



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

DIŞ YÜZEY SICAKLIĞI ZAMANLA DEĞİŞEN SİLİNDİRİN ELASTİK- PLASTİK ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Ahmet N. Eraslan¹, Tunç Apatay² ve Ekin Varlı³

^{1,3}Mühendislik Bilimleri-O.D.T.Ü, Ankara

²Makina Mühendisliği Bölümü-Gazi Üniversitesi, Ankara

ABSTRACT

The subject of this study is to obtain analytical solutions to elastic and partially plastic deformation of a solid cylinder subjected to periodic surface temperature. A state of generalized plane strain is presumed. Tresca's yield criteria and the corresponding flow rules are used for a linearly hardening material in the treatment of plastics. By making use of Duhamel's Theorem, the unsteady temperature distribution in the cylinder is derived. Elastic solutions indicate that the maximum difference between principal stresses occur at the surface of the cylinder. Hence, plasticization always commences at the surface. At higher thermal loads two adjacent plastic regions propagate into the cylinder at sharp temperature gradients and stop when the gradients cease to increase.

ÖZET

Bu çalışmanın konusu yüzey sıcaklığı periyodik olarak değişen bir silindirin elastik ve kısmen plastik çözümlerini analitik olarak elde etmektir. Genelleştirilmiş düzlem birim şekil değiştirme durumu varsayılmıştır. Plastik bölgelerin çözümlenmesi için Tresca akma kriterleri ve karşılık gelen akma kuralları kullanılmıştır. Silindir içerisindeki sıcaklık dağılımı Duhamel Teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Elastik çözümler göstermiştir ki normal gerilmeler arasındaki maksimum fark yüzeyde oluşmaktadır. Bu durumda silindirin yüzeyden plastikleşmeye başlayacağı açıktır. Artan termal yüklerde birbirine bitişik iki plastik bölge sıcaklık gradyanlarının artmasıyla silindir içerisine doğru yayılmakta ve bu yayılma gradyan artışının durmasıyla sonlanmaktadır.

GİRİŞ

Silindirler mühendislik uygulamalarında oldukça fazla yer tutan makina elemanları geometrilerindedir ve genellikle farklı termal, mekanik ve her ikisinin birlikte olduğu yükler altında çalışırlar. Bu yükler metallerin ısı işlemleri, klima sistemleri, uzay araçları, otomobil parçaları, nükleer ve kimyasal reaktörler, enerji ve kimya üzerine olan bazı uygulamalarda zamanla periyodik olarak değişebilir [1,2]. Özışık [1] periyodik sınır şartları altındaki içi dolu ve içi boş silindirlerde sıcaklık dağılımlarını incelemiştir. VDI [3] konferansında, harmonik şekilde salınan ortam sıcaklığında çalışan içi dolu silindirde sıcaklık dağılımı incelenmiştir. Atefi ve arkadaşları [2] zamanla periyodik olarak değişen sınır şartları altındaki içi boş silindirlerde iki boyutlu sıcaklık dağılımı problemini Fourier serileri metoduyla çözmüşlerdir. Radu ve arkadaşları [4] ise zamanla sinüzoidal olarak değişen ısı yük etkisindeki içi boş silindirlerin termoelastik davranışını analitik olarak elde etmişlerdir.

Bu çalışmada dış yüzey sıcaklığı zamana bağlı bir fonksiyonla sinüzoidal olarak değişen içi dolu silindir çubukların termoelastik ve kısmen plastik davranışları analitik olarak elde edilmiştir. Akma kriteri olarak Tresca [4] akma kriteri esas alınmış, malzeme ve sıcaklık parametrelerinin plastik davranış üzerindeki etkileri incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı ise Duhamel teoremi yardımıyla elde edilmiştir. Silindir yüzeyinde akma başlangıcından sonra zamanla iki farklı formda plastik bölge oluştuğu gözlenmiş ve bu plastik bölgelerin zamanla silindir içerisinde nasıl genişledikleri ayrıca lineer pekleşme özelliğine sahip malzeme için pekleşme parametresinin plastik bölgelerin ilerleyişine etkileri incelenmiştir.

