



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## KONİK TİPİ VİSKOELASTİK HELİSLERİN FARKLI YÜKLEMELER ALTINDAKİ DİNAMİK DAVRANIŞI

Merve Ermiş<sup>1</sup>, Nihal Eratlı<sup>2</sup>, Hakan Argeso<sup>3</sup>, Akif Kutlu<sup>4</sup> ve Mehmet H. Omurtag<sup>5</sup>

<sup>1,2,4,5</sup>İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul

<sup>3</sup>Atılım Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Ankara

### ABSTRACT

The objective of this study is to investigate the dynamic behavior of a linear viscoelastic conical type helical bar having a solid circular cross-section subjected to vertical distributed loading by using the mixed finite method based on Timoshenko beam theory. It is assumed that, the linear viscoelastic material exhibits the standard type of distortional behavior while having elastic Poisson's ratio. The finite element analysis is carried out in Laplace space, the material properties are implemented into the formulation through the use of the correspondence principle. The results are transformed back to the time domain numerically by using of the Modified Durbin's transformation algorithm. Two different cases of boundary conditions are considered in the sample problems: helix fixed from one end (cantilevered) and helix fixed from two ends. For each case, the dynamic responses of the helices are determined for step and impulsive types (having rectangular, sinusoidal, right triangular and triangular forms) of dynamic vertical distributed loadings.

### ÖZET

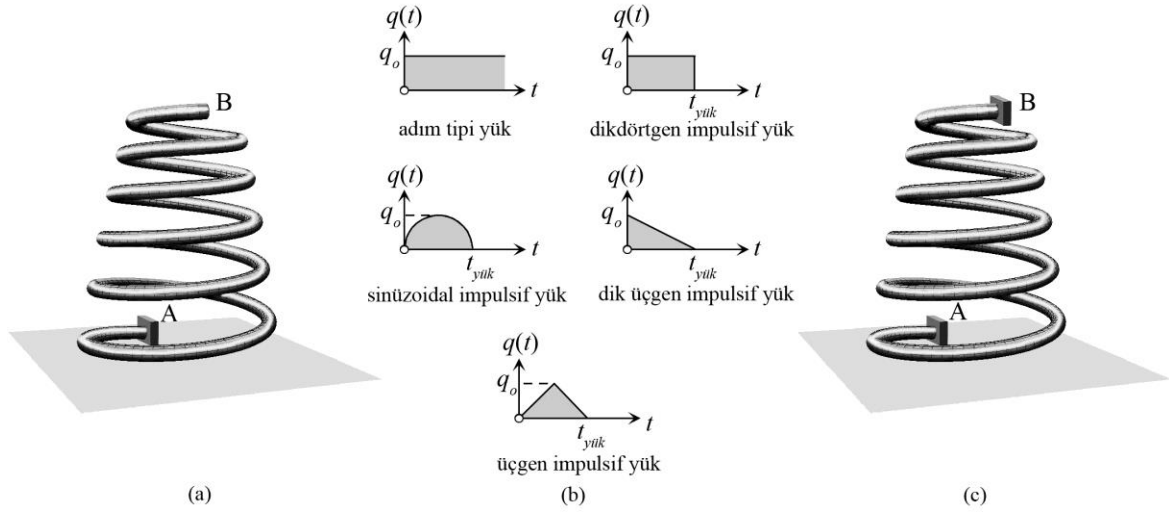
Bu çalışmanın amacı, Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak daire kesitli konik tipi doğrusal viskoelastik helislerin düzgün yayılı yük etkisinde dinamik davranışını araştırmaktır. Doğrusal viskoelastik malzemenin kayma modülü standart model ile tanımlanmış ve Poisson oranı elastik alınmıştır. Sonlu eleman çözümlemesi Laplace uzayında gerçekleştirileceği için, viskoelastik malzeme özellikleri karşılıklı olarak kullanılarak belirlenmiş ve Laplace uzayında elde edilen sonuçlar, geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Örnek problemlerde iki farklı sınır koşulu kullanılmıştır: bir uçtan tutulu diğer ucu serbest helis ve iki uç tutulu helis. Her iki durum için adım ve impulsif tiplerinde (dikdörtgen, sinüzoidal, dik üçgen ve üçgen formlarında olmak üzere) düşeyde etkiyen dinamik yayılı yüklemeler etkisindeki helislerin dinamik davranışı incelenmiştir.

### GİRİŞ

Birçok malzeme iç sürtünmeye bağlı olarak hem elastik hem de viskoz davranışı birlikte sergiler. Viskoelastik formülasyon bu iki davranışı bir arada ele alabilmesi sebebiyle, malzeme davranışının daha gerçekçi ifadesine olanak sağlayabilmektedir. Literatür incelendiğinde, doğru ve daire eksenli doğrusal viskoelastik çubuklar ile ilgili çok sayıda

çalışma varken [1-9], doğrusal viskoelastik helislere ait çalışmalar sayıca oldukça azdır [10-13].

Bu çalışmada, Timoshenko çubuk kuramı üstünden konik helislerin dinamik yükler altındaki viskoelastik davranışı, Laplace uzayında sonlu eleman çözümü üstünden incelenmiştir. Yöntemin güvenilirliği ve doğruluğu [12] de gösterildiği için bu çalışmada [12] ye ilave olarak eğrilikler için kesin helis geometrisi fonksiyon değerleri [13] sonlu eleman yazılımına yüklenmiş ve elde edilen formülasyon özgün problemlere uygulanmıştır. [13] de önerilen algoritma, helis geometrisini tanımlayan yay uzunluğu ve eğriliklerin işlemlere kesin fonksiyon değerleri ile katılmasıyla elde edilmiştir. Doğrusal viskoelastik malzeme davranışı standart model ile tanımlanmış ve Poisson oranı sabit alınmıştır. Sonlu eleman çözümlemesi Laplace uzayında gerçekleştirileceği için, malzeme özelliklerinin frekans uzayına aktarımında karşılıklı ilkesinden yararlanılmıştır. Laplace uzayında gerçekleştirilen çözümler zaman uzayına geliştirilmiş Durbin algoritması [14-16] ile taşınmıştır. Konik tipi helislerin (Şekil 1a ve 1c) dinamik davranışı düzgün yayılı adım tipi yük ile dikdörtgen, sinüzoidal, dik üçgen ve üçgen tipi impulsif yükler (Şekil 1b) üzerinden ayrıntılı olarak incelenmiş ve özgün problemler çözülerek literatüre katkı sağlanmıştır.



