



## RIJİT ORTAM ÜZERİNDEKİ PIEZOELEKTRİK ÖRTÜ TABAKASI VE PIEZOELEKTRİK LEVHADAN OLUŞAN SİSTEMİN DİNAMİK DAVRANIŞI

Nihat İLHAN<sup>1</sup>, Nagihan KOÇ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yrd. Doç. Dr., İnşaat Müh.-Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

<sup>2</sup>Doktora Öğr., Matematik, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

This paper investigates the dynamic response to a time-harmonic load of a system comprising piezoelectric covering layer and a piezoelectric layer on a rigid foundation, within the scope of the piecewise-homogeneous body model utilizing electro-elasto dynamic linear theory. The investigations were made for a two-dimensional problem (plane-strain state)

Mathematical formulation of the sought problem is performed and the solution of the obtained boundary value problem is found by applying Fourier transformation. It is assumed that between the covering layer and half-plane perfect contact conditions are satisfied. An algorithm is proposed and employed to obtain numerical results on the distribution of stresses acting on the interface plane. The effects of material parameters and plate thicknesses on numerical results related to stress distribution are presented. The piezoelectric materials PZT-5A, PZT-5H, PZT-4 and PZT- 7A are examined.

### ÖZET

Piezoelektrik örtü tabakası ve rijit ortam üzerindeki piezoelektrik levhadan oluşan sistemin zamana göre harmonik değişen yük etkisi altındaki dinamik davranışı, düzlem şekil değiştirme halinde, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, elektro-elasto dinamiğin lineer teorisi kullanılarak incelenmiştir.

Problemin matematiksel formülasyonu yapılmış ve elde edilen sınır değer probleminin çözümü Fourier integral dönüşümü uygulanarak bulunmuştur. Tam temas koşullarına sahip örtü tabakası ve levhadan oluşan sistemin ara yüzeyindeki gerilme dağılımı sayısal olarak incelenmiştir. Sayısal sonuçlar örtü tabakası ve levhanın PZT- 5A, PZT-5H, PZT-4 ve PZT- 7A malzemelerinden oluşması halleri için ve farklı levha kalınlıkları için elde edilmiştir.

### GİRİŞ

Piezoelektrik malzemeler; kristal yapıları sayesinde mekanik etkiyi elektrik potansiyele veya elektrik alana dönüştüren malzemelerdir. Aynı zamanda piezoelektrik malzemelere etki ettirilen elektrik alan veya elektrik potansiyel sebebiyle malzeme üzerinde mekanik etki oluşabilmektedir. Piezoelektrik dönüştürücüler ve sensörler gibi cihazlarda yaygın olarak kullanılan piezoelektrik malzemeler özellikleri sebebiyle birçok alanda kullanılmıştır. Bu nedenle, şimdiye kadar bu alanda pek çok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmalar detaylı bir biçimde [1] de anlatılmıştır. Elastik tabaka ve elastik yarı-uzaydan oluşan sistem için ilgili araştırmalar [2-10] de yapılmıştır. Piezoelektrik malzemelerin

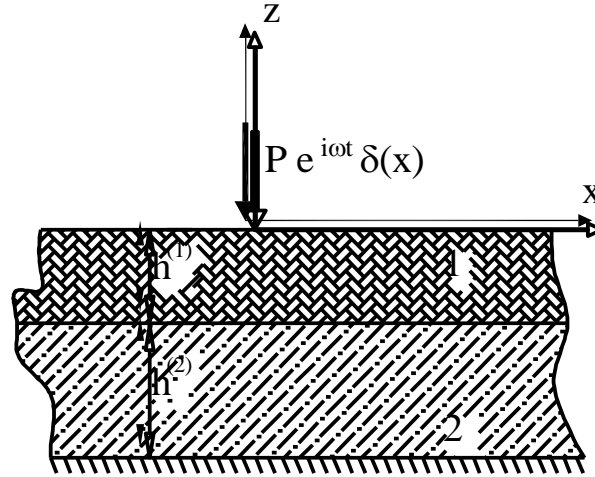
dinamik davranışıyla ilgili sonuçlar sistematik olarak [11-13] ve daha birçok çalışmada yayınlanmıştır. Piezoelektrik yarı-düzlem için iki boyutlu elektro-elastik statik problemlerin çözümü için çeşitli yöntemler [14-18] de geliştirilmiştir. Ayrıca [17] de iki boyutlu elektro-elastik tabakalı sistemler için bir çözüm yöntemi önerilmiştir.

