



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## ÇEŞİTLİ TİPTE ÇERÇEVE YAPILARIN DÜZLEM İÇİ ANTI-SİMETRİK MOD SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Kemal Mazanoğlu<sup>1</sup> ve Elif Ç. Kandemir-Mazanoğlu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü-Uşak Üniversitesi, Uşak

<sup>2</sup>Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü-Uşak Üniversitesi, Uşak

### ABSTRACT

In this work, anti-symmetric mode free in-plane vibrations of frame systems are analysed by means of proposed continuous model. Frame structures are continuously described by using equivalent column and lumped mass–stiffness models. Equivalent column is modelled in accordance with the Euler–Bernoulli beam theory. Effects of beam on equivalent column are expressed by lumped mass–stiffness model. Beam based rotational stiffness is calculated by superposition of moment equations. Mass and moment of inertia effects of beam are determined based upon the equivalence of kinetic energies. Compatibility and continuity conditions satisfied at the beam locations allow to use continuous solution method. The method is applied to find the equivalent column mode shapes and corresponding natural frequencies of simple frame structures. Obtained natural frequencies are validated by some results given in current literature.

### ÖZET

Bu çalışmada çerçeve sistemlerin düzlem içi anti-simetrik mod serbest titreşimleri önerilen sürekli model yardımıyla analiz edilmektedir. Çerçeve yapılar eşdeğer kolon ve toplanmış kütle–yay modellerinin kullanılmasıyla sürekli olarak modellenmektedir. Eşdeğer kolon Euler–Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak modellenir. Eşdeğer kolon üzerindeki kiriş etkileri toplanmış kütle–yay modeli ile açıklanır. Kiriş kaynaklı dönme rijitliği moment eşitliklerinin süper pozisyonu ile hesaplanır. Kirişin kütle ve atalet momenti etkileri kinetik enerjilerin eşitliğine dayalı olarak belirlenir. Kiriş pozisyonlarında sağlanan uygunluk ve süreklilik koşulları sürekli çözüm metodunun kullanılmasına izin verir. Metot basit çerçeve yapıların eşdeğer kolon mod şekillerini ve karşılık gelen doğal frekansları bulmak için uygulanmaktadır. Elde edilen doğal frekanslar literatürde verilen bazı sonuçlarla doğrulanmaktadır.

### GİRİŞ

Çerçeve sistemler özellikle makina ve inşaat mühendislerini ilgilendiren birçok alanda karşımıza çıkabilir. Makina mühendisleri bir aracın ya da endüstride kullanılan bir makinanın gövdesini çerçeve sistem olarak düşünebilir. Diğer yandan inşaat mühendislerini ilgilendiren köprü, bina gibi çelik veya betonarme birçok yapı çerçeve sistem barındırmaktadır. Türkiye’de çoğu zaman ihmal edilse de titreşim analizi sıklıkla dinamik yükler altında titreşime maruz kalan makine gövdesi veya yapıların tasarımı açısından hayati öneme sahiptir. Özellikle anti-simetrik modlarda meydana gelen titreşimler deprem ya da rüzgar gibi yatay

kuvvet etkisi altında kalan bir yapının davranış karakteristiğini yansıtmaya açısından çok önemlidir.

