



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## KUVVETLİ NONLİNEER SİSTEMLER İÇİN ÇOK ÖLÇEKLİ LINDSTEDT POINCARÉ TEKNİĞİ

Mehmet Pakdemirli<sup>1</sup>, M. M. Fatih Karahan ve Hakan Boyacı  
Makine Mühendisliği Bölümü, Celal Bayar Üniversitesi

### ÖZET

Çok ölçekli metot ve Lindstedt-Poincaré tekniğinin birleştirilmesi esasına dayanan yeni bir perturbasyon metodu ortaya atılmıştır. Yeni metot lineer sönümlü osilatör, Duffing denklemi, sönümlü kübik nonlineer denklem, kuadratik ve kübik nonlineer denklem ve zorlamalı Duffing denkleminde uygulanmıştır. Klasik çok ölçekli metot ve yeni metodu kullanarak yaklaşık analitik çözümler elde edilmiştir. Bu çözümler ana denklemin sayısal çözümü ile karşılaştırılmıştır. Yeni metot kuvvetli nonlineer sistemler için çok iyi sonuçlar vermiştir.

### ABSTRACT

A new perturbation method combining the Method of Multiple Scales and Lindstedt Poincaré techniques is proposed. The new method is applied to Linear damped oscillator, Duffing equation, damped cubic nonlinear equation, an equation with quadratic and cubic nonlinearities and forced Duffing equation. Approximate analytical solutions are obtained using the classical Multiple scales method and the new method. Both solutions are contrasted with the direct numerical solutions of the original equation. The new method produces much better results for strong nonlinearities.

### 1.GİRİŞ

Perturbasyon metotları bir asrı aşkın bir süredir matematik modellerin yaklaşık çözümlerini üretmek üzere başarı ile kullanılmaktadır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri, diferansiyel-fark denklemleri, integro-diferansiyel denklemler bu yöntemlerle yaklaşık olarak çözülmüştür. Direk açılımın fiziksel veya gerçek çözümle uyumlu olmayan çözümlere yol açtığı problemler için birçok farklı perturbasyon metodu zaman içerisinde geliştirilmiştir. Bu metotlardan bazıları Lindstedt-Poincaré metodu, Renormalizasyon metodu, çok ölçekli metot, ortalama metodu, asimptotik açılımların uyumu metodu, gerdirilmiş parametre metodu şeklindedir ve metotların çok sayıda varyasyonu bulunmaktadır.

Perturbasyon metotlarının en önemli kısıtlaması denklemlerde küçük parametreye olan ihtiyaçtır veya bu küçük parametre suni olarak denklemlere yerleştirilmelidir. Eğer problem nonlineer ise çözüm sadece zayıf nonlineer durumda geçerli olabilmekte ve kuvvetli nonlineer

---

<sup>1</sup> TÜBA Asli Üyesi

durumda genelde sayısal çözümler kaçınılmaz olmaktadır. Kuvvetli nonlinear problemler için geçerli çözümler üretmek üzere son yıllarda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Lineerleştirilmiş perturbasyon metodu, parametre açılım metodu, iterasyon perturbasyon metodları, Lindstedt Poincare tekniğinde yeni zaman dönüşümleri ile modifikasyonlar bunlardan bazılarıdır.

Pakdemirli ve ekibi tarafından yeni bir perturbasyon-iterasyon teorisi geliştirilmiş [1-6] ve cebirsel denklemlere, diferansiyel denklemlere, integral denklemlere başarı ile uygulanmıştır. Bu yeni teknik literatürdeki iterasyon-perturbasyon teknikleri gibi özel dönüşüm veya kabullere ihtiyaç duymayan, algoritmik ve sistematik bir yöntemdir.

Hu and Xiong [7] Lindstedt-Poincare tekniğinde küçük bir modifikasyon yaparak duffing denklemi için kuvvetli nonlinear sistemler için de geçerli olabilecek çözümler üretmişlerdir. Dönüşüm frekansı yerine tabi frekansı seriye açarak perturbasyon parametresinin büyük değerleri için uygun sonuçlar almışlardır. Hu and Xiong'un bu modifikasyonu bu çalışmada çok ölçekli metoda uyarlanmıştır.

Çok ölçekli metodun Lindstedt Poincare metoduna göre önemli bir avantajı, değişken genlikli problemlerde de geçerli çözümler üretebilmesidir. Düzgün rejim çözümlerinde ve en az üç terimli açılım yapıldığında Lindstedt Poincare tekniği bazen çok ölçekli metoda göre daha iyi sonuçlar verebilmektedir. Bu çalışmada çok ölçekli metod ve Lindstedt Poincare metodunun varyasyonu tek bir yöntem altında birleştirilmiştir. Burada iki ana amaç vardır: Birincisi iki metodu birleştirerek problem çözümlerinde her iki metodun avantajlı yanlarından daha iyi faydalanabilmek. Diğeri ise kuvvetli nonlinear problemler için de fiziksel anlamlı çözümler üretebilmek. Bu yeni metod birçok nonlinear dinamik problemine başarı ile uygulanmıştır [8-10].

## 2. ÇOK ÖLÇEKLİ LINDSTEDT POINCARE (ÇÖLP) METODU

Yöntemi açıklamak için aşağıdaki nonlinear denklem ele alınabilir.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \mathcal{E}f(u) = 0 \quad (1)$$

Denklemden,  $u$  bağımlı değişken,  $\omega_0$  tabii frekans,  $f(u)$  ise nonlinear terimleri içeren fonksiyondur. Burada  $\mathcal{E}$  olarak adlandırılan parametre de perturbasyon parametresidir.

Yöntemin basamakları aşağıdaki gibidir.

1) Lindstedt Poincare tekniğinde olduğu gibi zaman dönüşümü yapılır.

$$\tau = \omega t \quad (2)$$

Dönüşüm nonlinear denkleme uygulanırsa

$$\omega^2 u'' + \omega_0^2 u + \mathcal{E}f(u) = 0 \quad (3)$$

elde edilir.

Nokta normal zaman değişkeni  $t$ 'ye göre, üssü yeni zaman değişkeni  $\tau$ 'ye göre türevi ifade etmektedir.

2) Zaman ölçeklemesi yapılır. Burada  $T_0$  hızlı zaman ölçeği,  $T_1$  ve  $T_2$  ise yavaş zaman ölçekleridir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (4)$$

3) Zamana bağlı türevler, çok zaman ölçekli yöntemde olduğu gibi yapılıır.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (5)$$

Bağımlı değişkenin aşağıdaki yapıda (formda) bir seri toplamından meydana geldiği düşünülür.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (6)$$

4)  $\omega^2$  parametresi, Lindstedt Poincare tekniğinde olduğu gibi seriye açılır.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (7)$$

5) Yeni yöntemde ise denklem (7)'den  $\omega_0^2$  çekilir.

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (8)$$

6) Denklemler (5), (6) ve (8) denklem (3)'e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \omega^2 (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2))(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \\ & + (\omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \mathcal{E}f(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ifadesi elde edilir.

7) Elde edilen denklemde aşağıdaki gibi merteye ayrıştırması yapılır,

$$O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (10)$$

$$O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - f(u_0) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = & -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ & + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - f'(u_0) u_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Birinci mertebede, denkleme aşağıdaki gibi bir çözüm önerilir.