Piezoelektrik örtü tabakası ve piezoelektrik yarı sonsuz ortamdaki oluşan sistemin Lamb problemiyle ilgili ilk çalışmalar [19, 21] de yapılmıştır. Bu çalışmalarda rijit ortam üzerindeki piezoelektrik tabaka ve piezoelektrik yarı-düzlemden oluşan sistemin zamana göre harmonik Lamb probleminin çözümü yapılmıştır. Zamana göre harmonik değişen yükün, ön gerilmenin ve farklı yöndeki polarizasyonun ara yüzeydeki gerilme dağılımına etkisi sayısal olarak incelenmiştir.

### PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU

Kalınlığı  $h^{(1)}$  olan örtü tabakası kalınlığı  $h^{(2)}$  olan bir levha üzerindedir (Şekil 1). Örtü tabakası ve alt levha sırasıyla  $\{-\infty < x < \infty, -h^{(1)} \leq z \leq 0\}$ ,  $\{-\infty < x < +\infty, -(h^{(1)} + h^{(2)}) \leq z \leq -h^{(1)}\}$  bölgelerini kapsamaktadır. Örtü tabakasına ve alt levhaya ait büyüklükler sırasıyla (1) ve (2) üst indisleriyle tanımlanmıştır.

Örtü tabakasına üst serbest yüzeyine  $O_x$  eksenine göre tekil  $O_y$  eksenine göre ise üniform yayılı zamana göre harmonik değişen yük etki etmektedir. Bu nedenle ele alınan sistemde  $O_{xz}$  düzleminde düzlem şekil değiştirme durumu oluşmaktadır.



Şekil 1: Problemin Geometrisi

Probleme ilişkin hareket denklemi ve bünye bağıntıları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_i} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i^{(k)}}{\partial x_i} = 0 \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= C_{ijkl}^{(k)} \gamma_{kl}^{(k)} - e_{kij}^{(k)} E_k^{(k)}, \quad E_i^{(k)} = -\phi_{,i}^{(k)} \\ D_i^{(k)} &= e_{ikl}^{(k)} \gamma_{kl}^{(k)} - \varepsilon_{il}^{(k)} E_l^{(k)} \\ \gamma_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \end{aligned} \quad (1)$$

Burada  $C_{ijkl}^{(k)}$  k nıncı elemanın rijitlik matrisinin elemanları,  $D_i^{(k)}$  elektriksel yer değiştirme vektörü,  $E_i^{(k)}$  elektrik alan vektörü,  $\phi^{(k)}$  elektrik potansiyeli,  $e_{kij}^{(k)}$  ve  $\varepsilon_{il}^{(k)}$  piezoelektrik ve dielektrik sabitler,

$u_i^{(k)}$  yer değiştirme vektörünün elemanları,  $\gamma_{ij}^{(k)}$  Şekil değiştirme tensörünün elemanları,  $\sigma_{ij}^{(k)}$  gerilme tensörünün elemanlarını göstermektedir.

Düzlem Şekil değiştirme hali için incelenen sistemde tabakalar arasında tam bağlı bir ilişki olduğu varsayılmıştır. Bu durumda sistemde sınır ve temas koşulları izleyen Őekilde olmaktadır.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} \Big|_{z=-h^{(1)}} &= \sigma_{xz}^{(2)} \Big|_{z=-h^{(1)}} ; \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=-h^{(1)}} = \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{z=-h^{(1)}} ; u_1^{(1)} \Big|_{x_2=-h^{(1)}} = u_1^{(2)} \Big|_{x_2=-h^{(1)}} \\ w^{(1)} \Big|_{z=-h^{(1)}} &= w^{(2)} \Big|_{z=-h^{(1)}} ; \varphi^{(1)} \Big|_{z=-h^{(1)}} = \varphi^{(2)} \Big|_{z=-h^{(1)}} ; D_z^{(1)} \Big|_{z=-h^{(1)}} = D_z^{(2)} \Big|_{z=-h^{(1)}} \end{aligned} \quad (2)$$

Örtü tabakasının üst yüzeyinde ve yer değiştirmesine rijit ortam tarafında izin verilmeyen ikinci piezoelektrik tabakanın alt yüzeyinde

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=0} = P e^{i\omega t} \\ u_1^{(2)} \Big|_{x_2=-(h^{(1)}+h^{(2)})} &= 0, \quad u_2^{(2)} \Big|_{x_2=-(h^{(1)}+h^{(2)})} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

sınır Őartları sağlanmaktadır.