Şekil 1. Konik tipi helis ve dinamik yükler

### ALAN DENKLEMLERİ ve SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

**Helis Geometrisi:** Helis taban dairesi üzerinden ve  $x$  ekseninden itibaren ölçülen  $\varphi$  açısı parametre olarak seçildiğinde,  $R(\varphi)$  helisin eksen geometrisinin yarıçapını,  $\alpha$  yükselme açısını ve  $p(\varphi)$  helisin birim radyana gelen yükselme değerini göstermektedir. Helis geometrisinin kartezyen koordinatlardaki ifadesi,

$$x = R(\varphi) \cos \varphi, \quad y = R(\varphi) \sin \varphi, \quad z = p(\varphi) \varphi, \quad p(\varphi) = R(\varphi) \tan \alpha \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Konik tipi helis için  $R_{\min}$  ve  $R_{\max}$  sırasıyla helisin tavan ve taban merkez yarıçaplarını,  $n$  ise tur sayısını göstermek üzere, helisin keyfi bir noktasına ait eksen yarıçapı,

$$R(\varphi) = R_{\max} + (R_{\min} - R_{\max}) \frac{\varphi}{2n\pi}. \quad (2)$$

şeklinde verilmiştir.

**Alan denklemleri ve fonksiyonel:** Timoshenko çubuk kuramına dayalı alan denklemleri Laplace uzayına taşındıktan sonra aşağıdaki yapıda yazılır [12]:

$$\begin{aligned} -\bar{\mathbf{T}}_{,s} - \bar{\mathbf{q}} + \rho A z^2 \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{M}}_{,s} - \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}} - \bar{\mathbf{m}} + \rho \mathbf{I} z^2 \bar{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,s} + \mathbf{t} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}} - \bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{,s} - \bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

$z$  Laplace dönüşüm parametresi olmak üzere (3) ve (4) de yer alan, Laplace uzayında ve Frenet koordinat sisteminde tanımlanmış vektörel büyüklükler  $\bar{\mathbf{u}}$  ( $\bar{u}_t, \bar{u}_n, \bar{u}_b$ ) yer değiştirme,  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$  ( $\bar{\Omega}_t, \bar{\Omega}_n, \bar{\Omega}_b$ ) dönme,  $\bar{\mathbf{T}}$  ( $\bar{T}_t, \bar{T}_n, \bar{T}_b$ ) kuvvet ve  $\bar{\mathbf{M}}$  ( $\bar{M}_t, \bar{M}_n, \bar{M}_b$ ) moment,  $\mathbf{I}$  ( $I_t, I_n, I_b$ ) eylemsizlik momenti,  $\bar{\gamma}$  birim kayma,  $\bar{\kappa}$  birim dönme,  $\bar{\mathbf{C}}_\gamma$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_\kappa$  kompliyans matrisleri,  $\bar{\mathbf{q}}$  ve  $\bar{\mathbf{m}}$  yayılı yük ve momenttir. Ayrıca,  $\rho$  malzeme yoğunluğu ve  $A$  kesit alanıdır. (3) ve (4) kullanılarak denklemler operatör formda yazılır ve operatörün potansiyel olduğu ispatlandıktan sonra Laplace uzayındaki fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir [12].

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}(\bar{\mathbf{y}}) = & \left. \begin{aligned} -[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}_{,s}] + [\mathbf{t} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{T}}] - [\bar{\mathbf{M}}_{,s}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] - \frac{1}{2}[\bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}] - \frac{1}{2}[\bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}}] \\ + \frac{1}{2} \rho A z^2 [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}] + \frac{1}{2} \rho z^2 [\mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] - [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}] - [\bar{\mathbf{m}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] \\ + [(\bar{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}), \bar{\mathbf{u}}]_\sigma + [(\bar{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}), \bar{\boldsymbol{\Omega}}]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}]_\varepsilon + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{M}}]_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

**Karışık sonlu eleman algoritması:** İki düğüm noktalı eğrisel çubuk eleman kullanılmış,  $\Delta\varphi = (\varphi_j - \varphi_i)$  eğrisel sonlu elemana ait düğüm noktaları arasındaki merkez açıyı göstermek üzere, doğrusal şekil fonksiyonları  $\phi_i = (\varphi_j - \varphi) / \Delta\varphi$  ve  $\phi_j = (\varphi - \varphi_i) / \Delta\varphi$  şeklinde tanımlanmıştır.  $2 \times 12$  serbestlik derecesine sahip eğrisel çubuk elemanın her bir düğüm noktasında Frenet koordinat sisteminde verilen değişkenlere ait vektörler  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}$  dir. Bu çalışma kapsamında [13] de önerilen ve doğrulanan, helis geometrisini tarifleyen parametrelerin (yay uzunluğu  $c(\varphi)$ , helis eğriliği  $\chi(\varphi)$  ve helisin tabii burulması olan  $\tau(\varphi)$ ) kesin fonksiyon değerleri ile işlemlere doğrudan katıldığı yeni bir karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Önerilen yeni formülasyon [13], bu çalışmada özgün viskoelastik problemlere uygulanmıştır.

**Viskoelastik malzeme modeli:** Viskoelastik malzemedeki zamana bağlı davranış çeşitli mekanik modeller ile ifade edilmektedir. Bu mekanik modeller için toplam gerilme elastik gerilme ve viskoelastik gerilme bileşenlerinden oluşmaktadır. Elastik davranış yaylar ile temsil edilirken, viskoelastik davranış ise sönümleyiciler ile temsil edilmektedir. Karşılıklı ilkesi ile zaman uzayında tanımlı doğrusal viskoelastik problem, frekans uzayında tanımlı sembolik bir elastik probleme dönüşmektedir [17]. Kullanılan viskoelastik malzeme modelinde, standart model kayma modülünün sanal karşılığı,

$$\bar{G} = G \left[ \frac{1 + \beta^G \tau_r^G z}{1 + \tau_r^G z} \right] ; \beta^G = G_g / G > 1 \quad (6)$$

biçimindedir [18,19]. Burada  $\tau_r^G$  gecikme zamanını,  $G$  denge ve  $G_g$  ise anlık konumu göstermektedir.

