

## 1. GİRİŞ

Günümüzde yapı elemanlarının kullanım ömrü ve performansının artırılması için değişik kaplama türleri kullanılmaktadır. Seramik, ısı bariyer kaplamaları türbinlerde verimi artırmak ve yakıt ekonomisi sağlamak amacı ile kullanılır. Daha uzun kullanım süresi ve yüksek bir kesme performansı elde etmek için kesici kalemler aşınmaya dayanıklı seramik filmler ile kaplanır [1]. Genelde bu tür kaplamalar yapı elemanının üzerine tek katmanlı homojen kaplama olarak uygulanır. Düşük toklukları ve ısı genleşme katsayılarındaki uyumsuzluklar sebebiyle bu tür kaplamalar çatlamaya maruz kalmaktadır. Bu nedenle tasarım sırasında, temas yüzeyleri arasında meydana çıkan gerilme dağılımlarının düzenlenmesi önemlidir. Diğer taraftan malzeme biliminin ilerlemesiyle birlikte malzeme özelliklerinin malzeme içerisinde konuma bağlı olarak değiştirilebildiği çeşitli üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler kullanılarak üretilen malzemeler fonksiyonel değişimli malzeme (FDM) olarak isimlendirilmekte olup genelde aşınmaya karşı direnç ve yüksek sıcaklıklara dayanabilme özelliği sağladıkları için nükleer reaktörlerinde, füzelerde, uzay araçlarında, savunma ve otomotiv sanayide, motorlarda, değişik makine elemanlarında, örneğin rulmanlarda, dişlilerde, kesici uçlarda vs kaplamalar olarak kullanılmaktadırlar [2]. FDM'den oluşan bir kaplamaya önceden belirlenmiş bir malzeme görüntüsü verilebilmekte ve malzeme özellikleri, kaplamanın kalınlığı doğrultusunda sürekli değiştirilebilmektedir [3]. Dolayısıyla, FDM kaplamayı oluşturan malzemenin özellikleri kalınlık koordinatının bir fonksiyonu olup; kaplamanın altındaki veya üstündeki tabakanın malzeme özelliklerine eşit olmakla beraber kaplamanın üstüne veya altına doğru fonksiyonel olarak değişebilmektedir. Böylece, FDM kaplama kullanılarak yapı elemanının alt veya üst tabakası ile kaplama arasındaki uyumsuzluklar engellenebilir. İlk olarak mekanikçiler FDM'den oluşan kaplamaların kırılma davranışlarını incelemişlerdir [4]. FDM'lerden oluşan yapı elemanları üzerine yapılmış çok sayıda çalışmalar içinde, en ilgi çekici konulardan biri de pür FDM silindirik kabukların titreşim analizleridir [5-8]. Günümüz teknolojisinde, FDM kaplamaların sık şekilde kullanılması, FDM kaplı yapı elemanlarının titreşim ve stabilite davranışlarının incelenmesi ile ilgili bazı önemli çalışmaların ortaya çıkmasına vesile olmuştur [9-11].

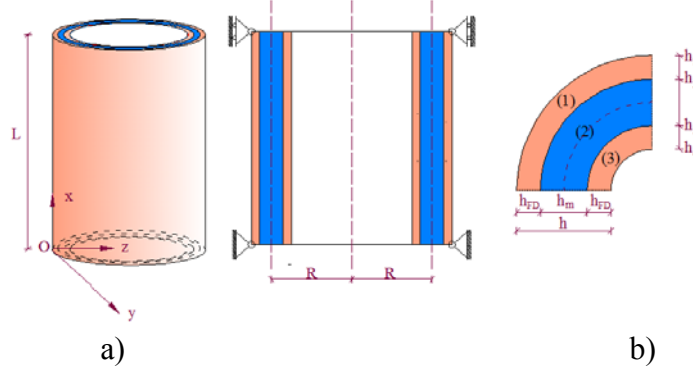
Yapılan literatür taraması FD kaplı metal silindirik kabuğun titreşim probleminin henüz yeteri kadar çalışılmadığını ortaya koymuştur. Bu çalışmada, iç ve dış yüzeyleri FD kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir.