Bununla birlikte çalışmada örtü tabakasının üst yüzeyi ve alt levhanın rijit ortamla temas ettiği yüzeyin elektrotlu ve elektrotsuz olması durumları için

$$\begin{aligned} \text{durum 1: } \varphi^{(1)} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \varphi^{(2)} \Big|_{z=-(h^{(1)}+h^{(2)})} = 0 \\ \text{durum 2: } D_z^{(1)} \Big|_{z=0} &= 0, \quad D_z^{(2)} \Big|_{z=-(h^{(1)}+h^{(2)})} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

## ÇÖZÜM METODU

Çalışmada ele alınan malzeme transversal izotrop olarak ele alınmıştır. [11] ye göre elektro elastisitenin lineer teorisine göre hareket denklemi izleyen Őekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial D_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial D_z^{(k)}}{\partial z} &= 0, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (5)$$

Eğer  $k$ . malzemenin polarizasyon yönü  $Oz$  doğrultusunda olursa bu durumda elektro mekanik ilişkiler izleyen Őekilde olacaktır [19].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= C_{11}^{(k)} \gamma_{xx} + C_{13}^{(k)} \gamma_{zz} - e_{31}^{(k)} E_z^{(k)}, \quad \sigma_{zz}^{(k)} = C_{13}^{(k)} \gamma_{xx} + C_{33}^{(k)} \gamma_{zz} - e_{33}^{(k)} E_z^{(k)}, \\ \sigma_{xz}^{(k)} &= C_{44}^{(k)} (\gamma_{xz} + \gamma_{zx}) - e_{15}^{(k)} E_x^{(k)}, \quad D_x^{(k)} = e_{15}^{(k)} (\gamma_{xz} + \gamma_{zx}) + \varepsilon_{11}^{(k)} E_x^{(k)}, \\ D_z^{(k)} &= e_{31}^{(k)} (\gamma_{xx}) + e_{33}^{(k)} (\gamma_{zz}) + \varepsilon_{33}^{(k)} E_z^{(k)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Eğer  $k$ . malzemenin polarizasyon yönü  $Ox$  doğrultusunda olursa bu durumda elektro mekanik ilişkiler izleyen Őekilde olacaktır [20].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= C_{33}^{(k)} \gamma_{xx} + C_{13}^{(k)} \gamma_{zz} + e_{33}^{(k)} E_x^{(k)}, \quad \sigma_{zz}^{(k)} = C_{13}^{(k)} \gamma_{xx} + C_{11}^{(k)} \gamma_{zz} + e_{31}^{(k)} E_x^{(k)}, \\ \sigma_{xz}^{(k)} &= C_{44}^{(k)} (\gamma_{xz} + \gamma_{zx}) + e_{15}^{(k)} E_z^{(k)}, \quad D_x^{(k)} = e_{33}^{(k)} (\gamma_{xx}) + e_{31}^{(k)} (\gamma_{zz}) - \varepsilon_{33}^{(k)} E_x^{(k)}, \\ D_z^{(k)} &= e_{15}^{(k)} (\gamma_{xz} + \gamma_{zx}) - \varepsilon_{11}^{(k)} E_z^{(k)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ayrıca Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları ve elektrik alan-elektrik potansiyel ilişkileri izleyen Őekilde olacaktır.

$$\gamma_{xx}^{(k)} = \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x}, \gamma_{zz}^{(k)} = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial z}, \gamma_{xz}^{(k)} = \gamma_{zx}^{(k)} = \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial x}, E_x^{(k)} = -\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x}, E_z^{(k)} = -\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial z} \quad (8)$$