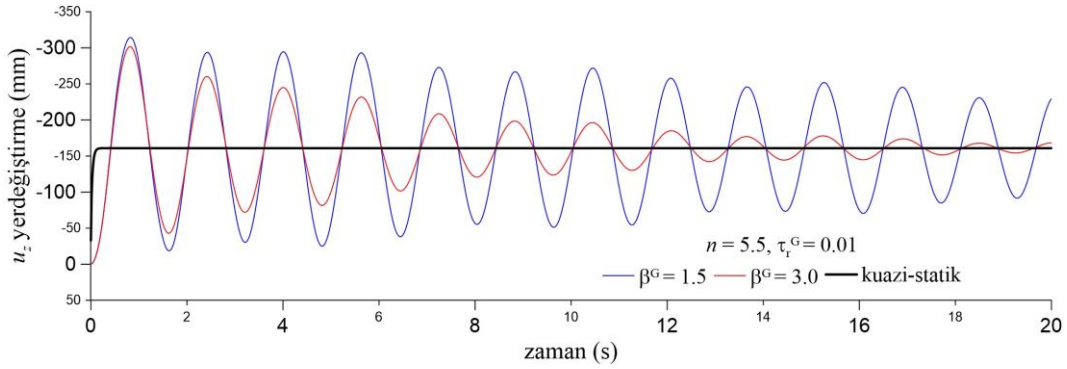
**Geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması:** Bu çalışmada, sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerinden biri olan geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması [14-16] kullanılarak Laplace uzayındaki sonuçlar zaman uzayına taşınmıştır.

## SAYISAL SONUÇLAR

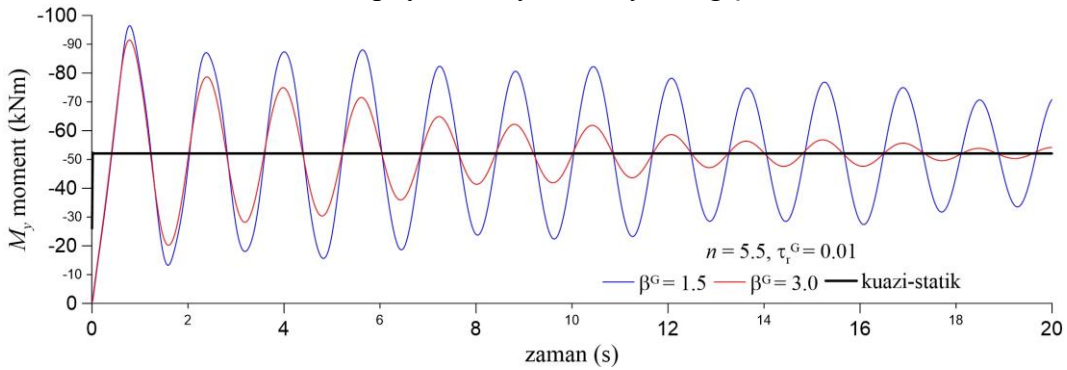
Bu çalışmada, bir ucundan tutulu diğer ucu serbest (Şekil 1a) ve iki ucundan tutulu (Şekil 1c) iki farklı sınır koşuluna sahip, düşeyde etkiyen düzgün yayılı yükün etkisindeki doğrusal viskoelastik konik tipi helisel çubuk problemi ele alınmıştır. Çözümlerde kullanılan helis geometrisi ve malzemeye ait bilgiler sırasıyla: Tur sayısı  $n = 5.5$ , düşey helis yüksekliği  $H = 5$  m, helisin en küçük yarıçapının, en büyük yarıçapa oranı  $R_{\min} / R_{\max} = 0.5$  ( $R_{\max} = 2$  m). Dolu daire kesitin çapı  $D = 20$  cm, kayma modülü  $G = 80$  GPa, Poisson oranı  $\nu = 0.3$  malzeme yoğunluğu  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Viskoelastik davranışı tanımlayan parametreler sırasıyla,  $\tau_r^G = 0.01$  s,  $\beta^G = 1.5; 3.0$  dır.  $\tau_r^G$  ve  $\beta^G$  değerleri (6) da kullanılarak ( $\bar{G}$ ) kayma modülünün sanal karşılığı hesaplanmıştır. Yüklere ait (Şekil 1b)  $q = q_z(t)$  yayılı yükünün şiddeti  $q_o = 500$  N/m ve yükleme süresi  $t_{yük} = 4$  s dir. Helis probleminin çözümü Laplace uzayında gerçekleştirildiği için, sonuçların zaman uzayına taşınmasında kullanılan geliştirilmiş Durbin algoritması için gerekli parametreler  $aT = 6$  ve  $N = 2^{11}$  olarak alınmıştır. Bir ucundan tutulu diğer ucu serbest helisel çubuğun serbest ucundaki düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ile çubuğun tutulu ucundaki moment ( $M_y$ ) büyüklüğü ve iki ucundan rijit tutulu helisel çubuğun ise orta noktasındaki düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ile çubuğun tutulu ucundaki (Şekil 1.c, A noktası) moment ( $M_y$ ) zaman içindeki davranışları  $0 \leq t \leq 20$  s aralığında incelenmiştir. 100 eleman kullanılarak elde edilen, farklı yükleme ve sınır koşulları altında  $\beta^G$  parametresinin dinamik davranış üzerindeki etkilerinin incelendiği sonlu eleman sonuçları Şekil 2-3 deki grafiklerle verilmiştir. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