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i T_0} + k e \quad (13)$$

burada k.e kısaltması kompleks eşlenikleri ifade eder.

8) İkinci ve üçüncü mertebelerdeki denklemlerde, seküler terimleri yok etmek için bazı seçimler yapılması gerekir. İkinci mertebede oluşan seküler terimde  $D_1 A = 0$  alındığında  $\omega_1$  sanal değil ise yapılan seçim uygundur. Ancak  $\omega_1$  sanal ise  $\omega_1 = 0$  seçilerek seküler terimler yok edilir. Çünkü  $\omega_1$  'in sanal olması Nayfeh [11]'de belirtildiği gibi fiziksel olmayan çözümler verecektir. Aynı yöntem üçüncü mertebede de uygulanır. Eğer  $D_2 A = 0$  alındığında  $\omega_2$  gerçel ise yapılan seçim uygundur. Sanal ise  $\omega_2 = 0$  seçilerek seküler terimler yok edilir.

Bu algoritma birçok probleme uygulanacaktır.

### 3. LİNEER SÖNÜMLÜ OSİLATÖR

Aşağıdaki lineer sönümlü osilatörü ele alalım

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon\mu\dot{u} = 0 \quad (14)$$

Önceki verilen açılımlar yapılırsa her bir mertebedeki denklem şöyle olur

$$O(1) : \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (15)$$

$$O(\varepsilon) : \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - 2\mu\omega D_0 u_0 \quad (16)$$

$$O(\varepsilon^2) : \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 \\ + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - 2\mu\omega (D_0 u_1 + D_1 u_0) \quad (17)$$

İlk mertebedeki çözüm şöyledir

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + ke \quad (18)$$

Bu çözüm denklem (16)'ya yerleştirilir ve düzenlenirse

$$\omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = e^{iT_0} (-2\omega^2 i D_1 A + \omega_1 A - 2\mu\omega i A) + cc \quad (19)$$

olur. Seküler terimleri yok edebilmek için

$$-2\omega^2 i D_1 A + \omega_1 A - 2\mu\omega i A = 0 \quad (20)$$

olmalıdır. Seküler ifadeye,  $D_1 A = 0$  seçilir ise  $\omega_1 = 2i\mu\omega$  olur. Ancak  $\omega_1$  kompleks olacağından daha önce bahsedildiği gibi bu seçim uygun değildir. Uygun bir çözüm olarak  $\omega_1 = 0$  seçilir ve

$$D_1 A = -\frac{\mu}{\omega} A \quad (21)$$

bulunur. Kompleks genlik,

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (22)$$

alınarak denklem (21)'e yerleştirilir ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a(T_2) e^{-\frac{\mu}{\omega} T_1}, \quad \beta = \beta(T_2) \quad (23)$$

Denklem (19)'un sağ tarafı sıfır olduğu için  $u_1$  sıfır alınabilir

$$u_1 = 0 \quad (24)$$

Elde edilenler, en üst mertebedeki denklem (17)'ye yerleştirilir ve seküler terimler yok edilirse

$$2\omega^2 i D_2 A - \omega_2 A - \mu^2 A = 0 \quad (25)$$

olur. Eğer  $D_2 A = 0$  seçilirse  $\omega_2$  reel sayıdır ve bu seçim uygundur.

$$D_2 A = 0, \quad \omega_2 = -\mu^2 \quad (26)$$

$D_2A = 0$  olduğundan denklem (23)'deki genlik ve faz ifadelerinde  $T_2$  bağımlılığı ortadan kalkar. Yapıları

$$a = a_0 e^{-\frac{\mu}{\omega} T_1}, \quad \beta = \beta_0 \quad (27)$$

şeklinde olur.

Frekans açılımı

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu^2 \quad (28)$$

ve diğer elde edilenler yerleştirilirse orijinal zaman değişkeni cinsinden nihai çözüm şöyledir

$$u(t) = a_0 e^{-\varepsilon \mu t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu^2} t + \beta_0\right) + O(\varepsilon^2) \quad (29)$$

Bu çözüm orijinal denklemin tam çözümü ile eşdeğerdir. Klasik çok ölçekli metotta ise yaklaşık çözüm şöyledir

$$u(t) = a_0 e^{-\varepsilon \mu t} \cos\left(\omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{2\omega_0^2}\right) t + \beta_0\right) + O(\varepsilon^2) \quad (30)$$

Eğer tam çözümdeki frekans ifadesi Taylor serisine açılırsa yaklaşık çözümdeki ifade elde edilir. Çözüm (30)  $\varepsilon \mu \ll \omega_0$  olduğunda geçerlidir ancak tam çözümle uyumlu ÇÖLP çözümü için böyle bir kısıtlama yoktur.

#### 4. DUFFING DENKLEMİ

Duffing denklemi klasik çok ölçekli metot ve çok ölçekli Lindstedt Poincare metodu ile çözülecektir. Çözümler sayısal çözümlerle karşılaştırılacaktır. Aşağıdaki denklemi

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (31)$$

ve başlangıç şartlarını

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (32)$$

ele alalım.

##### 4.1 Çok Ölçekli Metot

Klasik çok ölçekli metot aşağıdaki çözümü verir

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32\omega_0^2} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

Frekans açılımı ise

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3}{8\omega_0} a_0^2 - \varepsilon^2 \frac{21}{256\omega_0^3} a_0^4 \quad (34)$$

şeklindedir. Düzeltme terimlerinin baştaki terimlere göre çok daha küçük olması gerektiği perturbasyon kuralını işletirsek

$$\frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega_0^2} \ll 1 \quad (35)$$

olmalıdır.

#### 4.2. Çok Ölçekli Lindstedt Poincare (ÇÖLP) Metodu

Önceki bölümde açıklanan algoritma uygulanırsa çok ölçekli Lindstedt Poincare metodu ile aşağıdaki yaklaşık çözüm elde edilir.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32\omega^2} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + O(\varepsilon^2) \quad (36)$$

Yaklaşık frekans ise

$$\omega = \frac{1}{4} \sqrt{8\omega_0^2 + 6\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\omega_0^2 + 96\varepsilon\omega_0^2 a_0^2 + 30\varepsilon^2 a_0^4}} \quad (37)$$

şekindedir. Bu frekans modifiye Lindstedt Poincare metodu ile Hu and Xiong tarafından elde edilen frekans ile aynıdır.

Geçerli çözümler için kriter

$$\frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega^2} \ll 1 \quad (38)$$

olmalıdır.

#### 4.3. Sayısal Çözümler ile Karşılaştırmalar

Eski metotta geçerlilik kriteri (35) iken yeni metotta geçerlilik kriteri (38) ile verilmiştir. Kriterler arasındaki en temel fark  $\varepsilon$  sonsuza giderken, kriter (35) geçerliliğini kaybederken kriter (38) büyük  $\varepsilon$  değerleri için geçerliliğini korumaktadır. Bunu test etmek için limit alalım

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a_0^2}{32\omega^2} = \frac{\varepsilon a_0^2}{32 \frac{1}{16} (8\omega_0^2 + 6\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\omega_0^2 + 96\varepsilon\omega_0^2 a_0^2 + 30\varepsilon^2 a_0^4})} \cong 0.044 \ll 1 \quad (39)$$

Bu durumu teyit için her iki metodun zamana bağlı çözümleri Duffing denkleminin sayısal çözümleri ile Şekil 1-3'de karşılaştırılmıştır.