Literatürde çeşitli çerçeve sistem tiplerinin titreşim analizleri değişik çözüm yöntemleriyle sunulmuştur. Laura ve arkadaşları [1] Euler–Bernoulli çubuk teorisini ve Rayleigh–Ritz metodunu kullanarak ilave kütle taşıyan tek katlı ve tek bölmeli çerçeve sistemlerin düzlem içi ve anti simetrik titreşim analizini yapmıştır. Wang ve arkadaşları [2] aynı tip çerçeve yapının serbest titreşim problemi çözümünde diferansiyel kareli eleman metodunun kullanımını göstermiştir. Lee ve Ng [3] Rayleigh–Ritz metodunu H ve T şekilli çerçeve sistemlerin titreşim analizinde kullanmıştır. H ve T şekilli çerçeve sistemlerin düzlem içi titreşim analizi Mei [4] tarafından da sunulmuştur. Mei çalışmasında dalga hareketi esaslı analitik bir çözüm yöntemini kullanmaktadır. Yazar aynı yöntemi daha sonra tek katlı çok bölmeli çerçeve sistemler üzerinde de uygulamıştır [5,6]. Şakar ve arkadaşları [7] tek katlı, tek ve çok bölmeli çerçeve sistemlerin serbest ve periyodik yük altındaki titreşimlerini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bulmuşlar ve kararlılık analizi yapmışlardır. Brasiliano ve arkadaşları [8] sonlu eleman titreşim analizini iki katlı çerçeve sistem için uygulamışlar ve çerçevenin hasarsız ve hasarlı durumlarında modal parametrelerdeki değişimleri incelemiştir. Ma [9] sınırları basit mesnetli bir çapraz çerçeve sisteminin düzlem içi titreşim analizini sunmuştur. Albarracin ve Grossi [10] elastik zeminlerle sınırlanmış L şekilli çerçevelerin Hamilton prensibine dayanan çözümünü sunmuşlardır. Aynı yazarlar yöntemi daha sonra elastik bağlantılarla değişik açılarda yerleştirilmiş üç elemandan oluşan çerçeve sistemin çözümünde kullanmaktadır [11]. Lin ve Wu [12] transfer matrisi metodunu ve Timoshenko çubuk teorisini kullanarak kapalı çerçeve sistemlerin çözümünü göstermiştir. Yapıların titreşimi üzerine temel bilgiler ilgili kitaplarda bulunabilir [13,14].

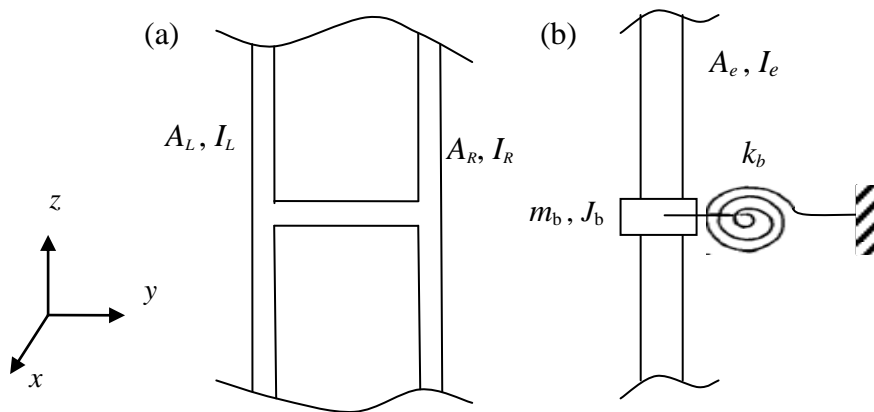
### MODEL ve FORMÜLASYON

Bu çalışmada sunulan yöntem kapsamında çerçeve sistemlerdeki kolonların Euler–Bernoulli çubuk teorisine uyduğu kabulüyle kolon kesit alanları ve alan atalet momentleri toplanarak eşdeğer kolon modeli ( $A_e, I_e$ ) oluşturulmuştur.

$$A_e = A_L + A_R, \quad I_e = I_L + I_R \quad (1)$$

Kirişlerin eşdeğer kolon modeli üzerindeki etkileri Şekil 1’ de gösterildiği gibi toplanmış kütle - burulma yayı modeli ile tanımlanmıştır. Bir kirişin eşdeğer kolon üzerindeki eşdeğer kütle ataleti,  $J_b$ , kinetik enerji eşitliği ilkesinden yararlanılarak elde edilir. Eşdeğer kütle,  $m_b$ , tam olarak kiriş kütlelerine eşit alınabilir.

$$m_e = \rho A_b L_b = m_b \quad (2)$$



Şekil 1. (a) Çerçeve sistemin bir bölümü, (b) eşdeğer kolon - kütle - burulma yayı modeli.

Burada  $\rho$  yoğunluğu,  $A_b$  kiriş kesit alanını ifade eder. Eşdeğer kütle ataletini bulmak için kirişin bir periyotluk sinüs dalgası formunda şekil değiştirdiği düşünülebilir.

$$U(y) = U_m \sin(2\pi y/L_b) \quad (3)$$

$U_m$  maksimum şekil değiştirmeyi,  $L_b$  kiriş boyunu ifade eder. Kirişin uçlarında veya ortasında yer değiştirme,  $U(0)$ , yok iken eğim,  $\theta(0)$ , maksimumdur ( $\theta(0) = U_m 2\pi / L_b$ ). Enerji eş değerliğinden yararlanılarak yazılan zamandan bağımsız eşitlik şöyledir.