## 2. TEMEL BAĞINTI VE DENKLEMLER

İç ve dış yüzeyi FD kaplı metal silindirik kabuk Şekil 1'de sunulmaktadır. FD kaplı silindirik kabuk üç tabakalı sistem oluşturmaktadır.  $Oxy$  koordinat sistemi kabuğun sol kenarında ve üç tabakalı silindirik kabuğun referans yüzeyinde göz önüne alınmaktadır.  $Ox$  eksenini ana doğrultuda,  $Oy$  eksenini çevresel doğrultuda,  $Oz$  eksenini ise söz konusu iki eksene diktir (Şekil

1a). Silindirik kabuğun uzunluğu  $L$ , yarıçapı  $R$ , genel kalınlığı  $h = 2h_{FD} + h_m$  olup  $h_m$  çekirdek kalınlığı ve  $h_{FD}$  FD kaplamaların her birinin kalınlığı'dır (Şekil 1b).

Silindirik kabuğun iç ve dış yüzeylerindeki FD kaplamaların Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu için şu ifadeler elde edilir [9-11]:



Şekil 1. a) İç ve dış yüzeyi FD kaplı silindirik kabukta koordinat sistemi, b) tabakaların diziliş şekli; (1) FD dış kaplama, (2) Metal, (3) FD iç kaplama

$$\begin{aligned}
 E_{FD}^{ic} &= E_s + (E_m - E_s)V_m^{ic} \\
 \nu_{FD}^{ic} &= \nu_s + (\nu_m - \nu_s)V_m^{ic} \\
 \rho_{FD}^{ic} &= \rho_s + (\rho_m - \rho_s)V_m^{ic}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 E_{FD}^{dis} &= E_s + (E_m - E_s)V_m^{dis} \\
 \nu_{FD}^{dis} &= \nu_s + (\nu_m - \nu_s)V_m^{dis} \\
 \rho_{FD}^{dis} &= \rho_s + (\rho_m - \rho_s)V_m^{dis}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Burada  $E_m, \nu_m, \rho_m$  ve  $E_s, \nu_s, \rho_s$ , sırasıyla, metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeyindeki FD kaplamaların metal ve seramik yüzeylerinin Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğudur.  $V_m^{ic}$  ve  $V_m^{dis}$ , sırasıyla, metal silindirik kabuğun içindeki ve dışındaki kaplamaların metal hacim kesirleri olup şu bağıntılar geçerlidir:

$$V_m^{ic} + V_s^{ic} = 1; \quad V_m^{dis} + V_s^{dis} = 1 \tag{3}$$

Burada  $V_s^{ic}$  ve  $V_s^{dis}$  sırasıyla, metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeyindeki FD kaplamaların seramik hacim kesirleridir.

Metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeylerindeki FD kaplamasının hacim kesirleri kuvvet fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir [9-11]:

$$V_m^{ic} = \left( \frac{z_4 - Z}{z_4 - z_3} \right)^d, \quad V_m^{dis} = \left( \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^d \quad (4)$$

Burada  $Z = z/h$ ,  $z_1 = h_1/h$ ,  $z_2 = h_2/h$ ,  $z_3 = h_3/h$ ,  $z_4 = h_4/h$  boyutsuz koordinatlarıdır;  $d$  ( $0 \leq d < +\infty$ ) hacim kesir indeksi olup FD kaplama kalınlığı boyunca malzeme değişimi profilini belirler.

FD kaplama ile zenginleştirilmiş metal silindirik kabuğun temas yüzeylerinde metal hacim kesirleri aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$V_m^{ic} = 1 \quad z = h_3 \text{ ise}; \quad V_m^{dis} = 1 \quad z = h_2 \quad (5)$$

Orta tabaka zenginleştirilmiş metalden oluşmakta ve malzeme özellikleri, yani Young modülü  $E_m$ , Poisson oranı  $\nu_m$  ve yoğunluk  $\rho_m$  olup ele alınan sıcaklık durumları için sabittirler.