- $\beta^G = 1.5; 3.0$  değerleri için bir ucu tutulu diğer ucu serbest konik tipi helisin dinamik davranışı farklı dinamik yükler altında incelenmiş, serbest uçtaki düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ile çubuğun tutulu ucundaki moment ( $M_y$ ) büyüklüklerinin zamana bağlı davranışları grafik olarak Şekil 2 de verilmiştir.  $\beta^G$  büyüdükçe hareketin daha hızlı sönümlendiği, titreşim hareketinin genliğinin azaldığı ve kuazi-statik duruma yaklaştığı gözlenmiştir.
- $\beta^G = 1.5; 3.0$  değerleri için iki ucundan tutulu konik tipi helisin dinamik davranışı farklı dinamik yükler altında incelenmiş, konik helisin orta noktasındaki düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ile çubuğun tutulu ucundaki (A noktası) moment ( $M_y$ ) büyüklüklerinin zamana bağlı davranışları grafik olarak Şekil 3 de verilmiştir.  $\beta^G$  büyüdükçe, konsol konik helise benzer şekilde hareketin hızla sönümlendiği, titreşim hareketinin genliğinin azaldığı ve kuazi-statik duruma yaklaştığı gözlenmiştir.
- İki ucu tutulu sınır koşulu kullanıldığında, dinamik davranışın daha çabuk sönümlendiği gözlenmiştir.
- Düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ve momente ( $M_y$ ) ait genlikler en büyük değerlerini adım tipi yüklemeye alırken, en küçük değerlerini üçgen impulsif yüklemeye almaktadır. Bu değerlendirme her iki sınır koşulu için de aynıdır.
- Farklı dinamik yüklerin sonuçlar üzerindeki etkisini ortaya koyabilmek için düşey yer değiştirme ( $u_z$ ) ve momente ( $M_y$ ) ait grafiklerdeki ilk ekstrem değerler esas alınmış ve farklar adım tipi yüklemeye ait değerlere göre normalize edilerek yüzde olarak verilmiştir. Bu değerlendirme,  $\beta^G = 1.5$  parametresi kullanılarak her iki tip sınır koşulu için yapılmıştır (Şekil 2-3).

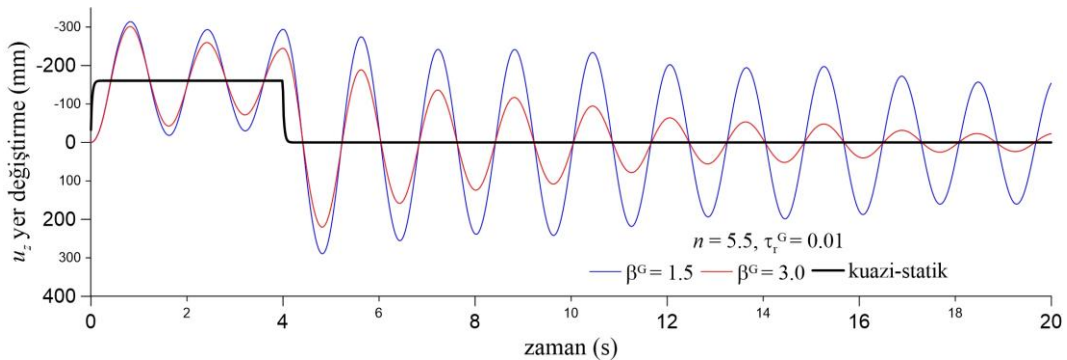
1. Bir ucu serbest diğer ucu tutulu konik helisin düşey yer değiştirmesine ( $u_z$ ) ait azalım yüzdeleri dikdörtgen, dik üçgen, sinüzoidal ve üçgen impulsif yükler için sırasıyla %0.11, %10.02, %44.71, %46.12 şeklindedir.
2. Bir ucu serbest diğer ucu tutulu konik helisin momentine ( $M_y$ ) ait azalım yüzdeleri dikdörtgen, dik üçgen, sinüzoidal ve üçgen impulsif yükler için sırasıyla %0.16, %9.99, %43.23, %45.3 şeklindedir.
3. İki ucu tutulu konik helisin düşey yer değiştirmesine ( $u_z$ ) ait azalım yüzdeleri dikdörtgen, dik üçgen, sinüzoidal ve üçgen impulsif yükler için sırasıyla %0.13, %4.50, %43.49, %57.80 şeklindedir.
4. İki ucu tutulu konik helisin momentine ( $M_y$ ) ait azalım yüzdeleri dikdörtgen, dik üçgen, sinüzoidal ve üçgen impulsif yükler için sırasıyla %0.03, %4.74, %42.17, %42.96 şeklindedir.



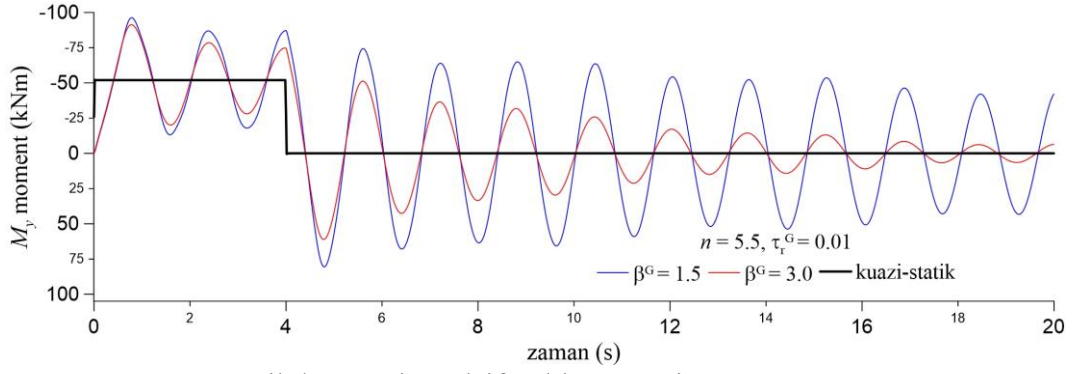
(a) Adım tipi yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi



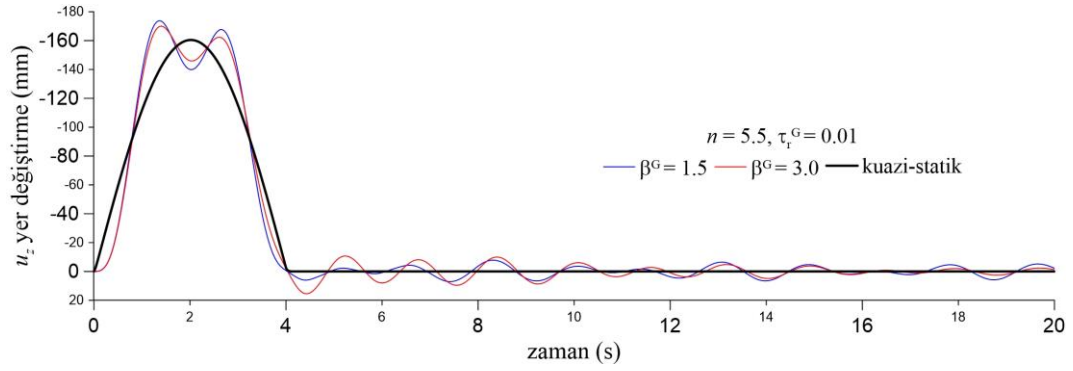
(b) Adım tipi yüklemeye ait  $M_y$  momenti