SICAKLIK DAĞILIMI

b yarıçaplı silindir başlangıçta sıfır sıcaklığa sahip olup dış yüzey sıcaklığı zamanla $F(\tau) = A \sin \tau$ şeklinde boyutsuz formdaki periyodik fonksiyonla değişmektedir. Burada τ , $\alpha_T t / b^2$ şeklinde tanımlanmış normalize edilmiş zaman, A fonksiyonun genliğini belirleyen bir sabit, α_T ise malzemenin ısı yayılma katsayısıdır. Bu şekilde ısı yük etkisindeki silindirin radyal doğrultudaki ısı transferi problemi boyutsuz formda sınır ve başlangıç şartlarıyla birlikte

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2}; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{T}(0, \tau) &= \text{sonlu}, \\ \bar{T}(1, \tau) &= F(\tau), \\ \bar{T}(\bar{r}, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde [1].

Burada T_0 referans sıcaklığı göstermek üzere $\bar{T} = T / T_0$ boyutsuz sıcaklığı, $\bar{r} = r / b$ ise boyutsuz radyal koordinatı ifade etmektedir. Bu problem zamanla değişen sınır şartı olan $F(\tau)$ teriminin homojen olmamasından dolayı değişkenlerin ayrılması yoluyla çözülemez. Bu nedenle problemin çözümünde Duhamel teoremi kullanılmıştır. Duhamel teoremine göre problemin çözümü

$$\bar{T}(\bar{r}, \tau) = \int_0^\tau F(\beta) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\bar{r}, \tau - \beta) d\beta. \quad (3)$$

şeklinde [1]. Burada $\Phi(\bar{r}, \tau)$, zamana bağlı ve zamandan bağımsız iki fonksiyonun toplamından oluşmakta olup aşağıda verilen ikincil problemin çözümünü ifade etmektedir;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{r}^2}; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$\Phi(0, \tau) = \text{sonlu},$$

$$\begin{aligned}\Phi(1, \tau) &= 1, \\ \Phi(\bar{r}, 0) &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

(4) ile verilen ikincil problemin çözümü için $\Phi(\bar{r}, \tau)$ zamana bağlı ve zamandan bağımsız iki fonksiyonun toplamı olarak

$$\Phi(\bar{r}, \tau) = Y(\bar{r}, \tau) + Z(\bar{r}) \quad (6)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin (4) ile verilen diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial Y}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dZ}{d\bar{r}} + \frac{d^2 Z}{d\bar{r}^2}; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (7)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem süperpozisyon yöntemiyle zamana bağlı ve zamandan bağımsız iki parçaya ayrılabilir. Elde edilen iki ayrı denklemin çözülmesiyle

$$Y(\bar{r}, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}, \quad (8)$$

ve

$$Z(\bar{r}) = C_1 \ln \bar{r} + C_2 \quad (9)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç ve sınır şartlarının bu denklemlere uygulanmasıyla integral sabitlerinin bulunmasının ardından elde edilen $\Phi(\bar{r}, \tau)$ ifadesinin (3) ile verilen denklemde yerine yazılmasıyla sıcaklık dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$T(\bar{r}, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \int_0^{\tau} e^{\lambda_n^2 \beta} F(\beta) d\beta. \quad (10)$$

Kısmi integrasyon işlemi ile (10) denklemini

$$T(\bar{r}, \tau) = F(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \left[F(0) + \int_0^{\tau} e^{\lambda_n^2 \beta} F(\beta) d\beta \right] \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç şartı, $F(0) = 0$ yardımıyla sıcaklık dağılımı

$$T(\bar{r}, \tau) = F(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \int_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\beta)} \frac{dF(\beta)}{d\beta} d\beta \quad (12)$$

formunda elde edilir. Burada J_0 ve J_1 , sırasıyla birinci türden sıfırıncı dereceden ve birinci dereceden Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. λ_n ($n=1,2,\dots$) ise $J_0(\lambda) = 0$ ifadesinin pozitif kökleridir.