Söz konusu özellikler bir arada dikkate alındığında FD kaplamalı metal silindirik kabuğun malzeme özelliklerinin (Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğun) matematiksel modelleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$[E(Z), \nu(Z), \rho(Z)] = \begin{cases} E_{FD}^{dis}, \nu_{FD}^{dis}, \rho_{FD}^{dis} & -z_1 \leq Z \leq -z_2 \\ E_m, \nu_m, \rho_m & -z_2 \leq Z \leq z_3 \\ E_{FD}^{ic}, \nu_{FD}^{ic}, \rho_{FD}^{ic} & z_3 \leq Z \leq z_4 \end{cases} \quad (6)$$

Doğrusal kabuk teorisi kullanıldığında silindirik kabuğun değiştirilmiş Donnell tipi hareket ve deformasyon uygunluk denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [12]:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \frac{T_{22}}{R} - \rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

Burada  $M_{11}$  ve  $M_{22}$  sırasıyla,  $Ox$  ve  $Oy$  eksenlerine göre eğilme momentleridir;  $M_{12}$ , burulma momentidir;  $T_{22}$ ,  $Oy$  doğrultusundaki normal kuvvettir;  $e_{11}$  ve  $e_{22}$  kaplamalı metal silindirik kabuğun referans yüzeyindeki  $Ox$  ve  $Oy$  doğrultularındaki normal deformasyon bileşenleri ve  $e_{12}$  referans yüzeydeki kayma deformasyonudur;  $w$  radyal yer değiştirmesinin

eğrilik merkezine doğru yönü pozitif kabul edilmektedir;  $\rho_t$  yoğunluk parametresi olup şu tanım geçerlidir [11]:

$$\rho_t = \int_{-h_1}^{-h_2} \rho_{FD}^{dis}(Z) dz + \rho_m (h_2 + h_3) + \int_{h_3}^{h_4} \rho_{FD}^{ic}(Z) dz \quad (9)$$

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki integrallerden bulunur [11]:

$$T_{ij} = \int_{-h_1}^{-h_2} \sigma_{ij}^{(1)} dz + \int_{-h_2}^{h_3} \sigma_{ij}^{(2)} dz + \int_{h_3}^{h_4} \sigma_{ij}^{(3)} dz; \quad M_{ij} = \int_{-h_1}^{-h_2} \sigma_{ij}^{(1)} z dz + \int_{-h_2}^{h_3} \sigma_{ij}^{(2)} z dz + \int_{h_3}^{h_4} \sigma_{ij}^{(3)} z dz \quad (10)$$

Burada  $\sigma_{11}^{(k)}$  ve  $\sigma_{22}^{(k)}$ , FD kaplamalı metal silindirik kabuğun uygun tabakalarındaki sırasıyla,  $O_x$  ve  $O_y$  doğrultularındaki normal gerilmeler;  $\sigma_{12}^{(k)}$ , FD kaplamalı metal silindirik kabuğun tabakalarındaki kayma gerilmeleridir ve  $k = 1,2,3$  olup tabaka sayısını göstermektedir.

Kirchhoff-Love hipotezinin tüm kabuk için geçerli olduğu varsayıldığından tabakaların birinin diğerine basıncı ihmal edilebilir. Bu varsayımlar dikkate alındığında, yukarıda tanımlanan kaplamalı silindirik kabuk için referans yüzeyden  $z$  uzaklığındaki yüzeyin deformasyon bileşenleri ile referans yüzeyin deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi olur [12]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{22} = e_{22} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{12} = e_{12} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

Burada  $\varepsilon_{11}$  ve  $\varepsilon_{22}$  içten ve dıştan kaplamalı metal silindirik kabuğun referans yüzeyinden  $z$  uzaklığındaki yüzeydeki normal deformasyon bileşenleri ve  $\varepsilon_{12}$  referans yüzeyinden  $z$  uzaklığındaki yüzeydeki kayma deformasyonudur.

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun her tabakası için Hooke kuralı geçerli olup gerilme-deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar ince kabuk teorisi çerçevesinde aşağıdaki şekilde yazılabilir [13]:

$$\sigma_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{11} + Q_{12}^{(k)} \varepsilon_{22}, \sigma_{11}^{(k)} = Q_{12}^{(k)} \varepsilon_{11} + Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{22}, \sigma_{12}^{(k)} = Q_{66}^{(k)} \varepsilon_{12} \quad (12)$$