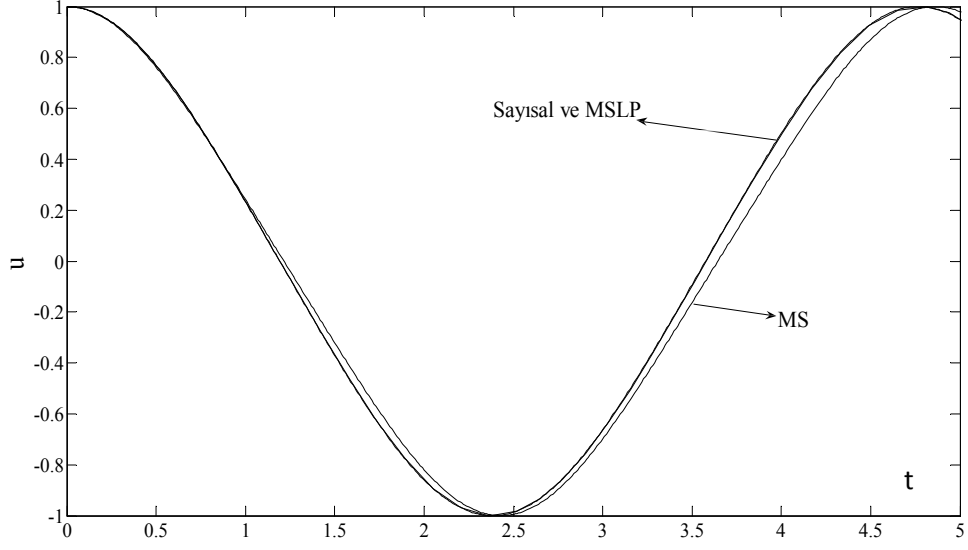
### 5. SÖNÜMLÜ KÜBİK NONLİNEER DENKLEM

Önceki bölümde sabit genlikli bir problem ele alınmıştı. Bu tip problemlerde, modifiye Lindstedt Poincare metodu büyük  $\varepsilon$  değerleri için geçerli çözümler üretebilmektedir (Bkz Hu and Xiong). Değişken genlikli problemlerde ise Lindstedt Poincare metodu gerçekçi çözümler üretememektedir. Bu bölümde amacımız yeni metodun kuvvetli nonlineer değişken genlikli problemler için de etkin olduğunu göstermektir. Aşağıdaki denklemi ele alalım

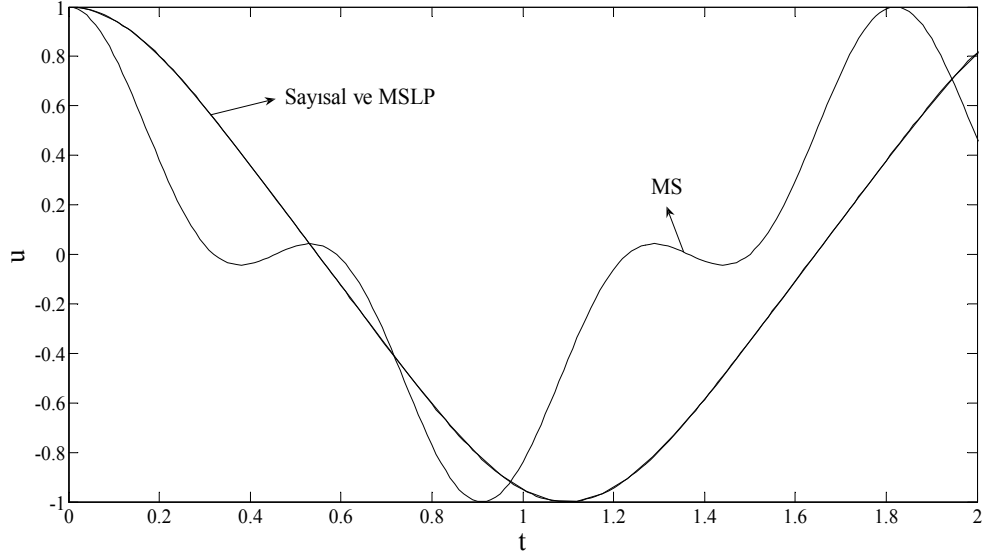
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu \dot{u} + \varepsilon \alpha u^3 = 0 \quad (40)$$

ve başlangıç şartlarını

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (41)$$



Şekil 1. Duffing denklemini için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 1$  ( $a_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ )



Şekil 2. Duffing denklemini için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 10$  ( $a_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ )

ele alalım.

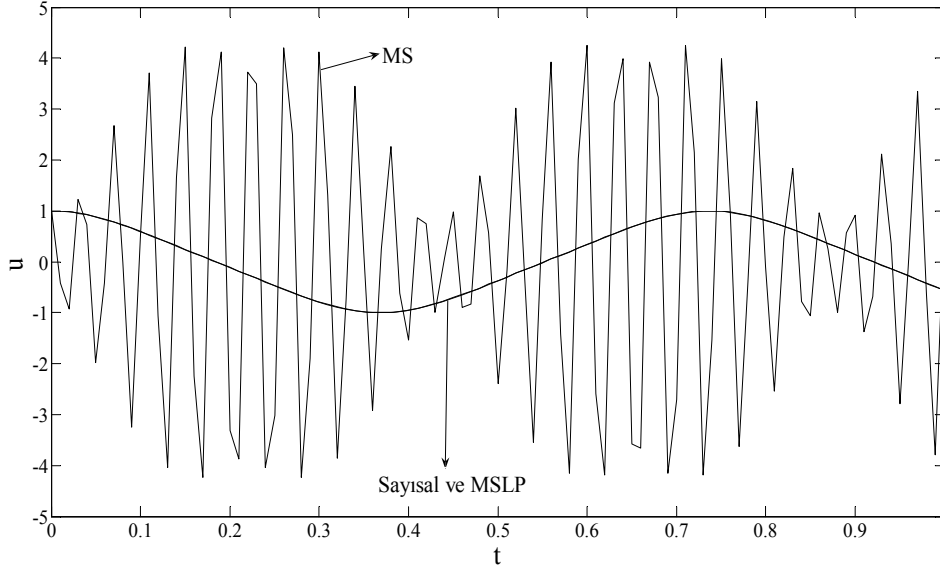
### 5.1 Çok Ölçekli Metot

Klasik çok ölçekli metot ile aşağıdaki çözüm üretilir.