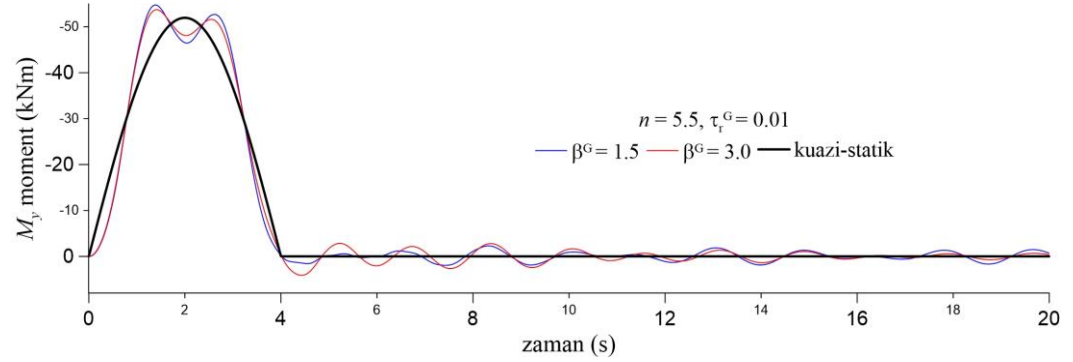
(c) Dikdörtgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi



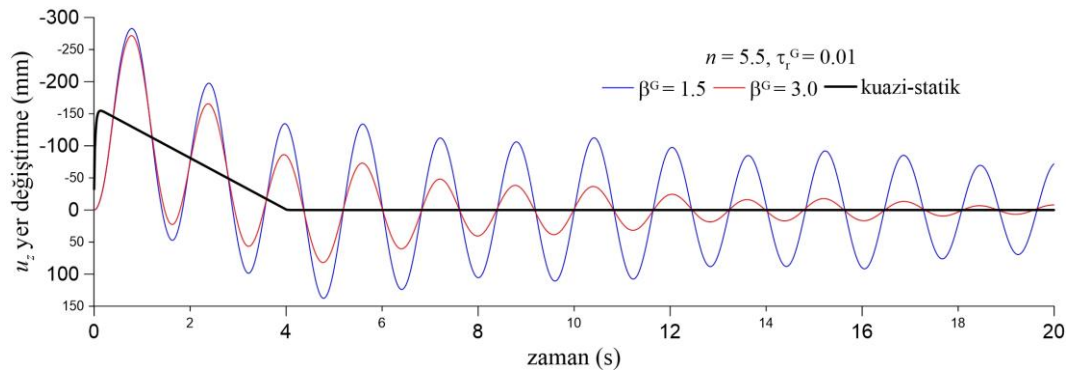
(d) Dikdörtgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti



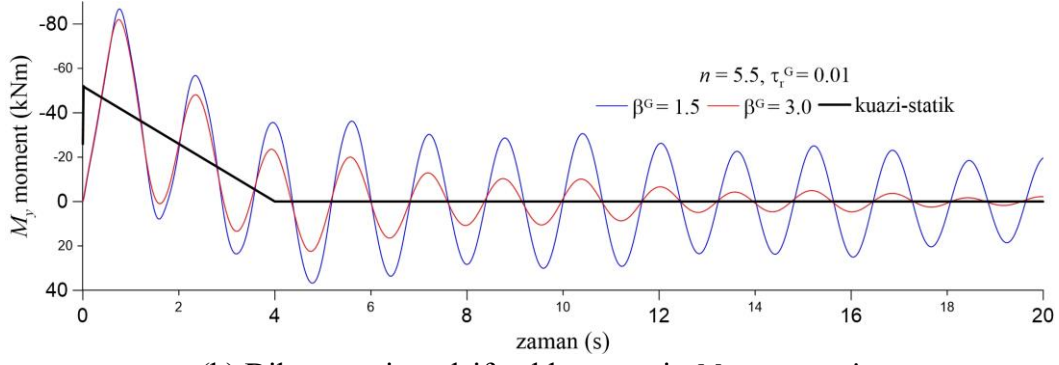
(e) Sinüzoidal impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi



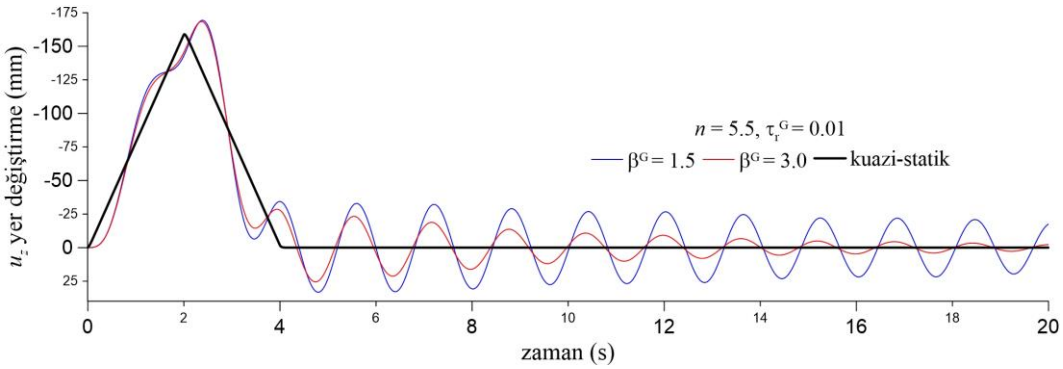
(f) Sinüzoidal impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti



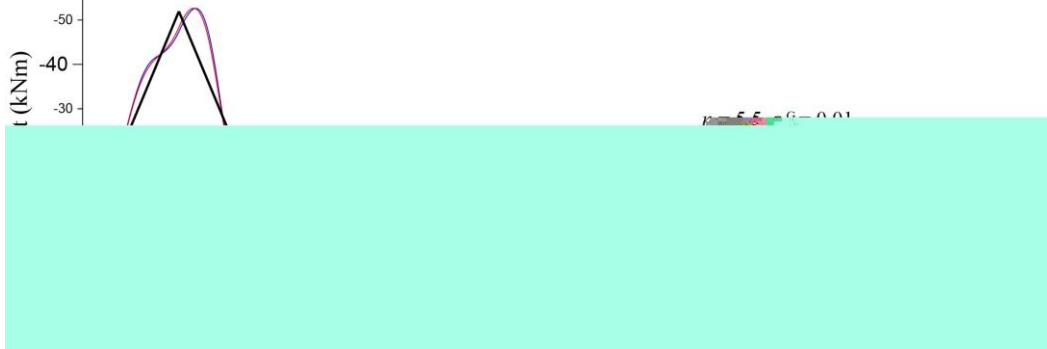
(g) Dik üçgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi



(h) Dik üçgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti

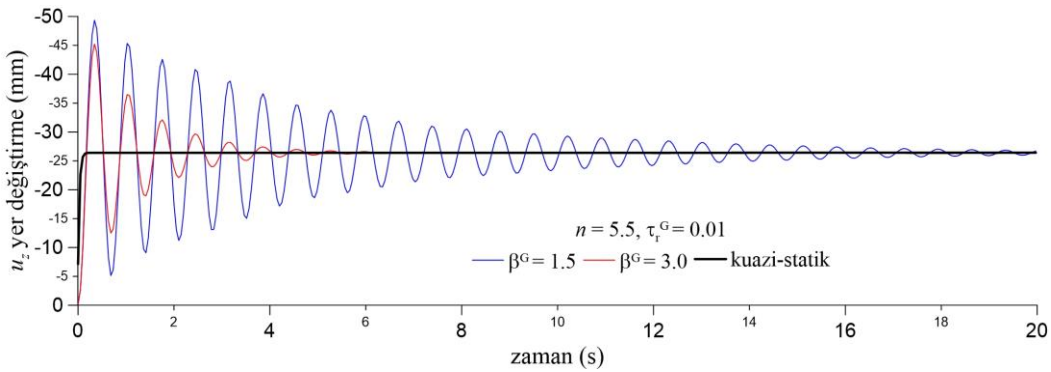


(i) Üçgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi

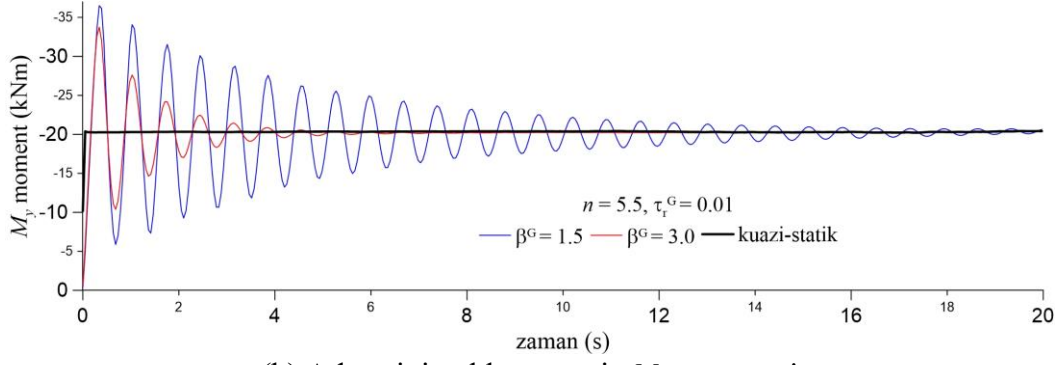


(j) Üçgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti

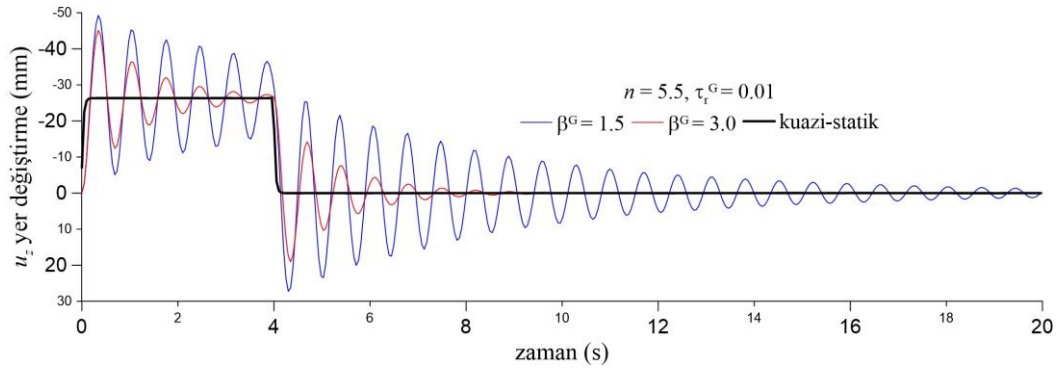
Şekil 2. Bir uçundan tutulu diğer ucu serbest konik tipi helisin farklı yüklemeler altındaki dinamik davranışı



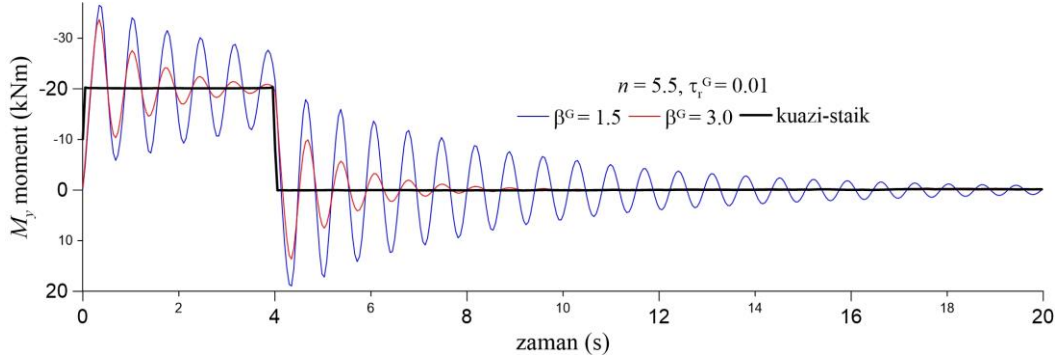
(a) Adım tipi yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi



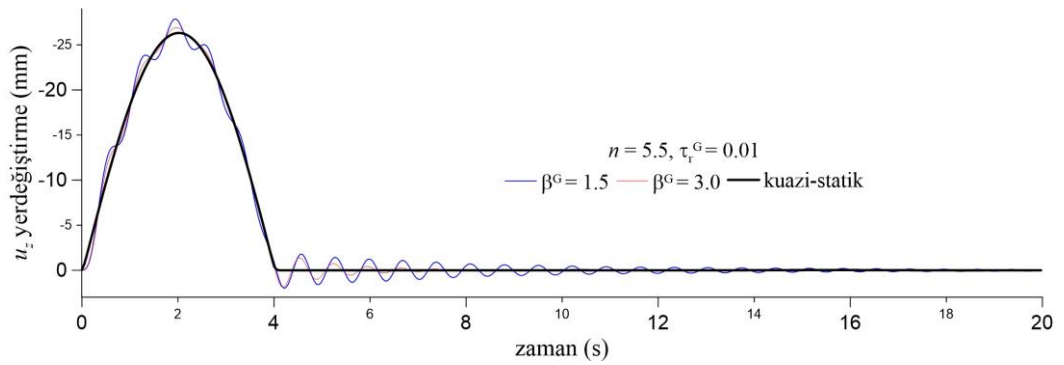
(b) Adım tipi yüklemeye ait  $M_y$  momenti



(c) Dikdörtgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi

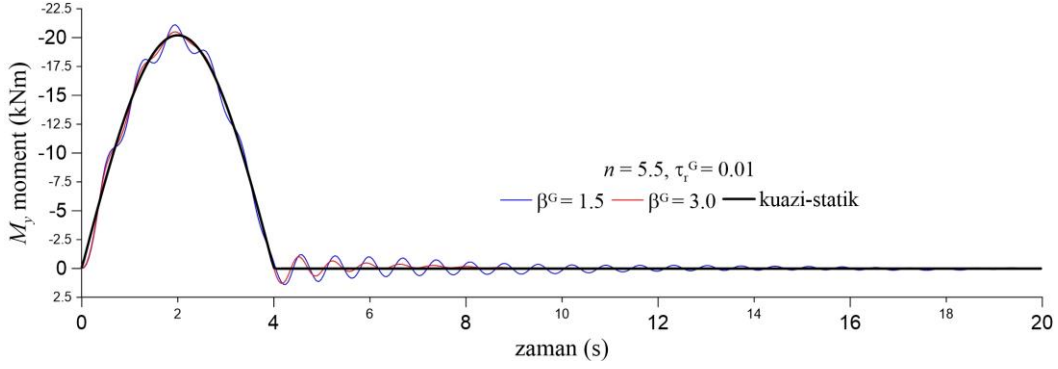


(d) Dikdörtgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti

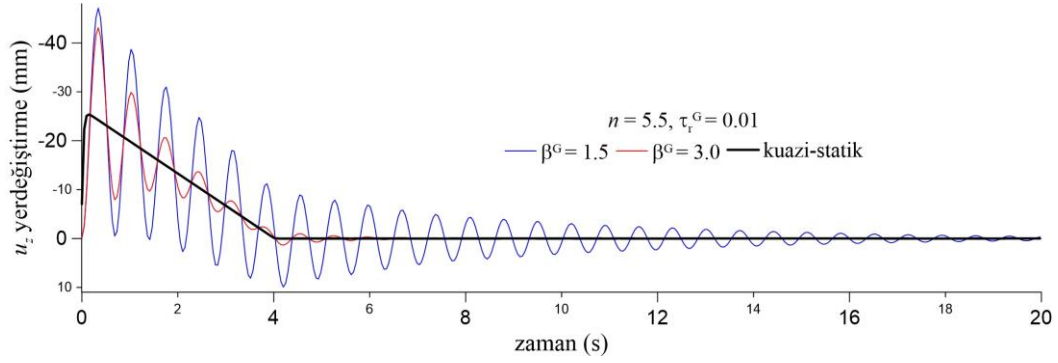


(e) Sinüzoidal impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değiştirmesi

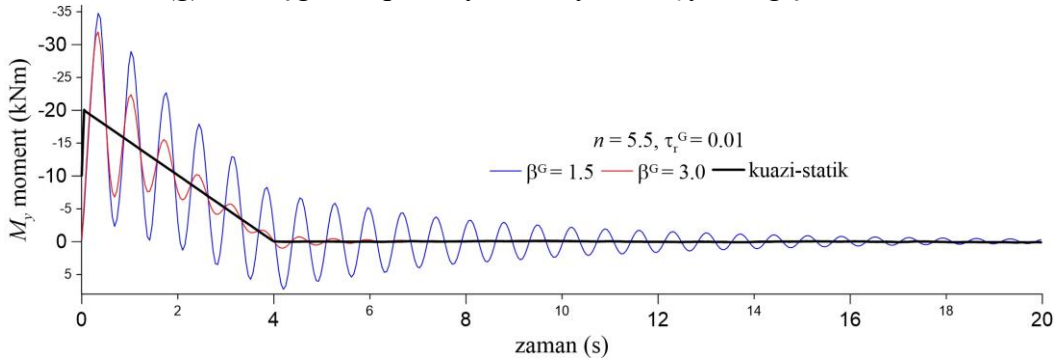




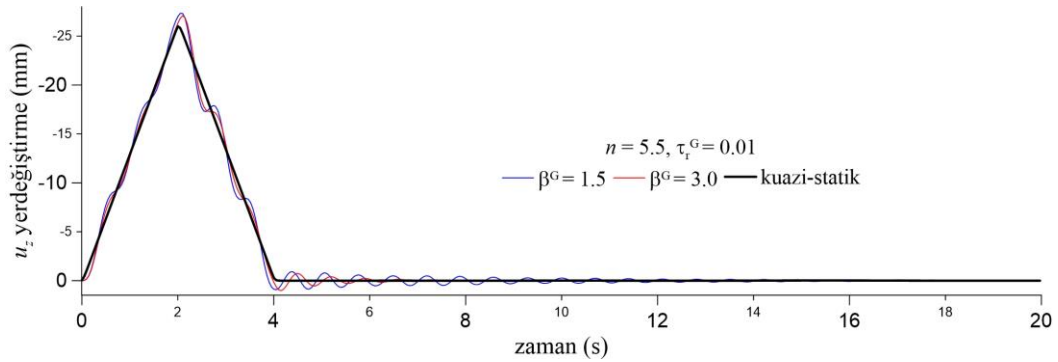
(f) Sinüzoidal impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti



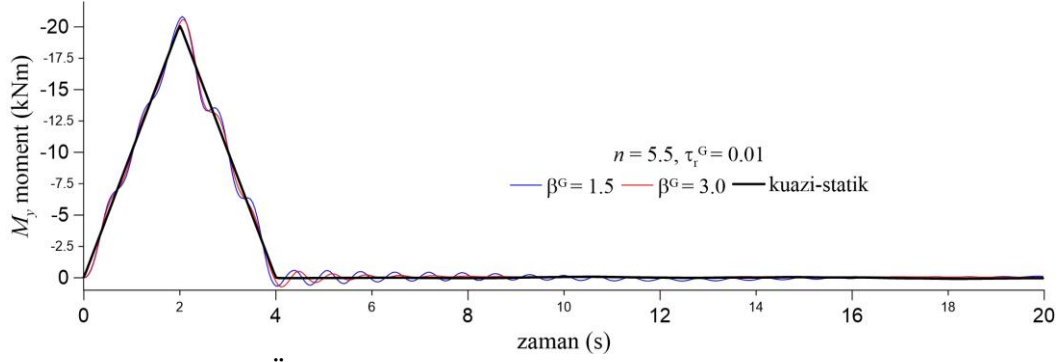
(g) Dik üçgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değıştirmesi



(h) Dik üçgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti



(i) Üçgen impulsif yüklemeye ait  $u_z$  yer değıştirmesi

(j) Üçgen impulsif yüklemeye ait  $M_y$  momenti

Şekil 3. İki ucundan rijit tutturulmuş konik tipi helisin farklı yüklemeler altındaki dinamik davranışı

### SONUÇLAR

Dinamik yüklerin ve sınır koşullarının viskoelastik konik tipi helisin dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Viskoelastik davranışı tanımlamada standart model kullanılmış, Poisson oranı sabit alınmış ve karşigelim ilkesi kullanılarak çözüm algoritmasına eklenmiştir. Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak Laplace uzayında problem çözülmüş ve sonuçlar geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Elde edilen sonuçlar detaylı olarak incelenmiş ve irdelenmiştir.

**Teşekkür-** Yazarlar bu araştırmayı Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a (Proje No:111M308) ve İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Birimin'e (Proje No:38078) teşekkür ederler.

### KAYNAKLAR

- [1] Y. Yamada, H. Takabatake, T. Sato, Effect of time-dependent material properties on dynamic response, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 8 (1974), 403–414. doi: 10.1002/nme.1620080216
- [2] T.M. Chen, The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1995), 509–522. doi: 10.1002/nme.1620380310
- [3] C.M. Wang, T.Q. Yang, K.Y. Lam, Viscoelastic Timoshenko beam solutions from Euler-Bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*. 123 (1997), 746–748. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:7(746)
- [4] M. Enelund, L. Mähler, K. Runesson, B.L. Josefson, Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws, *International Journal of Solids and Structures*. 36 (1999), 2417–2442. doi: 10.1016/S0020-7683(98)00111-5
- [5] A.Y. Aköz, F. Kadioğlu, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 44 (1999), 1909 - 1932. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990430)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P
- [6] F. Kadioğlu, A.Y.Aköz, The mixed finite element for quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *Structural Engineering and Mechanics*. 15 (2003), 735–752. doi: 10.12989/sem.2003.15.6.735
- [7] T. Kocatürk, M. Şimşek, Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load, *Computers and Structures*. 84 (2006), 2113–2127. doi: 10.1016/j.compstruc.2006.08.062

- [8] T. Kocatürk, M. Şimşek, Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force, *Journal of Sound and Vibration*. 291 (2006), 302–322. doi: 10.1016/j.jsv.2005.06.024
- [9] G.S. Payette, J.N. Reddy, Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26 (2010), 1736–1755. doi: 10.1002/cnm.1262
- [10] B. Temel, Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads, *International Journal of Solids and Structures*. 41 (2004), 1605–1624. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.054
- [11] B. Temel, F.F. Çalım, N. Tütüncü, Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods, *Journal of Sound and Vibration*. 271 (2004), 921–935. doi: 10.1016/s0022-460x(03)00760-0
- [12] N. Eratlı, H. Argeso, F.F. Çalım, B. Temel, M.H. Omurtag, Dynamic analysis of linear viscoelastic cylindrical and conical helicoidal rods using the mixed FEM, *Journal of Sound and Vibration*. 333 (2014), 3671–3690. doi: 10.1016/j.jsv.2014.03.017
- [13] M. Ermiş, *The Dynamic Analysis of Non- Cylindrical Viscoelastic Helical Bars Using Mixed Finite Element*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2015.
- [14] H. Dubner, J. Abate, Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform, *Journal of the ACM*. 15 (1968), 115–123. doi: 10.1145/321439.321446
- [15] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: An efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Computer Journal*. 17 (1974), 371–376. doi: 10.1093/comjnl/17.4.371
- [16] G. Narayanan, *Numerical Operational Methods in Structural Dynamics*, Doktora Tezi, University of Minnesota, 1980.
- [17] I.R. Shames, F.A. Cozarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, CRC Press Inc., 1997.
- [18] Y. Mengi, H. Argeso, A unified approach for the formulation of interaction problems by the boundary element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 66 (2006), 816-842. doi: 10.1002/nme.1585
- [19] B. Baranoglu, Y. Mengi, The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2006), 379-392. doi: 10.1016/j.cma.2006.07.003