Burada,  $Q_{ij}^{(k)}$ , ( $i, j = 1,2,6; k = 1,2,3$ ), FD kaplama ve metal malzeme özelliklerine bağlı nicelikleri içeren katsayılar olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{(1)} &= \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1 - [v_{FD}^{dis}(Z)]^2}, Q_{12}^{(1)} = \frac{v_{FD}^{dis}(Z)E_{FD}^{dis}(Z)}{1 - [v_{FD}^{dis}(Z)]^2}, Q_{66}^{(1)} = \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1 + v_{FD}^{dis}(Z)}, \\
Q_{11}^{(2)} &= \frac{E_m}{1 - v_m^2}, Q_{12}^{(2)} = \frac{v_m E_m}{1 - v_m^2}, Q_{66}^{(2)} = \frac{E_m}{1 + v_m^2} \\
Q_{11}^{(3)} &= \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1 - [v_{FD}^{ic}(Z)]^2}, Q_{12}^{(3)} = \frac{v_{FD}^{ic}(Z)E_{FD}^{ic}(Z)}{1 - [v_{FD}^{ic}(Z)]^2}, Q_{66}^{(3)} = \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1 + v_{FD}^{ic}(Z)}
\end{aligned} \tag{13}$$

Temel denklemlerin çıkarılışı Donnell kabuk teorisine dayandığı için  $\Phi_1 = \Phi h$  Airy gerilme fonksiyonu kullanılmaktadır.  $T_{11}, T_{22}, T_{12}$  kuvvet bileşenleriyle  $\Phi_1$  Airy gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntılar şu şekildedir [12]:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, T_{12} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \tag{14}$$

(11) ifadesi (12) bağıntılarında yerine yazılıp elde edilen bağıntılar (10) integrallerinde yerine yazılarak elde edilen sonuçlar (14) bağıntıları ile birlikte (7) ve (8) denklemlerinde yerine yazıldığında, bazı işlemlerden sonra aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
C_2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2(C_1 - C_5) \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + C_2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
- 2(C_4 + C_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
B_1 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2(B_2 + B_5) \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + B_1 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} - B_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(B_3 - B_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
- B_4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Burada şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= a_{11}B_1 + a_{21}B_2, C_2 = a_{11}B_2 + a_{21}B_1, C_3 = a_{11}B_3 + a_{21}B_4 + a_{12}, \\
 C_4 &= a_{11}B_4 + a_{21}B_3 + A_{22}, C_5 = a_{61}B_5, C_6 = a_{61}B_6 + a_{62}B_1 = a_{10}L_0, \\
 B_2 &= -a_{20}L_0, B_3 = (a_{20}a_{21} - a_{11}a_{10})L_0, B_4 = (a_{20}a_{11} - a_{21}a_{10})L_0, \\
 B_5 &= 1/a_{60}, B_6 = -a_{61}/a_{60}, L_0 = (a_{10}a_{10} - a_{20}a_{20})^{-1} \\
 a_{1k_1} &= \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1 - [v_{FD}^{dis}(Z)]^2} z^{k_1} dz + \frac{E_m}{1 - v_m^2} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1 - [v_{FD}^{ic}(Z)]^2} z^{k_1} dz \\
 a_{2k_2} &= \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{v_{FD}^{dis}(Z)E_{FD}^{dis}(Z)}{1 - [v_{FD}^{dis}(Z)]^2} z^{k_1} dz + \frac{v_m E_m}{1 - v_m^2} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{v_{FD}^{ic}(Z)E_{FD}^{ic}(Z)}{1 - [v_{FD}^{ic}(Z)]^2} z^{k_1} dz \\
 a_{6k_1} &= \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1 + v_{FD}^{dis}(Z)} z^{k_1} dz + \frac{E_m}{1 + v_m} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1 + v_{FD}^{ic}(Z)} z^{k_1} dz, k_1 = 0,1,2
 \end{aligned} \tag{17}$$

### 3. TEMEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Kaplamalı silindirik kabuğun kenarları basit mesnetli sınır koşullarına tabi olduğundan, (15) ve (16) denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibi aranır [12]:

$$w = f(t) \sin(m_1 x) \sin(n_1 y), \Phi_1 = \phi(t) \sin(m_1 x) \sin(n_1 y) \tag{18}$$

Burada,  $f(t)$  ve  $\phi(t)$  zamana bağlı bilinmeyen fonksiyonlar,  $n_1 = n/R$  olup  $n$  çevre doğrultusunda dalga sayısı ve  $m_1 = m\pi/L$  olup  $m$  ana doğrultuda dalga sayısıdır.