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega_0^2} a^3 [\cos(3\omega_0 t + 3\beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)] + O(\varepsilon^2) \quad (42)$$

Burada

$$a = a_0 e^{-\varepsilon^2 \mu t}, \quad \beta = \frac{21 \alpha^2}{1024 \mu \omega_0^3} a_0^4 (e^{-4 \varepsilon^2 \mu t} - 1) + \varepsilon \frac{3 \alpha}{8 \omega_0} a_0^2 e^{-2 \varepsilon^2 \mu t} t \quad (43)$$



Şekil 3. Duffing denklemi için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\varepsilon = 100$  ( $a_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ )

şeklinde. Yakınsama kriteri ise şöyledir.

$$\frac{\varepsilon \alpha^2}{32 \omega_0^2} \ll 1 \quad (44)$$

### 5.2. Çok Ölçekli Lindstedt Poincare Metodu

Metodun uygulanması ile aşağıdaki çözüm bulunur.

$$u = a \cos(\omega t + \beta) + \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a^3 [\cos(3\omega t + 3\beta) - \cos(\omega t + \beta)] + O(\varepsilon^2) \quad (45)$$

Burada

$$a = a_0 e^{-\varepsilon^2 \mu}, \quad \beta = \frac{3\alpha^2 a_0^4}{1024 \omega^3 \mu} (e^{-4\varepsilon^2 \mu} - 1), \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a_0^2 e^{-2\varepsilon^2 \mu} \quad (46)$$

şeklinde. Geçerli çözümler için kriter

$$\frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a^2 \ll 1 \quad (47)$$

olmalıdır.

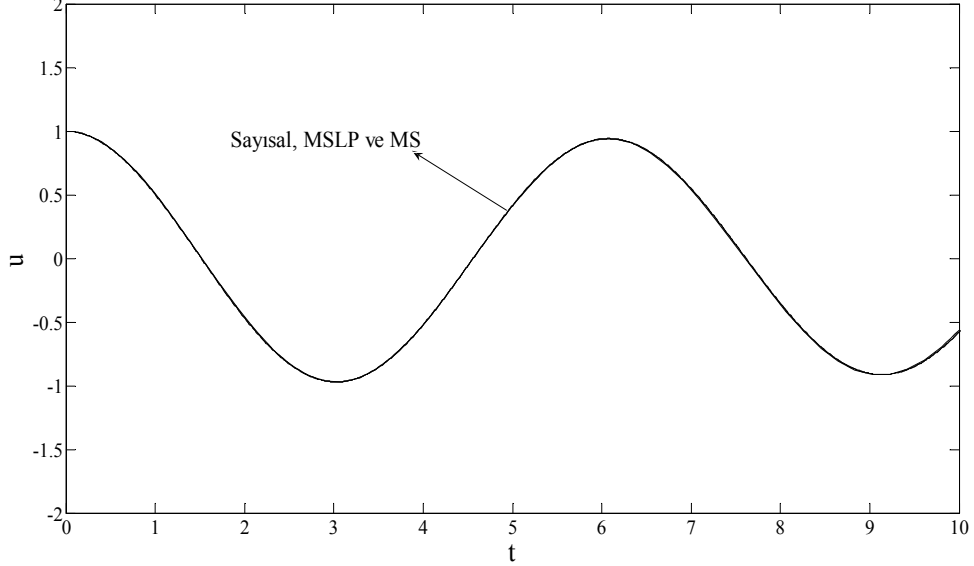
### 5.3. Sayısal Çözümlerle Karşılaştırmalar

Klasik metottaki kriter (44) yerine yeni metotta kriter (47) elde edilmiştir. Burada  $\varepsilon$  değerini büyütmek yerine  $\alpha$  değeri büyütülmelidir çünkü  $\varepsilon$  'nun büyük değerleri sönümü büyütecek ve salınımı yok edecektir.  $\alpha$ 'yı büyütmek ise kübik nonlineeriteyi büyütmek anlamına gelmektedir ki istenilen de budur. Genlik azaldığı için en büyük değeri olan  $t=0$ 'daki değerini alalım. Bu değer için  $a = a_0$  olur.

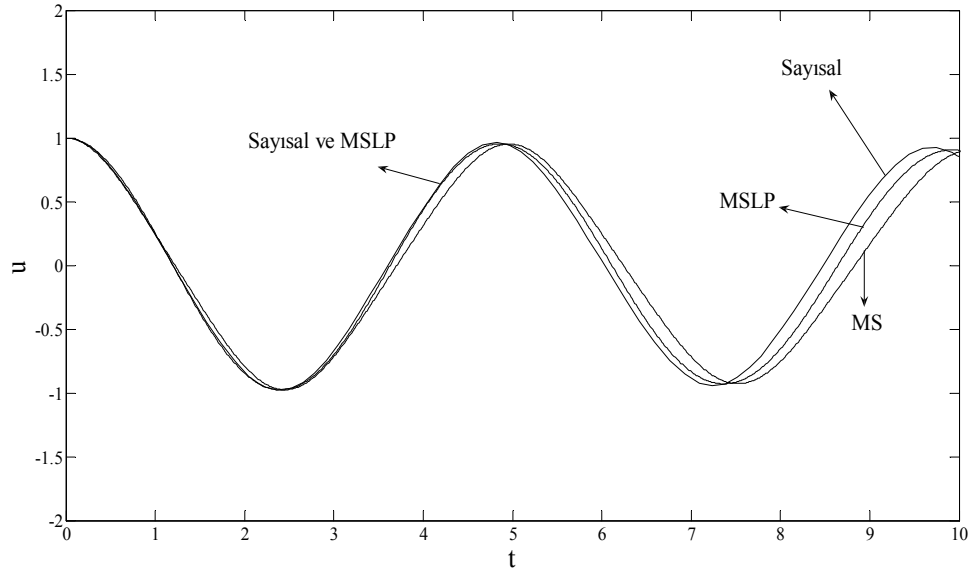


$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \alpha}{32 \omega^2} a_0^2 = \frac{\varepsilon \alpha a_0^2}{32 \left( \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a_0^2 \right)} = \frac{1}{24} \ll 1 \quad (48)$$

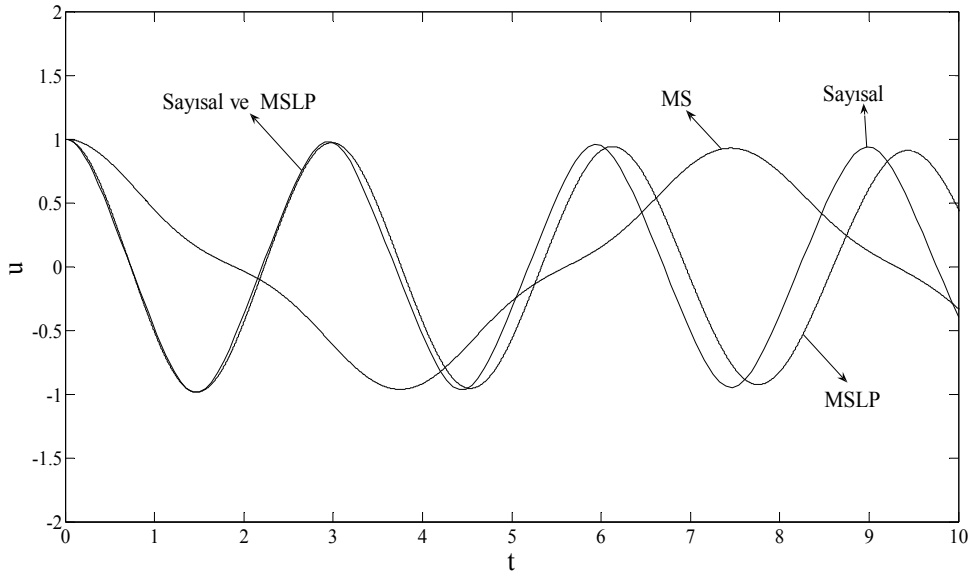
Böylece büyük  $\alpha$  değerleri için ÇÖLP metodunun sayısal çözümlerle uyumlu olması beklenmektedir. Her iki yaklaşık metodun sayısal çözümlerle karşılaştırılması Şekil 4-7'de verilmiştir.