Ox doğrultusunda polarize malzeme için problem çözümü [20] de verilmiştir. Burada sadece Oz doğrultusunda polarize malzeme için çözümleme yapılacaktır. (6) denklemlerindeki bünye bağıntıları hareket denkleminde yerine yazılırsa yer değiştirmeler cinsinden hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x^2} + C_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial xz} + e_{31}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial xz} + C_{44}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial xz} \right) + e_{15}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial xz} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2}, \\ C_{44}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial xz} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \right) + e_{15}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + C_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial xz} + C_{33}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial z^2} + e_{33}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} \\ e_{15}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial xz} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \right) - \varepsilon_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + e_{31}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial xz} \right) + e_{33}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial xz} \right) - \varepsilon_{33}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(9) denklemindeki tüm büyüklükler  $g(x', z', t) = \bar{g}(x', z') e^{i\omega t}$  dönüşümü yapılarak yeniden tanımlanırsa probleme ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}^{(k)} \partial^2 U^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x^2} + \frac{C_{13}^{(k)} \partial^2 W^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x \partial z} + \frac{e_{31}^{(k)} \partial^2 \varphi^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x \partial z} + \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{e_{15}^{(k)} \partial^2 \varphi^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x \partial z} &= -\omega^2 \frac{1}{(c_2^{(k)})^2} U^{(k)}, \\ \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \right) + \frac{e_{15}^{(k)} \partial^2 \varphi^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x^2} + \frac{C_{13}^{(k)} \partial^2 U^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial x \partial z} + \frac{C_{33}^{(k)} \partial^2 W^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial z^2} + \frac{e_{33}^{(k)} \partial^2 \varphi^{(k)}}{C_{44}^{(k)} \partial z^2} &= -\omega^2 \frac{1}{(c_2^{(k)})^2} W^{(k)} \\ \frac{e_{15}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \right) - \varepsilon_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + e_{31}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x \partial z} \right) + e_{33}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial z^2} \right) - \varepsilon_{33}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial z^2}}{C_{44}^{(k)}} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Buradaki  $c_2^{(k)}$  dilatasyon dalga hızıdır ve  $c_2^{(k)} = \sqrt{C_{44}^{(k)} / \rho^{(k)}}$  şeklinde tanımlanır.

(10) denklemini çözebilmek için,

$$f_F(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) e^{-isx} dx \quad (11)$$

Fourier integral dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüm sayesinde aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_F^{(k)}}{dz^2} + \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \frac{dW_F^{(k)}}{dz} + \left( \frac{e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \frac{d\varphi_F^{(k)}}{dz} + \left( \frac{C_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) U_F^{(k)} &= 0 \\ \frac{C_{33}^{(k)} d^2 W_F^{(k)}}{C_{44}^{(k)} dz^2} + \frac{e_{33}^{(k)} d^2 \varphi_F^{(k)}}{C_{44}^{(k)} dz^2} + \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \frac{dU_F^{(k)}}{dz} + \left( (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) W_F^{(k)} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \varphi_F^{(k)} &= 0 \\ \frac{e_{33}^{(k)} d^2 W_F^{(k)}}{C_{44}^{(k)} dz^2} - \frac{\varepsilon_{33}^{(k)} d^2 \varphi_F^{(k)}}{C_{44}^{(k)} dz^2} + \left( \frac{e_{15}^{(k)} + e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \frac{dU_F^{(k)}}{dz} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) W_F^{(k)} - \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \varphi_F^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Denklem (12) de  $\Omega^2 = \left( \frac{\omega}{c_2^{(1)}} \right)^2$  notasyonu kullanılmıştır. Bu denklem takımının çözümlenebilmesi için yer değiştirmeler ve elektrik potansiyel ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u_F^{(k)} = A^{(k)} e^{\lambda^{(k)} z}, \quad w_F^{(k)} = B^{(k)} e^{\lambda^{(k)} z}, \quad \varphi_F^{(k)} = C^{(k)} e^{\lambda^{(k)} z} \quad (13)$$