(15) ve (16) denklemlerine Galerkin yöntemi uygulandığında, integrallemeden sonra elde edilen denklemlerden  $\phi(t)$  değişkeni yok edildiğinde, FD kaplamalı metal silindirik kabuğun serbest titreşimi için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{A_5} \left( \frac{A_1 A_2}{A_3} + A_4 \right) f(t) = 0 \tag{19}$$

Burada, şu tanımlar geçerlidir:

$$A_1 = m_1^2 R - C_2 (m_1^4 + n^4) - 2(C_1 - C_5) m_1^2 n^2, A_2 = m_1^2 R + B_4 (m_1^4 + n^4) + 2(B_3 - B_6) m_1^2 n^2, \tag{20}$$

$$A_3 = B_1 (m_1^4 + n^4) + 2(B_2 + B_5) m_1^2 n^2, A_4 = C_3 (m_1^4 + n^4) + 2(C_4 + C_6) m_1^2 n^2, A_5 = \rho_1 R^4$$

(19) diferansiyel denkleminde FD kaplamalı metal silindirik kabuğun  $\omega(1/sn)$  titreşim frekansı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A_5} \left( \frac{A_1 A_2}{A_3} + A_4 \right)} \quad (21)$$

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_1 = \omega R \sqrt{(1 - \nu_m^2) \rho_m / E_m} \quad (22)$$

(21) ve (22) ifadelerinde  $V_m^{dis} = V_m^{ic} = 1$  olduğunda zenginleştirilmiş metalden oluşan tek tabakalı silindirik kabuğun  $\omega_m^{tektab}$  ( $1/sn$ ) titreşim frekansı için aşağıdaki ifade özel olarak elde edilir:

$$\omega_m^{tektab} = \sqrt{\frac{E_m}{12(1 - \nu_m^2)} \left( \frac{h}{R} \right)^3 \frac{1}{\rho_m R h} \left\{ \frac{m_1^4}{(m_1^2 + n^2)^2} \frac{12(1 - \nu_m^2) R^2}{h^2} + (m_1^2 + n^2)^2 \right\}} \quad (23)$$

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun  $\omega_{1m}^{tektab}$  boyutsuz frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_{1m}^{tektab} = \frac{h}{2\sqrt{3}R} \sqrt{\frac{m_1^4}{(m_1^2 + n^2)^2} \frac{12(1 - \nu_m^2) R^2}{h^2} + (m_1^2 + n^2)^2} \quad (24)$$

FD kaplamalı ve tek tabakalı metal silindirik kabukların boyutlu ve boyutsuz titreşim frekanslarının minimum değerlerini bulmak için (22)-(24) ifadeleri  $(m, n)$  dalga sayılarına göre minimize edilir.

#### 4. SAYISAL ANALİZ

Sunulan çalışmanın doğruluğunu teyit etmek için Matsunaga [6] çalışma sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır. Pür FDM silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametresinin değerleri değişik  $L/R$  oranı ve hacim kesir indeksi için Tablo 1’de sunulmaktadır. Bu karşılaştırmada tek tabakalı silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametresi  $\omega_1 = \omega h \sqrt{E_c / \rho_c}$  olarak dikkate alınmıştır. FD kaplama, metal (Alüminyum) ve seramikten (Alüminyum oksit) oluşmakta ( $Al/Al_2O_3$ ) ve malzeme özellikleri aşağıda sunulmaktadır:

Metal (Alüminyum, Al):  $E_m = 7 \times 10^{10}$  (Pa),  $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_m = 0.3$ .

Seramik (Alüminyum oksit,  $Al_2O_3$ ):  $E_s = 3.8 \times 10^{11}$  (Pa),  $\rho_s = 3800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_s = 0.3$ .

Tablo 1’den, sunulan çalışmada elde edilen sonuçların Matsunaga [6] çalışmasında elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir.