$$\frac{1}{2} J_e \theta(0)^2 = \frac{1}{2} \int_{-L_b/2}^{L_b/2} \rho A_b U(y)^2 dy \quad (4)$$

Eşitlik (3,4) ve maksimum eğim ifadesi yardımıyla eşdeğer kütle ataleti  $J_e$  bulunur.

$$J_e = \frac{\rho A_b L_b^3}{4\pi^2} = \frac{3\rho h_b I_{bxy}}{\pi^2} \quad (5)$$

Denklemden  $I_{bxy}$  kirişin  $x$ - $y$  düzlemi içindeki kesiti için alan atalet momentini ( $I_{bxy} = d_b I_b^3 / 12$ ) sembolize ederken  $h_b$  ve  $d_b$  sırasıyla kalınlık ve derinliği gösterir. Kirişin esnekliğinin kolon üzerindeki etkisini tanımlayan eşdeğer burulma yayı katsayısı,  $k_b$ , kiriş eleman moment eşitlikleri ve süper pozisyon ilkesi kullanılarak bulunur. Bir tarafı sabit diğer tarafı esnek (basit mesnetli) bir kiriş eleman üzerinde oluşan momentler sabit tarafta  $2EI_b / L_b$ , esnek tarafta  $4EI_b / L_b$  dir [14]. Süperpozisyon ilkesi ile sinüs formunda deformasyon elde etmek için sabit ve esnek tarafların yerleri değiştirilmesiyle ilaveten ortaya çıkan momentler de dikkate alındığında kiriş üzerindeki toplam moment  $12EI_b / L_b$  olarak belirlenir. Birim dönme açısı için toplam moment kirişin rijitlik katsayısı olarak alınabilir ( $k_t = 12EI_b / L_b$ ).

Yukarıda bahsedilen kiriş parametrelerinin eşdeğer kolon üzerine etkileri uygunluk ve süreklilik şartları ile tanımlanır. Süreklilik şartları kirişin hemen altı ve üstü için kolon yer değiştirme ve eğiminin eşit olmasını gerektirir.

$$W(z_b^-) = W(z_b^+), \quad (6a)$$

$$W'(z_b^-) = W'(z_b^+). \quad (6b)$$

Denklemlerde  $z_b$  kirişin kolon üzerindeki pozisyonunu, işaretler ise o pozisyonun hemen altını ve üstünü sembolize eder.  $W$  mod şeklini gösteren yer değiştirme fonksiyonudur ve Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun diferansiyel denklemin düzgün kesitli çubuk için çözümünden aşağıdaki formda elde edilir.

$$W(z) = C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z + C_3 \cosh \beta z + C_4 \sinh \beta z, \quad (7)$$

Burada  $C$ 'ler harmonik ve hiperbolik terimlerin katsayıları,  $\beta$  frekans parametresidir ve doğal frekansa ( $\omega$ ) bağlı olarak ifade edilir.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A_e \omega^2}{EI_e}}. \quad (8)$$

Uygunluk şartları için zamandan bağımsız denklemler aşağıdaki gibidir.

$$W''(z_b^-) + \lambda W'(z_b) = W''(z_b^+) \quad (9a)$$

$$W'''(z_b^-) + \mu W(z_b) = W'''(z_b^+) \quad (9b)$$

$\lambda$  ve  $\mu$  aşağıdaki denklemlerle tanımlanır.

$$\lambda = \frac{J_e \omega^2 - k_t}{EI_e}, \quad (10a)$$

$$\mu = \frac{m_e \omega^2}{EI_e}. \quad (10b)$$

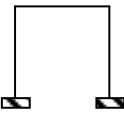
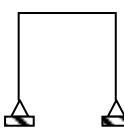
Eşdeğer kolonun uçları için bazı klasik sınır şartları Çizelge 1’ de verilmektedir. Kirişlerle ayrılan  $n$  adet kolon bölmesi için Eşitlik (7) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