ELASTİK ÇÖZÜM

Silindirin radyal doğrultusu boyunca sıcaklık dağılımının belirlenmesinden sonra elastik bölgedeki ısıl gerilme ve yer değiştirme dağılımları, silindirik koordinatlardaki bünye denklemi ve genelleştirilmiş Hooke bağıntıları yardımıyla elde edilen diferansiyel denklemin çözümüyle belirlenmiştir [6,7]. Bu diferansiyel denklem;

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} - \bar{u} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{\alpha} \bar{r}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \quad (13)$$

şeklinde Cauchy-Euler tipindedir ve çözümü ise aşağıdaki şekildedir:

$$\bar{u}(\bar{r}) = C_1 \bar{r} + \frac{C_2}{\bar{r}} + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{r}} \right) \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta. \quad (14)$$

Burada $\bar{u} = Eu/b\sigma_Y$ boyutsuz radyal yer değiştirme, σ_Y malzemenin aksenal çekme durumundaki dayanımı, ν poisson oranı, $\bar{\alpha}$ boyutsuz ısıl genleşme katsayısıdır. Yer değiştirmenin silindir merkezinde ($\bar{r} = 0$ 'da) tanımlı olabilmesi için integral sabitlerinden $C_2 = 0$ olmalıdır. (14) ile verilen yer değiştirme ifadesi ile temel elastisite bağıntıları kullanılarak türetilen gerilme - yer değiştirme ifadeleri yardımıyla gerilme bileşenleri ve yer değiştirme aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\bar{u} = C_1 \bar{r} + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{r}} \right) \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta, \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\nu \varepsilon_0 + C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\nu} \frac{1}{\bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta, \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\nu \varepsilon_0 + C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\bar{\alpha}}{1-\nu} \frac{1}{\bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta - \frac{\bar{\alpha} \bar{T}(\bar{r}, \tau)}{1-\nu}, \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{(1-\nu)\varepsilon_0 + 2\nu C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\bar{\alpha} \bar{T}(\bar{r}, \tau)}{1-\nu}. \quad (18)$$

Burada $\bar{\sigma}_j = \sigma_j / \sigma_Y$ boyutsuz gerilme bileşenlerini ifade etmektedir. ε_0 birim şekil değiştirmesi ile C_1 integral sabitleri ise, silindir yüzeyinde $\bar{\sigma}_r(1) = 0$ olması ve genelleştirilmiş düzlem birim şekil değiştirme durumunda uçları serbest silindir için aksenal doğrultudaki net kuvvetin sıfır olması şartları yardımıyla;

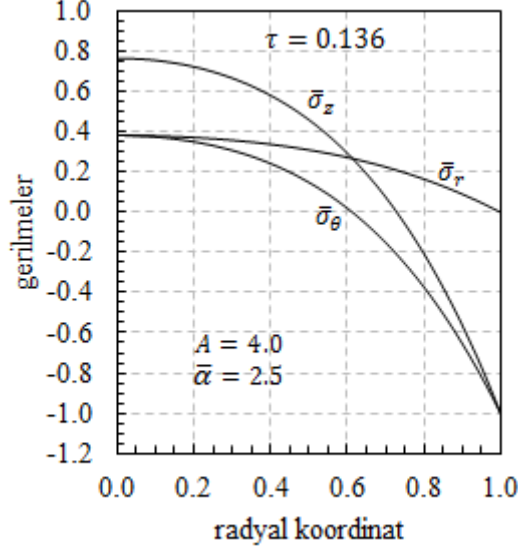
$$C_1 = \frac{\bar{\alpha}(1-3\nu)}{1-\nu} \int_0^1 \bar{r} \bar{T}(\bar{r}, \tau) d\bar{r}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_0 = 2\bar{\alpha} \int_0^1 \bar{r} \bar{T}(\bar{r}, \tau) d\bar{r} \quad (20)$$

şeklinde elde edilir.

Elastik Sonuçlar

Şekil 1.'de $A = 4.0$, $\bar{\alpha} = 2.5$ alınarak akma başlangıcında gerilme dağılımı verilmiştir. Bu anda asal gerilmeler arasındaki fark silindirin yüzeyinde 1'e ulaşmaktadır, dolayısıyla akma silindirin yüzeyinde başlamaktadır.