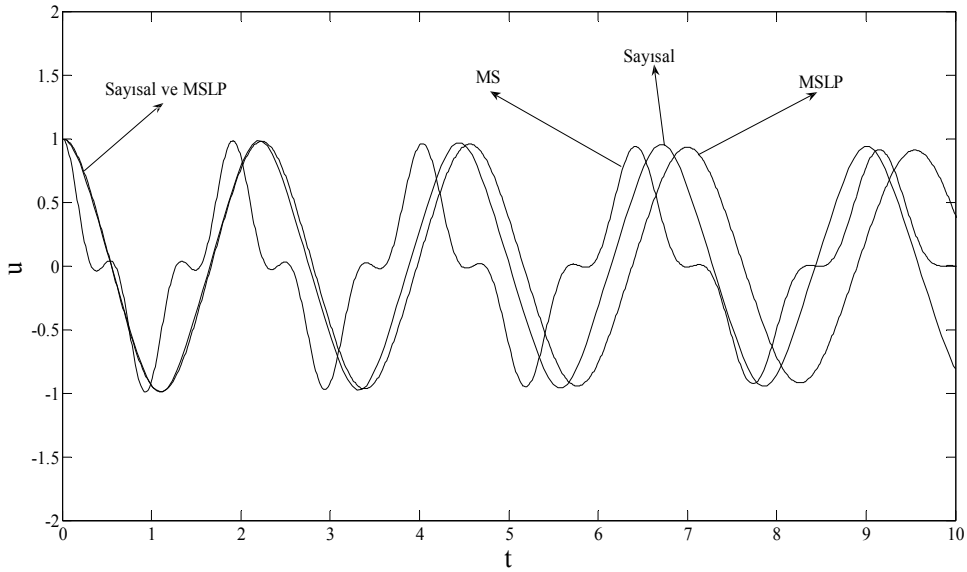
Şekil 4. Sönümlü kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\alpha = 1 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$



Şekil 5. Sönümlü kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\alpha = 10 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$



Şekil 6. Sönümlü kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\alpha = 50 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$



Şekil 7. Sönümlü kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  
 $\alpha = 100 (\varepsilon = 0.1, a_0 = 1, \omega_0 = 1, \mu = 1)$

## 6. KUADRATİK VE KÜBİK NONLİNEER DENKLEM

Uygulamalarda bu tip denklemlerle çok karşılaşmaktadır. Aşağıdaki denklemi ele alalım

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2 u^3 = 0 \quad (49)$$

Başlangıç şartları

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (50)$$

şeklindedir.

### 6.1 Çok Ölçekli Metot

Klasik çok ölçekli metot ile aşağıdaki çözüm üretilir

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0^2}{6\omega_0^2} [2 \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (51)$$

Frekans açılımı

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 a_0^2 \left( \frac{3}{8\omega_0} \alpha_2 - \frac{5}{12\omega_0^3} \alpha_1^2 \right) \quad (52)$$

şeklindedir. Yakınsama kriteri ise şöyledir

$$\frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega_0^2} \ll 1 \quad (53)$$

### 6.2. Çok Ölçekli Lindstedt Poincare Metodu

Metodun uygulanması ile aşağıdaki çözüm bulunur.

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0^2}{6\omega^2} [2 \cos(\omega t) + \cos(2\omega t) - 3] + O(\varepsilon^2) \quad (54)$$

burada

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right)^2 - \frac{10\varepsilon^2 \alpha_1^2 a_0^2}{3\omega_0^4}}} \quad (55)$$

şeklindedir. Frekans (55)'in Taylor açılımı klasik metottaki frekans (52)'yi verecektir. O halde frekans (55) gerçeğe daha yakın frekansı temsil eder.

Geçerli çözümler için kriter

$$\frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega^2} \ll 1 \quad (56)$$

olmalıdır.

### 6.3. Sayısal Çözümlerle Karşılaştırmalar

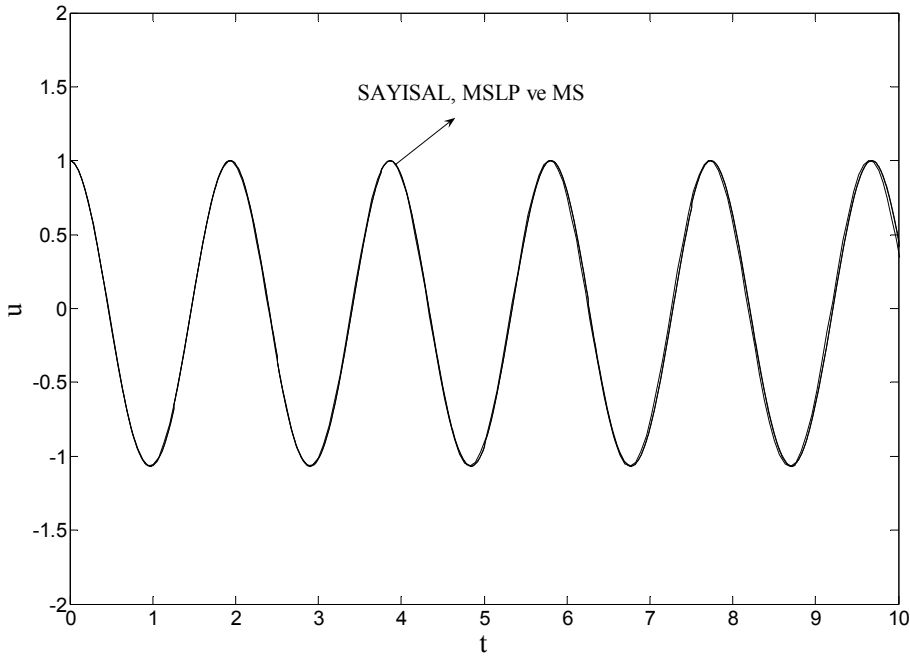
Klasik metottaki kriter (53) yerine yeni metotta kriter (56) elde edilmiştir. Büyük  $\varepsilon$  değeri için kriter (56)'dan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega^2} = \frac{\varepsilon \alpha_1 a_0}{6\omega_0^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( 1 + \frac{3\varepsilon^2 \alpha_2 a_0^2}{4\omega_0^2} \right)^2 - \frac{10\varepsilon^2 \alpha_1^2 a_0^2}{3\omega_0^4}} \right]} = 0 \ll 1 \quad (57)$$

elde edilir. Böylece büyük  $\varepsilon$  değerleri için ÇÖLP metodunun sayısal çözümlerle uyumlu olması beklenmektedir. Her iki yaklaşık metodun sayısal çözümlerle karşılaştırılması Şekil 8-10'da verilmiştir. Tablo 1'de ise her iki metot ile sayısal periyotların karşılaştırılması gösterilmiştir.