Bu durumda (12) denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
A^{(k)} \left( \lambda^{(k)^2} + \left( \frac{C_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) \right) + B^{(k)} \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \lambda^{(k)} + C^{(k)} \left( \frac{e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \lambda^{(k)} &= 0 \\
A^{(k)} \left( \frac{C_{13}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + 1 \right) (is) \lambda^{(k)} + B^{(k)} \left( \frac{C_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \lambda^{(k)^2} + \left( -s^2 \right) + \Omega^2 \frac{(c_2^{(1)})^2}{(c_2^{(k)})^2} \right) + C^{(k)} \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \lambda^{(k)^2} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) &= 0 \quad (14) \\
A^{(k)} \left( \left( \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} + \frac{e_{31}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \right) (is) \lambda^{(k)} \right) + B^{(k)} \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \lambda^{(k)^2} + \frac{e_{15}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) + C^{(k)} \left( -\frac{\varepsilon_{33}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} \lambda^{(k)^2} - \frac{\varepsilon_{11}^{(k)}}{C_{44}^{(k)}} (-s^2) \right) &= 0
\end{aligned}$$

(14) denkleminde  $\lambda^{(k)}$  değerlerinin bulunacağı karakteristik denklem elde edilir.

$$(\Lambda^{(k)})^3 + (\Lambda^{(k)})^2 a_4^{(k)} + \Lambda^{(k)} a_2^{(k)} + a_0^{(k)} = 0 \quad (15)$$

(9) ve (14) denklemleri kullanılarak probleme ait mekanik büyüklüklerin Fourier integral dönüşümleri hesaplanabilir. Probleme ait gerçek büyüklüklerin bulunması için ters Fourier integral dönüşümü yapılır.

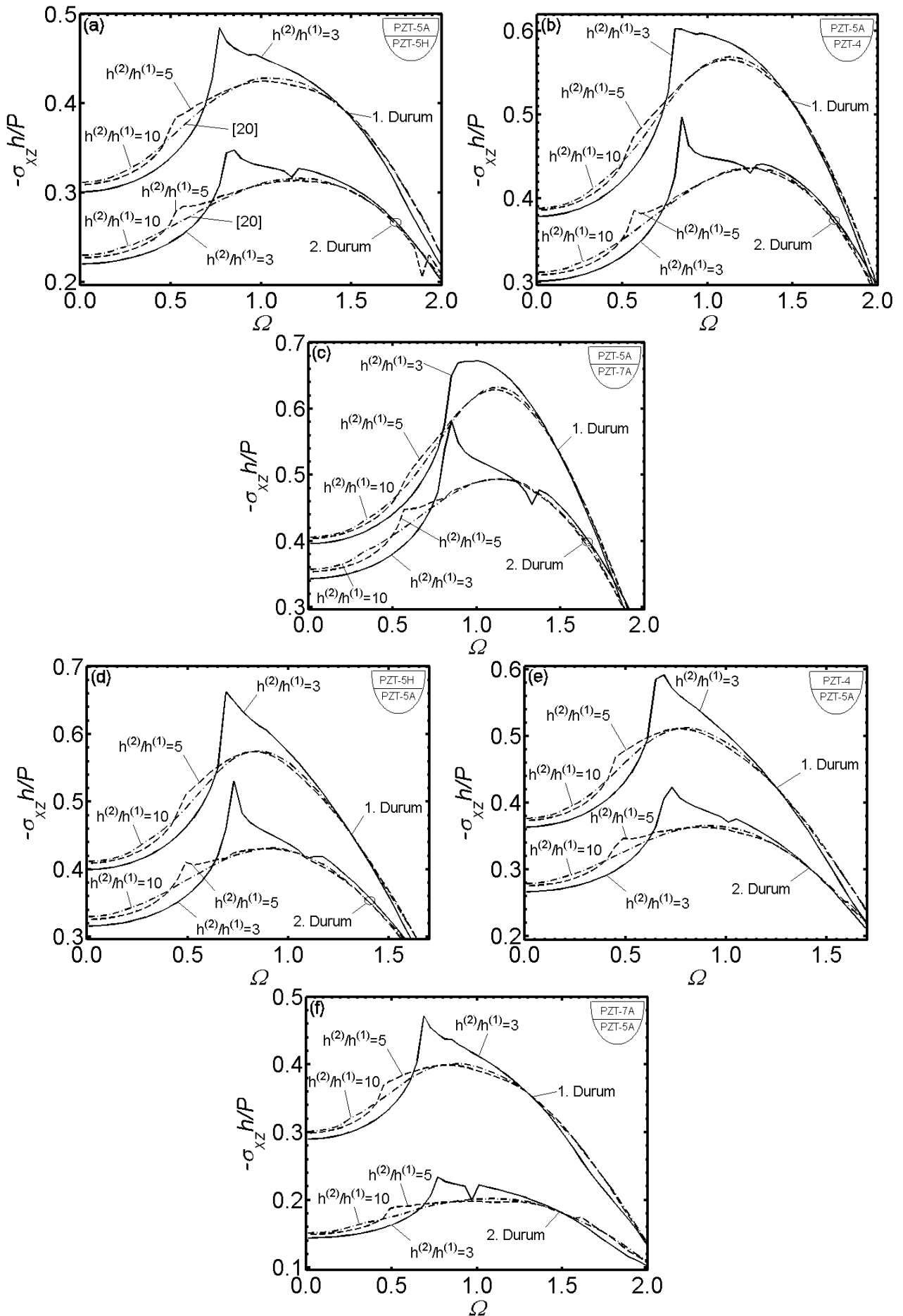
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(s, x_2) e^{isx_1} ds \quad (16)$$

### SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçlar Çizelge (1) de mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri verilen malzemeler için elde edilmiştir. Bu çalışmada zamana göre harmonik değişen yükün boyutsuzlaştırılmış frekansının örtü tabakası ve yarı sonsuz ortamın birleşim düzlemindeki  $\sigma_{xz} h / P (= \sigma_{xz}^{(2)} (0.7, -h^{(1)}) h^{(1)} / P)$  gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir. İncelemede üst tabakanın polarizasyon yönü  $O_x$  yönünde alt tabakanın polarizasyon yönü  $O_z$  yönünde alınmıştır. Farklı malzeme çiftleri için  $h^{(2)} / h^{(1)}$  tabaka kalınlığı oranlarının gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir.  $h^{(2)} / h^{(1)}$  oranı büyüdükçe elde edilen sonuçların [20] de verilen sonuçlara yakınsaması beklenmektedir. Yapılan sayısal incelemede  $h^{(2)} / h^{(1)} = 10$  için elde edilen grafiklerin [20] ile çakıştığı görülmüş böylece problem için geliştirilen algoritmanın doğruluğu kanıtlanmış olmaktadır.

Çizelge 1. Malzeme özellikleri

	$C_{44} * 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$C_{11} * 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$C_{13} * 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$C_{33} * 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
PZT-5A	2.11	12.1	7.54	11.1	7750
PZT-5H	2.30	12.6	8.39	11.7	7500
PZT-4	2.56	13.9	7.40	11.5	7500
PZT-7A	2.53	14.8	8.13	13.1	7600
	$e_{31}$ C/m <sup>2</sup>	$e_{33}$ C/m <sup>2</sup>	$e_{15}$ C/m <sup>2</sup>	$\varepsilon_{11} * 10^{-8}$ C/Vm	$\varepsilon_{33} * 10^{-8}$ C/Vm
PZT-5A	-5.4	15.8	12.3	0.811	0.735
PZT-5H	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
PZT-4	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562
PZT-7A	-2.1	9.5	9.2	0.407	0.208