Şekil 1. Akma başlangıcında elastik gerilme dağılımı, $\nu = 0.3$

PLASTİK ÇÖZÜM

Şekil 1. incelendiğinde zamanın ilerlemesiyle silindirin yüzeyinden içeriye doğru iki farklı formda plastik bölgenin oluşacağı görülmektedir. Tresca akma kriterine göre bu bölgelerden birinde gerilme bileşenleri $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_\theta$ şeklinde değişirken, diğer bölgede $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z$ şeklinde değişmektedir. Plastik bölgelerde toplam birim şekil değiştirme, elastik bileşen $\bar{\varepsilon}_i^e$, plastik bileşen $\bar{\varepsilon}_i^p$ ve ısıl bileşen $\bar{\alpha}\bar{T}$ 'nin toplamı şeklindedir:

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_i^e + \bar{\varepsilon}_i^p + \bar{\alpha}\bar{T}, \quad i = r, z, \theta. \quad (21)$$

Ayrıca lineer gerilme pekleşme davranışı

$$\bar{\sigma}_y = 1 + H\bar{\varepsilon}_{EQ} \quad (22)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\bar{\varepsilon}_{EQ}$, eşdeğer birim şekil değiştirme ve H normalize edilmiş pekleşme parametresidir. Oluşan iki plastik bölgeye ait denklemler aşağıda verilmiştir:

Plastik Bölge 1

Bu bölgede gerilmeler arasında $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_\theta$ ilişkisi bulunmaktadır. Tresca kriteri ve ilgili akış kuralına göre $\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\varepsilon}_r^p = -\bar{\varepsilon}_\theta^p$, $\bar{\varepsilon}_z^p = 0$ ve $\bar{\varepsilon}_{EQ} = \bar{\varepsilon}_r^p$ ifadeleri geçerlidir. Toplam birim şekil değiştirme ve yer değiştirme – birim şekil değiştirme ifadeleri ile elde edilen gerilme bileşenlerinin bünye denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} - \bar{u} = -\frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{1+H(1-\nu^2)} \bar{r} + \frac{\bar{\alpha}(1+\nu)[2+H(1+\nu)]}{1+H(1-\nu^2)} \bar{r}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \quad (23)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\bar{u}(\bar{r}) = C_3 \bar{r} + \frac{C_4}{\bar{r}} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1+H(1-\nu^2)} \bar{r} \ln \bar{r} + \frac{\bar{\alpha}(1+\nu)[2+H(1+\nu)]}{1+H(1-\nu^2)} \frac{1}{\bar{r}} \left\{ (\bar{r}_e^2 - \bar{r}^2) \bar{T}(\bar{r}_e, \tau) + 2 \int_{\bar{r}_e}^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta \right\} \quad (24)$$

Plastik Bölge 2

Bu bölgede gerilmeler arasında $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z$ ilişkisi bulunmaktadır. Tresca kriteri ve ilgili akış kuralına göre $\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z$, $\bar{\varepsilon}_r^p = -(\bar{\varepsilon}_\theta^p + \bar{\varepsilon}_z^p)$ ve $\bar{\varepsilon}_{EQ} = \bar{\varepsilon}_r^p$ ifadeleri geçerlidir. Plastik bölge 1'dekine benzer şekilde

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} - M^2 \bar{u} = -\frac{(1-2\nu)(3-H\varepsilon_0)}{(M^2-1)[1+2H(1-\nu)]} \bar{r} + \frac{\bar{\alpha}[3+2H(1+\nu)]}{1+2H(1-\nu)} \bar{r}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \quad (25)$$