Tablo 1. Tam periyot ile yaklaşık periyotların karşılaştırılması ( $\omega_0 = \pi$ ,  $a_0 = 1$ )

$\varepsilon$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$T_{Tam}$	$T_{CÖLP}$	$T_{CÖ}$
0.1	1	1	1.99932	1.99933	1.99933
1	1	1	1.93064	1.9353	1.93476
10	1	1	0.676929	0.686058	0.457478
100	1	1	0.0738659	0.0725096	0.00591402
1	1	10	1.50381	1.50969	1.45383
1	1	100	0.691863	0.68207	0.417078
1	10	100	0.676929	0.686058	0.457478

Şekil 8. Kuadratik ve kübik nonlinear sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 1$  ( $a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ )

## 7. ZORLAMALI DUFFING DENKLEMİ

Önceki örneklerin hepsi serbest titreşimlerle ilgiliydi. Zorlamalı titreşimler için aşağıdaki Duffing denklemini ele alalım

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon^2 \mu \dot{u} + \varepsilon \alpha u^3 = \varepsilon^2 f \cos \Omega t \quad (58)$$

Başlangıç şartları

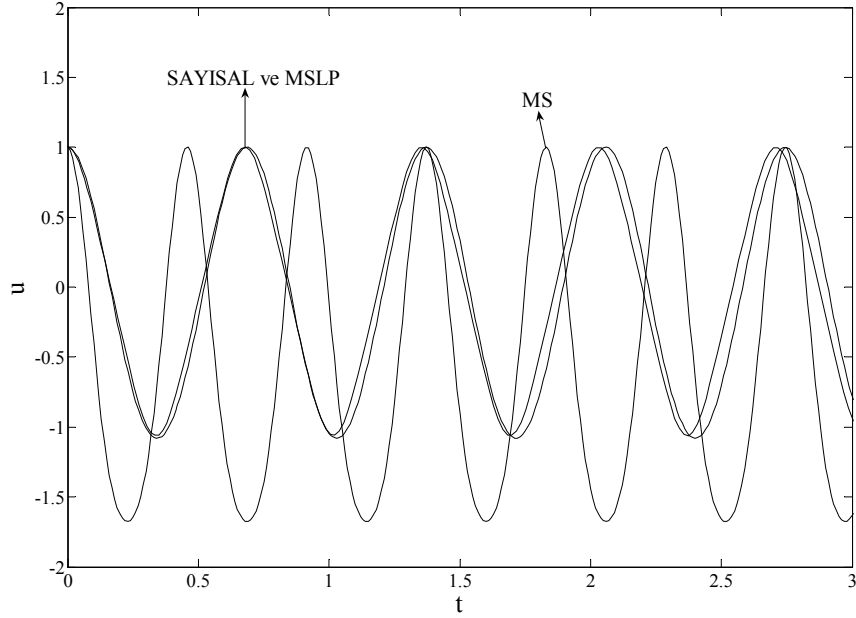
$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (59)$$

şekindedir.

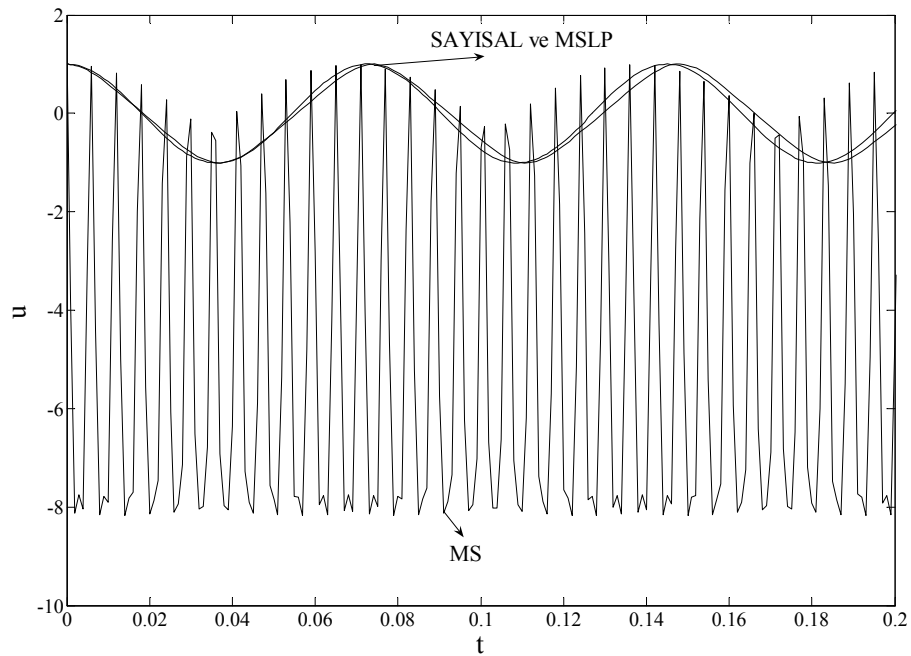
### 7.1 Çok Ölçekli Metot

Klasik çok ölçekli metot ile aşağıdaki çözüm üretilir

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon \frac{\alpha a^3}{32\omega_0^2} \cos[3(\Omega t - \gamma)] + O(\varepsilon^2) \quad (60)$$



Şekil 9. Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 10(a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$



Şekil 10. Kuadratik ve kübik nonlineer sistem için yaklaşık ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması  $\varepsilon = 100(a_0 = 1, \omega_0 = \pi, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$

Genlik ve faz değişimini veren denklemler ise şöyledir

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left( -\mu a + \frac{f}{2\omega_0} \sin \gamma \right) \quad (61)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{3\varepsilon\alpha}{8\omega_0} a^2 + \varepsilon^2 \left( \sigma + \frac{15\alpha^2}{256\omega_0^3} a^4 + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \gamma \right) \quad (62)$$

Düzgün rejim çözümlerinde zorlama frekansı-genlik ilişkisi son hali ile aşağıdaki gibidir.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \left( \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 \right) + \varepsilon^2 \left( -\frac{15\alpha^2}{256\omega_0^3} a^4 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\omega_0^2} - \mu^2} \right) \quad (63)$$

## 7.2 Çok Ölçekli Lindstedt Poincare Metodu

Yeni metotta aşağıdaki çözüm üretilir

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon \frac{\alpha}{32\omega^2} a^3 \cos[3(\Omega t - \gamma)] + O(\varepsilon^2) \quad (64)$$

Genlik ve faz değişimini veren denklemler ise şöyledir

$$\dot{a} = \varepsilon^2 \left( -\mu a + \frac{f}{2\omega} \sin \gamma \right) \quad (65)$$

$$\dot{\gamma} = \varepsilon^2 \left( \omega\sigma - \frac{3\alpha^2}{256\omega^3} a^4 + \frac{f}{2a\omega} \cos \gamma \right) \quad (66)$$

Düzgün rejim çözümlerinde zorlama frekansı-genlik ilişkisi son hali ile aşağıdaki gibidir.

$$\Omega = \omega \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{3\alpha^2}{256\omega^4} a^4 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\omega^4} - \left( \frac{\mu}{\omega} \right)^2} \right) \right] \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} \alpha a^2} \quad (67)$$

## 7.3. Sayısal Çözümlerle Karşılaştırmalar

Klasik metot ve yeni metoda ait geçerlilik kriterleri aşağıda verilmiştir

$$\frac{\varepsilon\alpha a^2}{32\omega_0^2} \ll 1 \quad (\text{ÇÖ}) \quad (68)$$