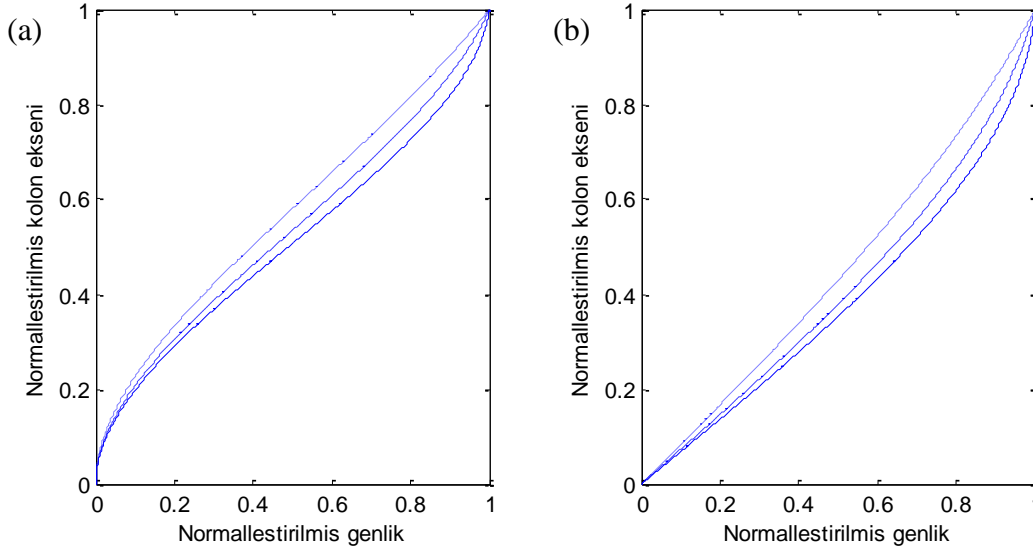
$$W_i(z) = C_{4i-3} \cos \beta z + C_{4i-2} \sin \beta z + C_{4i-1} \cosh \beta z + C_{4i} \sinh \beta z, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

Çizelge 1. Kolonun uçları için klasik sınır şartları.

Sınırlar	Eşitlikler
Serbest	$W'' = 0, \quad W''' = 0$
Sabit	$W = 0, \quad W' = 0$
Basit	$W = 0, \quad W'' = 0$

Çizelge 2. Tek katlı tek bölmeli çerçeve sistemlerin sabit-sabit ve basit-basit mesnetli sınır koşulları için ayrı ayrı elde edilen boyutsuz temel frekanslar.

Çerçeve şekli	Çerçeve özellikleri			Frekans parametresi $\beta^2 = \omega L_c^2 (\rho_c A_c / E_c I_c)^{0.5}$			
	$E_c I_c / E_b I_b$	$\rho_c A_c / \rho_b A_b$	$L_c / L_b$	Şakar ve Ark. [7]	Laura ve Ark. [1]	Kolousek [13]	Bu çalışma
	0.25	0.25	1.5	2.559	2.5621	2.5614	2.5611
			3	3.327	3.3396	3.3379	3.3382
			6	4.029	4.0791	4.0782	4.0779
	1.5	1.5	1.5	3.933	3.9369	3.9350	3.9334
			3	4.620	4.6299	4.6289	4.6292
			6	5.030	5.0720	5.0719	5.0719
6	6	1.5	4.043	4.0446	4.0441	4.0416	
		3	4.567	4.5713	4.5710	4.5711	
		6	4.950	4.9772	4.9769	4.9772	
	0.25	0.25	1.5	1.236	1.2378	1.2374	1.2376
			3	1.577	1.5837	1.5833	1.5835
			6	1.867	1.8935	1.8931	1.8933
	1.5	1.5	1.5	1.742	1.7435	1.7432	1.7431
			3	2.047	2.0527	2.0523	2.0526
			6	2.219	2.2446	2.2446	2.2446
6	6	1.5	1.507	1.5074	1.5072	1.5071	
		3	1.845	1.8485	1.8482	1.8485	
		6	2.084	2.1033	2.1030	2.1033	



Şekil 2.  $L_c/L_b = 1.5$  kolon / kiriş boy oranı için (a) sabit-sabit (b) basit-basit sınırlı çerçeve sistemlerde kolon mod şekilleri. Kolon / kiriş alan ve alan atalet momenti oranları: (—) 0.25, (---) 1.5, (- - -) 6.

Kolon uçlarındaki sınır şartlarından 4 denklem, her ara kiriş pozisyonundaki süreklilik ve uygunluk şartlarından 4 denklem elde edilir.  $n-1$  ara kiriş ile elde edilen  $4n-4$  denkleme ilaveten uçlar için yazılan 4 denklem toplamda  $4n$  adet denklem içeren bir set oluşturur. Bu denklem setinin harmonik ve hiperbolik terimlerinden oluşturulan matrisin determinantı "0" a eşitlenerek yapılan tekillik analizinden doğal frekanslar elde edilir.