diferansiyel denklemi ve çözümü

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}) = & C_5 \bar{r} + \frac{C_6}{\bar{r}} - \frac{(1-2\nu)(3-H\varepsilon_0)\bar{r}}{(M^2-1)[1+2H(1-\nu)]} + \frac{\bar{\alpha}(1+\nu)[3+2H(1+\nu)]}{2M[1+2H(1-\nu)]} \\ & \bar{r}^M \left[\bar{r}^{1-M} \bar{T}(\bar{r}, \tau) - \bar{r}_p^{1-M} \bar{T}(\bar{r}_p, \tau) - (1-M) \int_{\bar{r}_p}^{\bar{r}} \eta^{-M} \bar{T}(\eta, \tau) d\eta \right] \\ & - \frac{\bar{\alpha}(1+\nu)[3+2H(1+\nu)]}{2M[1+2H(1-\nu)]} \bar{r}^{-M} \left[\bar{r}^{1+M} \bar{T}(\bar{r}, \tau) - \bar{r}_p^{1+M} \bar{T}(\bar{r}_p, \tau) \right. \\ & \left. - (1+M) \int_{\bar{r}_p}^{\bar{r}} \eta^M \bar{T}(\eta, \tau) d\eta \right] \end{aligned} \quad (26)$$

olarak elde edilir. Burada;

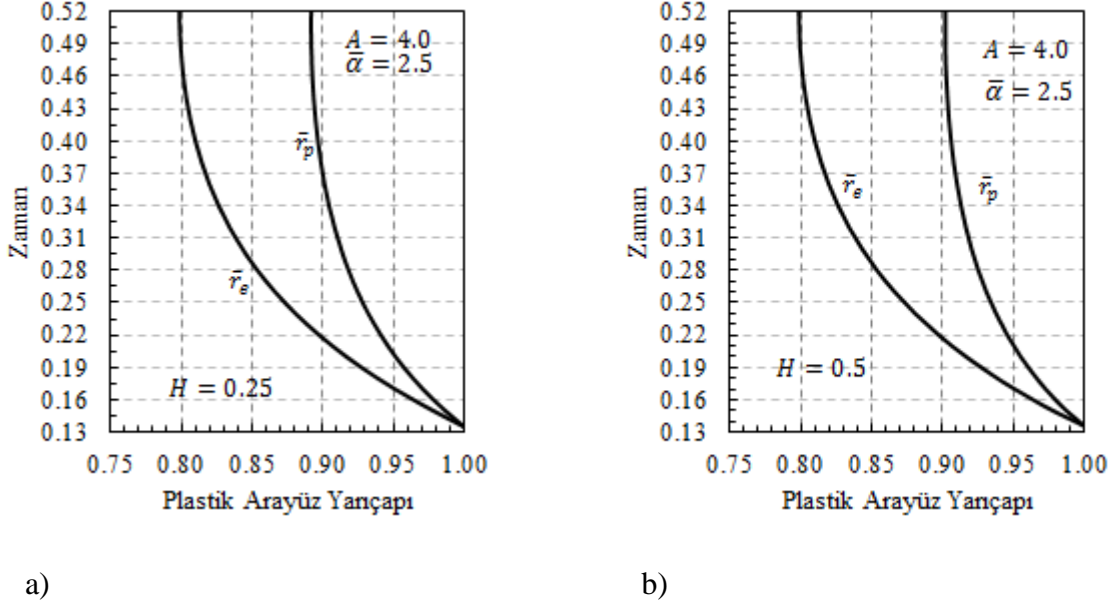
$$M = \sqrt{\frac{1+H}{1+2H(1-\nu)}} \quad (27)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