**Tablo 1.** Pür FDM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) silindirik kabuğun boyutsuz titreşim frekansı değerlerinin Matsunaga [6] çalışmasında elde edilen sonuçlarla ile karşılaştırılması ( $R/h=1000$ )

$L/R$	Matsunaga [6]				Sunulan Çalışma			
	$d = 0.5$	$d = 1$	$d = 10$	Pür metal	$d = 0.5$	$d = 1$	$d = 10$	Pür metal
2	0.3368(9)	0.3068(9)	0.2351(9)	0.1957(9)	0.3401(10)	0.3101(10)	0.2378(9)	0.1978(9)
5	0.1314(6)	0.1201(6)	0.09247(6)	0.07654(6)	0.1348(6)	0.1233(6)	0.09514(6)	0.07868(6)

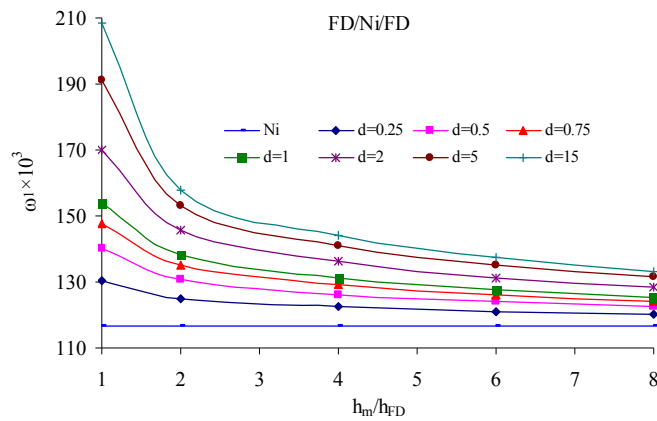
Sayısal analizler kısmında metal malzeme olarak Nikel (Ni) ve seramik malzeme olarak Alüminyum Oksit (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) ele alınmakta ve FD kaplamanın oluşumunda bu malzemelerin kombinasyonu kullanılmaktadır. FD kaplama, yani Ni/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Nikel ve Alüminyum Oksit'in bir kombinasyonudur. Üç tabakalı silindirik kabuk FD/Ni/FD şeklinde tasarlanmıştır.

$$E_0 = 2.2395 \times 10^{11} (Pa), E_f = 2.05098 \times 10^{11} (Pa), \nu_0 = \nu_f = 0.31, \rho_0 = \rho_f = 8900 \text{ kg} / m^3$$

$$E_0 = E_f = 3.8 \times 10^{11} (Pa), \nu_0 = \nu_f = 0.3, \rho_0 = \rho_f = 3800 \text{ kg} / m^3$$

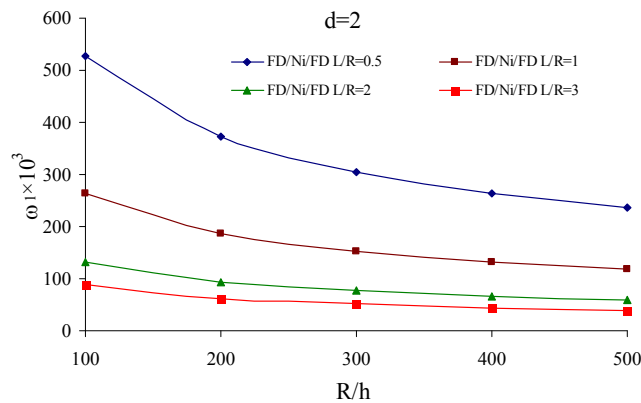
Burada  $E_0, \nu_0, \rho_0$ , sırasıyla, hammaddenin Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu;  $E_f, \nu_f, \rho_f$  sırasıyla, efektif Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluktur [13].

Nikelden oluşan tek tabakalı ve FD/Ni/FD üç tabakalı silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresinin değişik hacim kesir indeks değerleri için  $h_m/h_{FD}$  oranına bağlı değişimi Şekil 2'de sunulmaktadır. FD/Ni/FD silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresinin değerleri  $h_m/h_{FD}$  oranı arttığında azalır. Ayrıca, FD/Ni/FD silindirik kabuklarda kompozisyonel profilin boyutsuz frekans parametrelerine etkisi  $h_m/h_{FD}$  oranı arttığında azalır. Örneğin, FD/Ni/FD kabuklar için  $d = 5$  ve  $h_m/h_{FD} = 2$  olduğunda etki %31.42,  $h_m/h_{FD} = 8$  için etki %12.78'dir. FD/Ni/FD silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz titreşim frekans değerleri hacim kesir indeksi  $d$  arttığında artar. Örneğin, FD/Ni/FD kabuklar için  $h_m/h_{FD} = 2$  ve  $d = 0.25$  olduğunda etki %7.27,  $d = 15$  için etki %35.54'dür.