Şekil 2  $\sigma_{xz} h/P$  kayma gerilmelerinin  $\Omega$  ya göre değişimi

## SONUÇ

İncelenen tüm malzeme çiftleri için elde edilen grafiklerde 1. durum için elde edilen gerilmelerin 2. durum için elde edilen gerilmelerden daha büyük olduğu görülmektedir. Tabaka kalınlıkları oranı  $h^{(2)} / h^{(1)}$  5 ve 10 olması durumunda gerilme dağılımının çok değişmediği, az bir farkla da olsa  $\Omega=0.5$  değerine kadar  $h^{(2)} / h^{(1)} = 10$  için elde edilen gerilme değerlerinin  $h^{(2)} / h^{(1)} = 5$  için elde edilen gerilme değerlerinden beklenenin aksine daha küçük olduğu ve en düşük gerilme değerlerinin  $h^{(2)} / h^{(1)} = 3$  te olduğu görülmektedir. Ancak  $\Omega$  büyüdükçe bu davranışın değiştiği ve en büyük gerilme değerinin  $h^{(2)} / h^{(1)} = 3$  te olduğu görülmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Akbarov S. D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems. Springer, 2015
- [2] Akbarov, S. D., Ilhan, N., Time-harmonic dynamical stress field in a system comprising a pre-stressed orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane. Archive of Applied Mechanics, 80 (11), 1271-1286, 2010.
- [3] Akbarov, S. D., Salmanova, K. A., On the dynamics of a finite pre-strained bi-layered slab resting on a rigid foundation under the action of an oscillating moving load. Journal of Sound and Vibration, 327, 454-472, 2009.
- [4] Akbarov, S. D., Ilhan, N., Dynamics of a system comprising an orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane under the action of an oscillating moving load. International Journal of Solids and Structures, 46 (21) 3873-3881, 2009.
- [5] Akbarov, S. D., Ilhan, N., 2008. Dynamics of a system comprising an orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane under the action of a moving load. International Journal of Solids and Structures, 45 (14-15) 4222-4235, 2008.
- [6] Akbarov, S. D., On the dynamical axisymmetric stress field in a finite pre-stretched bilayered slab resting on a rigid foundation. Journal of Sound and Vibration, 294, 221-237, 2006.
- [7] Akbarov, S. D., The influence of the third order elastic constants on the dynamical interface stress field in a half-space covered with a pre-stretched layer. International Journal of Non-linear Mechanics. 41 (3), 417-425, 2006.
- [8] Akbarov, S. D., Dynamical (time-harmonic) axisymmetric interface stress field in the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stretched layer. International Journal of Engineering Science. 44 (1-2), 93 – 112, 2006.
- [9] Akbarov, S. D., Frequency response of the axisymmetrically finite pre-stretched slab from incompressible functionally graded material on a rigid foundation. International Journal of Engineering Science. 44 (8-9), 484 – 500, 2006.
- [10] Akbarov, S. D., Emiroglu, I., Tasci, F., The Lamb's problem for a half-space covered with the pre-stretched layer. International Journal of Mechanical Science, 47, 1326-1349, 2005.
- [11] Yang, J., An Introduction to the theory of Piezoelectricity, Springer, 2005.
- [12] Shul'ga, N. A. Bolkisev, A. M., Vibration of Piezoelectric Bodies. (in Russian), Naukova Dumka, Kyiv, 1999.
- [13] Parton, V. Z., Kudryavtsev, B.A., Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids. Gordon & Breach, NY, 1988.
- [14] Khoroshev, K.G., Electroelastic state of an infinite multiply connected piezoelectric plate with known electric potentials applied to its boundaries. International Applied Mechanics, 46 (6), 687-695., 2010.
- [15] Liou, J. Y., Sung, J. C., Electrostatic stress analysis of an anisotropic piezoelectric half-plane under surface electromechanical loading. International Journal of Solids and Structures 45, 3219–3237, 2008.

- [16] Bardzohas, D. I., Filshinsky, M. L., Filshinsky, L. A., *Mathematical Methods in Electro – Magneto – Elasticity*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [17] Kuang, Z.-B., Zhou, Z.-D., Zhou, K.-L., *Electroelastic analyses of a piezoelectric half-plane with finite surface electrodes*. *International Journal of Engineering Science*, 42, 1603-1619, 2004.
- [18] F. Jin, Z. Wang, T. Wang, *The Bleustain-Gulyayev (B-G) wave in piezoelectric layered half-space*. *International Journal of Engineering Science*, 39 1271-1285, 2001.
- [19] Akbarov, S. D., Ilhan, N., *Time-harmonic Lamb's problem for a system comprising a piezoelectric layer and piezoelectric half-plane*. *Journal of Sound and Vibration*, 332 5375-5392, 2013.
- [20] Ilhan, N., Koç, N., *Influence of polled direction on the stress distribution in piezoelectric materials*. *Structural Engineering and Mechanics*, 54/5, 955-971, 2015.
- [21] Akbarov, S. D., Ilhan, N., Koç, N., *Time-harmonic lamb problem for a system consisting of a prestressed piezoelectric covering layer and a prestressed half-plane*. *Mechanics of Composite Materials*, 51/4, 427-436, 2015