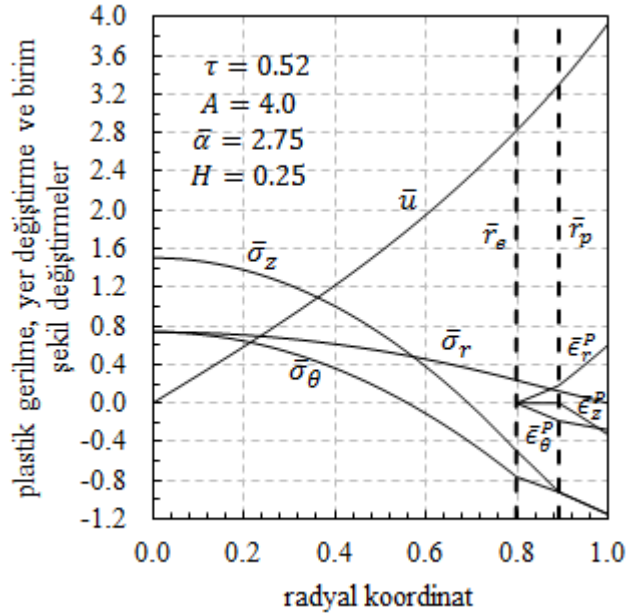
SAYISAL SONUÇLAR

Şekil 2'de iki farklı formda oluşan plastik bölgelerin zamanla silindir içerisinde ilerleyişi görülmektedir. Şekilde \bar{r}_e , plastik bölge 1 ile elastik bölge sınırını, \bar{r}_p ise iki plastik bölge arasındaki sınırı göstermektedir. Şekil 2(a)'da pekleşme parametresi $H = 0.25$, Şekil 2(b)'de ise $H = 0.5$ alınmıştır. Buna göre $\tau = 0.136$ anında başlayan plastik deformasyon, ısı yüklerinin periyodik olarak değişen sıcaklık sınır şartından dolayı azalmaya başladığı $\tau = 0.52$ anına

kadar ilerlemektedir. Şekil 2 incelendiğinde 1. plastik bölgenin diğer formdaki plastik bölgeye göre daha hızlı ilerlediği görülmektedir. Pekleşme parametresinin etkisine bakıldığında ise düşük parametre değerinde plastik bölge 2'nin daha hızlı bir biçimde ve daha geniş bir bölgeye ilerlediği görülmektedir. Şekil 3'te ise plastik deformasyon bölgelerinin genişlemelerinin durduğu $\tau = 0.52$ anındaki gerilme, yer değiştirme ve birim şekil değiştirmeler dağılımları verilmiştir.



Şekil 2. Plastik bölgelerin zamanla ilerleyişi ve pekleşme parametresinin etkisi, $\nu = 0.3$



Şekil 3. $\tau = 0.52$ anında plastik gerilme, yer değiştirme ve birim şekil değiştirmeler, $\nu = 0.3$

SONUÇLAR

Dış yüzey sıcaklığı periyodik olarak zamanla değişen içi dolu silindirin termoelastoplastik davranışı incelenmiştir. Tresca akma kriteri esas alındığında plastik deformasyonun silindirin dış yüzeyinde başladığı görülmüştür. Silindir yüzeyinde teğetsel gerilme bileşeni ile aksel gerilme bileşeni birbirine eşittir. Akmanın başlamasıyla birlikte iki farklı formda plastik bölge oluşmakta ve bu bölgeler aynı anda zamanla silindirin içine doğru genişlemektedir. Bu iki plastik bölgenin silindir içerisindeki ilerleyişleri incelendiğinde elastik bölge ile komşu olan plastik bölgenin daha hızlı ilerlediği görülmüştür. Pekleşme parametresinin plastik bölge ilerleyişi üzerindeki etkisi incelendiğinde düşük parametreye sahip silindirde dış yüzeye yakın olan plastik bölgenin daha geniş olduğu gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Hahn, W.D., Özısık, M.N., *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, 2012.
- [2] Atefi, G., Abdous, M.A., Ganjehkaviri, A., Moalemi, N., An analytical solution of a two-dimensional temperature field in a hollow cylinder under a time periodic boundary condition using Fourier series, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, (vol 223), 2009.
- [3] Verein Deutscher Ingenieure (VDI) - *Wärmeatlas*, Düsseldorf, 2003.
- [4] Radu, V., Taylor, N., and Paffumi, E. Development of new analytical solutions for elastic thermal stress components in a hollow cylinder under sinusoidal transient thermal loading. *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 85(12), 885–893, 2008.
- [5] Mendelson, A., *Plasticity: Theory and Application*, The Macmillan Company, New York, 1968.
- [6] Timoshenko, S., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill, 1970.
- [7] Ugural, A.C., Fenster, S.K., *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, Prentice-Hall, 2012.