**Şekil 2.** Ni ve FD/Ni/FD silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresinin değişik  $d$  değerleri için  $h_m / h_{FD}$  oranına bağlı değişimi ( $R/h = 100$ ;  $L/R = 2$ )

FD/Ni/FD silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresinin değişik  $L/R$  oranı için  $R/h$  oranına bağlı değişimi Şekil 3’de sunulmaktadır ( $d = 2$ ).  $L/R$  ve  $R/h$  oranları arttığında boyutsuz frekans parametresinin değerleri azalmaktadır. Ayrıca, boyutsuz frekans parametre değerlerine kompozisyonel profillerin etkisi önemli olup  $R/h$  oranının değişimine bağlı olarak değişmemektedir. FD/Ni/FD silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametre değerlerine kompozisyonel profillerin etkisi  $L/R$  oranı arttığında, genelde azalmakta fakat bu azalma düzensizlik göstermektedir.



**Şekil 3.** FD/Ni/FD silindirik kabukların  $\omega_1$  boyutsuz frekans parametresinin  $d = 2$  ve değişik  $L/R$  oranı için  $R/h$  oranına bağlı değişimi ( $h_m / h_{FD} = 6$ )

## 5. SONUÇLAR

İç ve dış yüzeyleri fonksiyonel değişimli malzemelerle (FDM’ler) kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların temel bağıntıları ve değiştirilmiş Donnell tipi temel denklemleri türetilmekte ve Galerkin Yöntemi uygulanarak çözülmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların serbest

titreşiminin boyutsuz frekans parametresi için analitik ifade bulunmaktadır. Analizler kısmında, çeşitli FD kaplama ve metal çekirdek kullanılarak oluşturulan kaplamalı silindirik kabukların serbest titreşimlerinin boyutsuz frekans parametrelerinin minimum değerlerine, hacim bileşenleri değişiminin, kabuk karakteristiklerinin, iç ve dış tabakaların kalınlıkları değişiminin etkileri sayısal olarak incelenmektedir.

### TEŞEKKÜR

Birinci ve ikinci yazar 3161-YL1-12 No'lu projeye verdiği destekten dolayı Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür eder.

### KAYNAKLAR

- [1] Komanduri, R. and Jahanmir, S., "Friction and Wear of Ceramics" Marcel Dekker Inc., 1994.
- [2] Suresh, S. and Mortensen, A., "Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites" IOM Communications Ltd., London, 1998.
- [3] Holt, J., Koizumi, M., Hirai, T. and Munir, Z., "Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Functionally Gradient Materials" In Ceramic Transactions, 34, 1992.
- [4] Öztürk, M. and Erdoğan, F., "Periodic Surface Cracking in an FGM Coating" Journal of Engineering Science, 33, 2179–2871, 1995.
- [5] Patel, B.P., Gupta, M.S., Loknath, M.S. and Kadu, C.P., "Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Elliptical Cylindrical Shells Using Higher-Order Theory", Composite Structures, 69, 259–270, 2005.
- [6] Matsunaga, H., "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells According to a 2d Higher-Order Deformation Theory", Composite Structures, 88, 519–531, 2009.
- [7] Tornabene, F., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power-Law Distribution" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 2911–2935, 2009.
- [8] Sofiyev, A.H. and Schnack, E., "The Vibration Analysis of Simply Supported FGM Truncated Conical Shells Resting on Two-Parameter Elastic Foundations" Mechanics of Advanced Materials and Structures, 19, 241–248, 2012.
- [9] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M., "Static Free Vibration and Buckling Analysis of Isotropic and Sandwich Functionally Graded Plates Using a Quasi-3d Higher-Order Shear Deformation Theory and a Meshless Technique" Composites Part B: Engineering, 44, 657-674, 2013.
- [10] Sobhy, M., "Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions" Composite Structures, 99, 76–87, 2013.
- [11] Sofiyev, A.H. and Kuruoglu, N., "Torsional Vibration and Buckling of the Cylindrical Shell with Functionally Graded Coatings Surrounded by an Elastic Medium" Composites Part B Engineering, 45, 1133–1142, 2013.

- [12] Volmir, A.S., “Stability of Elastic Systems”, Nauka: Moscow, 1967. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD628508.
- [13] Shen, H.S., “Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells”. CRC Press, Florida, 2009.