### SAYISAL SONUÇLAR

Önerilen model tek katlı ve H tipi çerçeve sistemlere uygulanmış olup sonuçlar literatürde verilenlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

Yöntemin tek katlı ve tek bölmeli çerçeve yapıya uygulanması daha önce Kolousek [13], Laura ve arkadaşları [1], Şakar ve arkadaşları [7] tarafından verilen çerçeve ölçü ve özellikleri kullanılarak yapılmıştır. Temel mod için boyutsuz doğal frekans parametreleri cinsinden karşılaştırmalı sonuçlar Çizelge 2' de verilmiştir. Literatürde verilen diğer sonuçlarla iyi bir uyum gözlenmektedir. Sabit-sabit ve basit-basit mesnetli olarak ele alınan çerçeve sistemler arasında kolon boyunun kiriş boyuna oranının,  $L_c/L_b = 1.5$  olduğu durumlar için elde edilen frekanslara karşılık gelen eş değer kolon mod şekilleri Şekil 2' de görülmektedir. Verilen grafiklerden kiriş alan ve alan atalet momentinin artmasıyla kolonun kiriş tarafının sabit sınır karakteristiğine yaklaştığı anlaşılmaktadır.

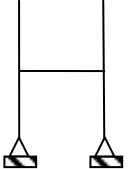
İkinci örnekte iki ucu basit mesnetli iki ucu serbest H şekilli bir çerçeve sistemi ele alınmıştır. Yapıdaki bir kolonun boyu kiriş boyunun iki katıdır ve kiriş kolonları tam ortasından bağlanmaktadır. Önerilen yöntem ile ilk iki anti-simetrik mod için elde edilen serbest titreşim frekansları Lee ve Ng [3] ve daha sonra Mei [4] tarafından sunulan sonuçlarla karşılaştırmalı olarak Çizelge 3' de verilmektedir. Sonuçlar oldukça iyi bir uyum göstermektedir. Çizelgede verilen boyutsuz frekanslara karşılık gelen eşdeğer kolon anti-simetrik mod şekilleri de Şekil 3' de görülmektedir. Kiriş elemanın kolon mod şekillerine etkileri net olarak gözlenebilmektedir.

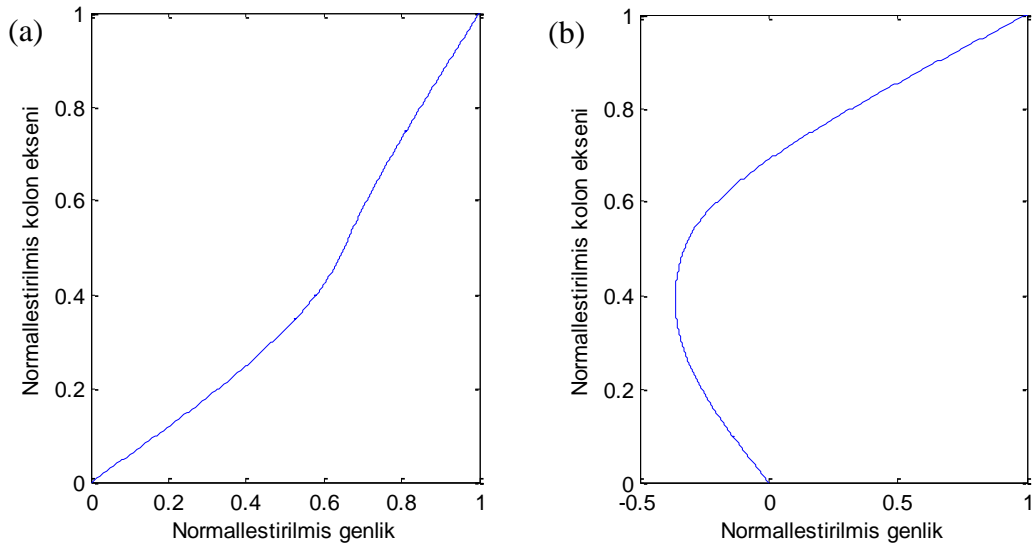
### BULGULAR

Bu çalışmada çerçeve sistemlerin düşük anti-simetrik modlarının serbest titreşim analizinin önerilen model ve uygulanan sürekli çözüm yardımıyla yapılması sunulmaktadır. Çalışma kapsamında yapılan analizler göstermektedir ki; sunulan eşdeğer kolon – toplanmış kütle –