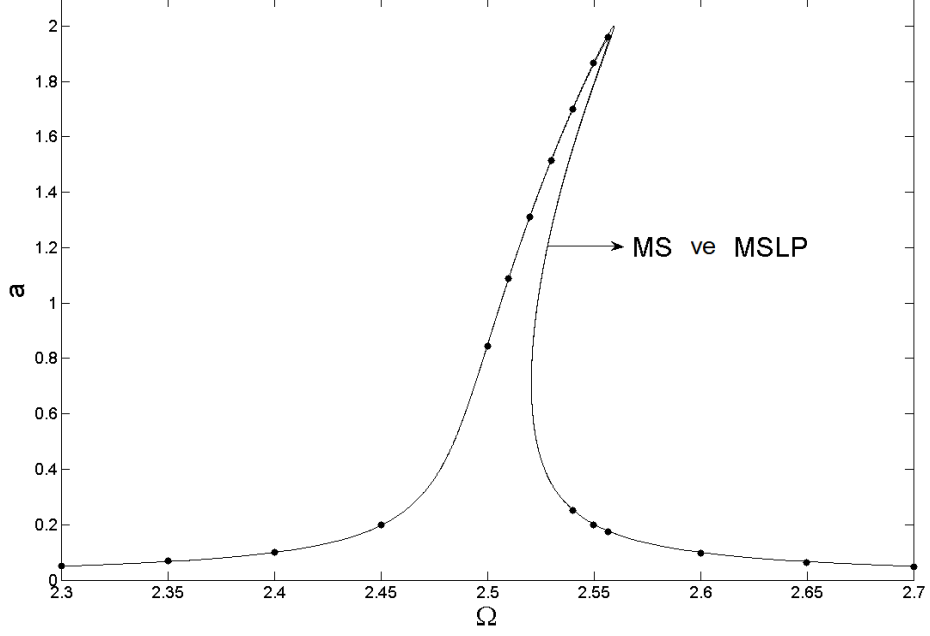
$$\frac{\varepsilon\alpha a^2}{32\omega^2} \ll 1 \quad (\text{ÇÖLP}) \quad (69)$$

Büyük  $\alpha$  değerleri için

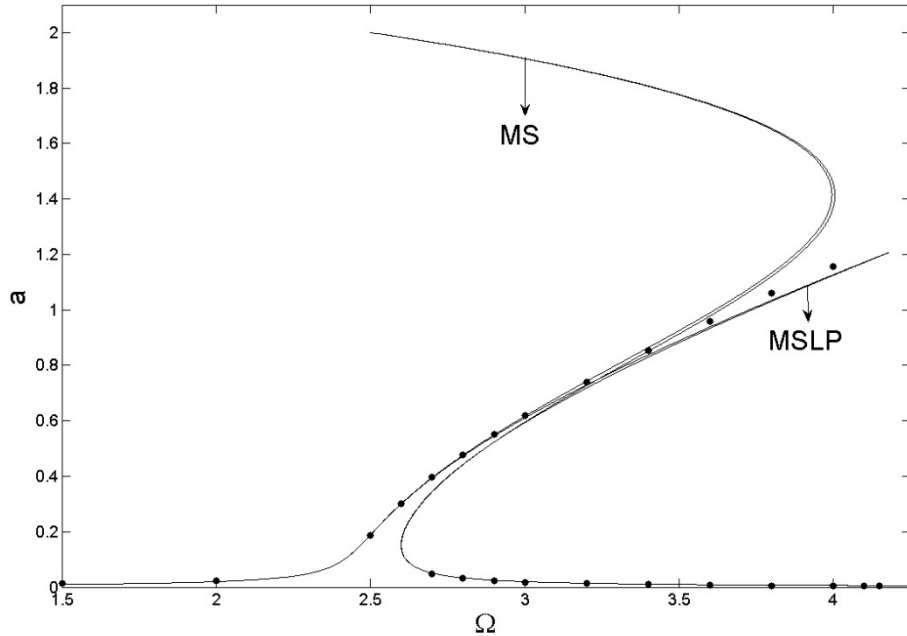
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon\alpha}{32\omega_0^2} a^2 = \infty \quad (\text{ÇÖ}) \quad (70)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon\alpha}{32\omega^2} a^2 = \frac{\varepsilon\alpha a^2}{32 \left( \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\alpha}{4} a^2 \right)} = \frac{1}{24} \ll 1 \quad (\text{ÇÖLP}) \quad (71)$$

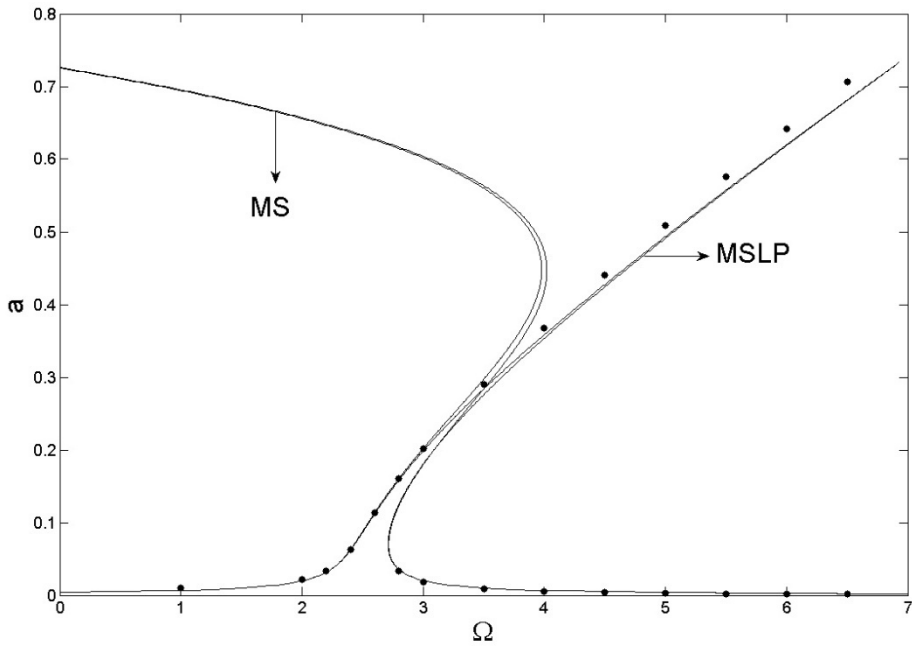
klasik metod geçerliliğini yitirirken yeni metod ile geçerlilik kriterleri hala sağlanabilmektedir. Böylece büyük  $\alpha$  değerleri için ÇÖLP metodunun sayısal çözümlerle uyumlu olması beklenmektedir. Her iki yaklaşık metodun frekans genlik eğrilerinin sayısal çözümlerle karşılaştırılması Şekil 11-15’de verilmiştir.