burulma yayı modeli çerçeve yapıların sürekli çözümüne imkan vermektedir. Uygulanan sürekli çözümde matris boyutu kat sayısına göre artmaktadır. Yine de çözüm matrisinin sonlu elemanlar gibi başka yöntemlerle karşılaştırıldığında çok küçük boyutlarda kalması yöntemin en önemli avantajlarından birini ortaya koymaktadır. Tek katlı ve H tipi çerçeve yapılar için elde edilen sonuçlar ilk titreşim modunun tam çözüme çok yakın olduğunu göstermektedir. Modelin geçerliliği çok katlı – çok bölmeli çerçeve yapılar için test edilmemiştir. Ancak bazı matematiksel düzenlemeler ile modelin bu yapılar ve yüksek titreşim modları için geçerli olmasını sağlamak mümkün olabilir. Modelin en önemli sınırı anti-simetrik mod şekline sahip olacak şekilde kolonların birbirine yakın alan ve alan atalet momentlerine sahip olması gerekliliğidir.

Çizelge 3. H şekilli bir çerçeve sistemin anti-simetrik modlarının ilk ikisi için elde edilen boyutsuz frekanslar.

Çerçeve şekli	Çerçeve özellikleri			Frekans parametresi $\beta^2 = \omega(L_c/2)^2(\rho_c A_c/E_c I_c)^{0.5}$			
	$E_c I_c/E_b I_b$	$\rho_c A_c/\rho_b A_b$	$L_c/L_b$	Mod numarası	Mei [4]	Lee ve Ng. [3]	Bu çalışma
	1	1	2	1	0.9	0.92059	0.9122
				2	3.8	3.82212	3.8069



Şekil 3. H şekilli çerçeve sistem kolonları için (a) birinci ve (b) ikinci anti-simetrik mod şekilleri.

### KAYNAKLAR

- [1] P.A.A. Laura, C.P. Filipich, B.H.V. de Greco, In-plane vibrations of frames carrying concentrated masses, *Journal of Sound and Vibration*, 117(3) (1987) 447-458.
- [2] X. Wang, Y. Wang, Y. Zhou, Application of a new differential quadrature element method to free vibration analysis of beams and frame structures, *Journal of Sound and Vibration*, 269 (2004) 1133-1141.

- [3] H.P. Lee, T.Y. Ng, In-plane vibration of planar frame structures, *Journal of Sound and Vibration*, 172(3) (1994) 420-427.
- [4] C. Mei, In-plane vibrations of classical planar frame structures – an exact wave based analytical solution, *Journal of Vibration and Control*, 16 (9) (2010) 1265-1285.
- [5] C. Mei, Free vibration analysis of classical single-storey multi-bay planar frames, *Journal of Vibration and Control*, 19 (13) (2012) 2022-2035.
- [6] C. Mei, Effects of rotary inertia, shear deformation, and joint model on vibration characteristics of single-storey multi-bay planar frame structures, *Journal of Vibration and Control*, 20(8) (2014) 1224-1238.
- [7] G. Şakar, H. Öztürk, M. Sabuncu, Dynamic stability of multi-span frames subjected to periodic loading, *Journal of Constructional Steel Research*, 70 (2012) 65-70.
- [8] A. Brasiliano, G.N. Doz, J.L.V. de Brito, Damage identification in continuous beams and frame structures using the residual error method in the movement equation, *Nuclear Engineering and Design*, 227 (2004) 1-17.
- [9] H. Ma, Exact solution of vibration problems of frame structures, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26 (2010) 587-596.
- [10] C.M. Albarracin, R.O. Grossi, Vibrations of elastically restrained frames, *Journal of Sound and Vibration*, 285 (2005) 467-476.
- [11] R.O. Grossi, C.M. Albarracin, Variational approach to vibrations of frames with inclined members, *Applied Acoustics*, 74 (2013) 325-334.
- [12] H.-P. Lin, J.-D. Wu, Dynamic analysis of planar closed frame structures, *Journal of Sound and Vibration*, 282 (2005) 249-264.
- [13] V. Kolousek, *Dynamics in Engineering Structures*, London: Butterworth and Co.,1973.
- [14] A. Chopra, *Dynamics of Structures*, New Jersey: Prentice Hall, 1995.