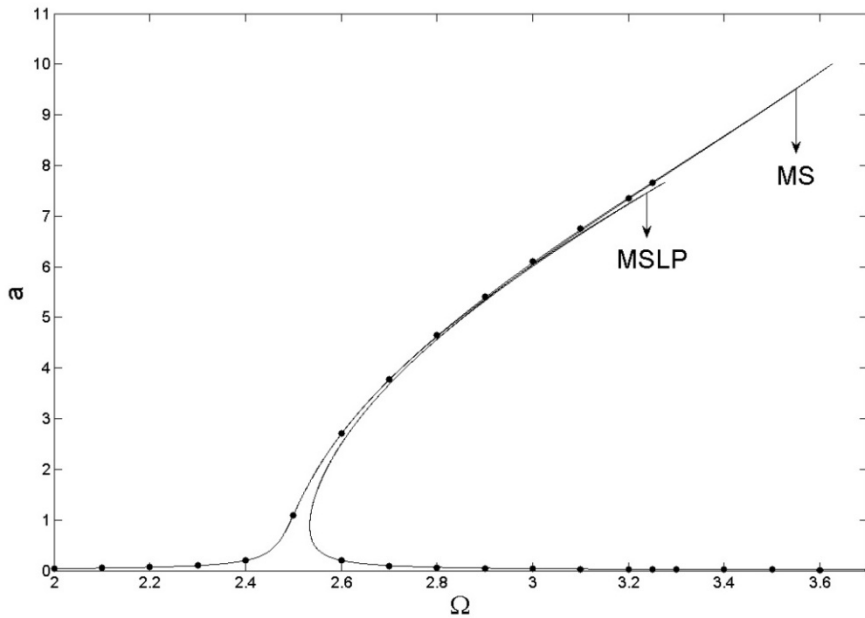
Şekil 11. Genlik-frekans eğrilerinin sayısal çözümlerle (noktalar) karşılaştırılması  
( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )



Şekil 12. Genlik-frekans eğrilerinin sayısal çözümlerle (noktalar) karşılaştırılması  
( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=100$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )

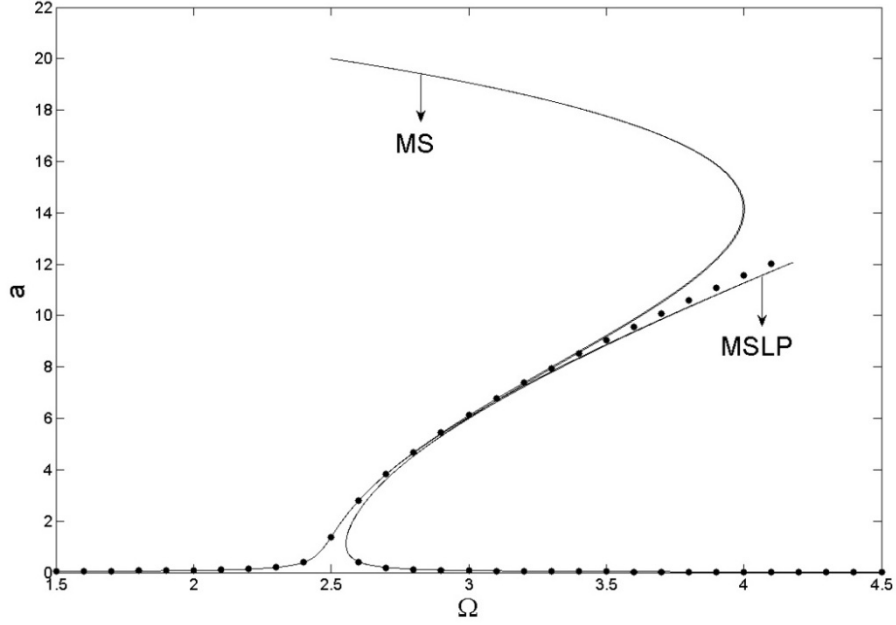


Şekil 13. Genlik-frekans eğrilerinin sayısal çözümlerle (noktalar) karşılaştırılması  
( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1000$ ,  $f=5$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.5$ )



Şekil 14. Genlik-frekans eğrilerinin sayısal çözümlerle (noktalar) karşılaştırılması  
( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=10$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.2$ )





Şekil 15. Genlik-frekans eğrilerinin sayısal çözümlerle (noktalar) karşılaştırılması

( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha=1$ ,  $f=20$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\mu=0.2$ )

## 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok ölçekli metot ve Lindstedt-Poincare metodunu birleştiren yeni bir perturbasyon metodu geliştirilmiştir. Bu metotta dönüşüm frekansı yerine tabi frekans perturbasyon serisine açılmaktadır. Bu seçim perturbasyon serilerinin geçerlilik aralığını arttırmaktadır. Yeni metot 5 farklı probleme başarı ile uygulanmıştır: sönümlü lineer osilator, serbest titreşimli Duffing denklemi, sönümlü kübik nonlineer denklem, kuadratik ve kübik nonlineer denklem ve zorlamalı Duffing denklemi. Birinci problemde metot ile tam analitik çözüm elde edilmiştir. Diğer problemlerde ise yeni metot kuvvetli nonlineer durumlarda sayısal çözümlerle uyumlu sonuçlar verirken klasik çok ölçekli metot geçerliliği olmayan çözümler vermektedir. Yeni metodun başka nonlineer problemlere uygulamaları yapılabilir. Ayrıca metodun kısmi diferansiyel denklemlere uygulaması konusunda çalışmalar devam etmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] M. Pakdemirli, Y. Aksoy and H. Boyacı, A New Perturbation-Iteration Approach for First Order Differential Equations, *Mathematical and Computational Applications*16(4), 890-899, 2011.
- [2] Y. Aksoy and M. Pakdemirli, New perturbation-iteration solutions for Bratu-type equations, *Computers and Mathematics with Applications* 59, 2802-2808, 2010.
- [3] Y. Aksoy, M. Pakdemirli, S. Abbasbandy and H. Boyacı, New perturbation-iteration solutions for nonlinear heat transfer equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 22 (7), 814-828, 2012.
- [4] M. Şenol, İ. T. Dolapçı, Y. Aksoy and M. Pakdemirli, Perturbation-Iteration Method for First-Order Differential Equations and Systems, *Abstract and Applied Analysis* 2013, Article ID 704137, 6 pages.

- [5] İ. T. Dolapçı, M. Şenol, and M. Pakdemirli, New Perturbation Iteration Solutions for Fredholm and Volterra Integral Equations, *Journal of Applied Mathematics* 2013, Article ID 682537, 5 pages.
- [6] M. Pakdemirli, Review of the new perturbation iteration method, *Mathematical and Computational Applications* 18(3), 139-151, 2013.
- [7] H. Hu and Z. G. Xiong, Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods, *Journal of Sound and Vibration* 278: 437-444, 2004.
- [8] M. Pakdemirli and M. M. F. Karahan, A New Perturbation Solution for Systems with Strong Quadratic and Cubic Nonlinearities, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 33, 704-712, 2010.
- [9] M. Pakdemirli, M. M. F. Karahan and H. Boyacı, A new perturbation algorithm with better convergence properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare method, *Mathematical and Computational Applications* 14(1), 31-44, 2009
- [10] M. Pakdemirli, M. M. F. Karahan and H. Boyacı, Forced Vibrations of Strongly Nonlinear Systems with Multiple Scales Lindstedt Poincare Method, *Mathematical and Computational Applications* 16(4), 879-889, 2011.
- [11] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York 1981.