



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## KABARCİK DİNAMIĞI İÇİN BİRİNCİ MERTEBE GAZ BASINCI YASASI

Can F. Delale<sup>1</sup> ve Şenay Pasinlioğlu<sup>2</sup><sup>1</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, MEF Üniversitesi, İstanbul<sup>2</sup>Matematik Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

The thermal behaviour of a spherical gas bubble in a liquid driven by an acoustic pressure is investigated in the uniform pressure approximation by employing an iterative method to solve the energy balance equations between the gas bubble and the surrounding liquid for the temperature distribution and the gas pressure inside the bubble. It is shown that the first iterative solution leads to the first order law of the gas pressure as a polytropic power law of the bubble wall temperature and of the bubble radius, with the polytropic index given as an explicit function of the isentropic exponent of the gas. The resulting first order law of the gas pressure reduces to the classical isothermal and adiabatic laws in the appropriate limits. The first order gas pressure law is then applied to an acoustically driven cavitation bubble by solving the Rayleigh-Plesset equation. Results obtained show that the bubble wall temperature pulsations during the late stage of collapse can become a few orders of magnitude higher than the bulk liquid temperature.

### ÖZET

Akustik bir basınç işaretiyle tetiklenen sıvı içindeki bir gaz kabarcığının ısı davranışı, düzgün basınç dağılımı varsayılarak kabarcık içindeki gaz basıncı ve sıcaklık dağılımını belirleyen sıvı ile gaz kabarcığı arasındaki enerji bilançosu denklemleriyle yinelemeli bir yöntem kullanılarak incelenmektedir. Birinci yinelemeli çözümün, gaz basıncının kabarcık cidar sıcaklığı ve kabarcık yarıçapının politropik üssü olduğu gösterilmekte, politropik üs de gazın izentropik üssünün bir fonksiyonu olarak belirlenmektedir. Elde edilen birinci mertebe gaz basıncı yasasının, uygun limit durumlarında klasik eşsıcaklık ve adyabatik yasalara indirgeniği görülmektedir. Birinci mertebe gaz basıncı yasası, Rayleigh-Plesset kabarcık dinamiği denklemi çözülerek akustik olarak tetiklenen kavitasyon kabarcığına uygulanmaktadır. Elde edilen sonuçlar, büzülmenin son aşamasında kabarcık cidar sıcaklığının sıvı sıcaklığının bir kaç mertebe üstüne çıktığını göstermektedir.

## GİRİŞ

Isıl etkiler, atalet kuvvetlerince denetlenen kabarcıkların büzülmesi esnasında önemli bir rol oynar. Kabarcık içindeki basınç ve sıcaklık, kavitasyon [1-3], sonokimya [4] ve tek-kabarcık sonoaydınlanması [5-6] gibi alanlarda çok yüksek değerlere ulaşabilir. Düzgün basınç yaklaşımında kabarcık içindeki gaz basıncı üzerine kabarcığın ısıl davranışının etkisinin incelenmesi için çeşitli karmaşık modeller inşa edilmiştir [7-10]. Bu modellerin doğrudan sayısal benzetimleri tek kabarcık için olası olmasına rağmen, sayısal çözümlerin karmaşıklığı gaz basıncı ve sıcaklık için basitleştirilmiş ifadelerle ihtiyaç olduğunu göstermektedir. Bu doğrultuda sıvı viskozitesini yapay arttırarak ya da değişken bir izentropik üs kullanarak gaz basıncı için adyabatik yasadaki iyileştirme girişimi sonuçları tatmin edici bulunmamıştır [11]. Bu araştırmanın amacı çeşitli uygulamalarda kullanılmak üzere gaz basıncı, kabarcık duvar sıcaklığı, kabarcık yarıçapı ve gazın izentropik üssü arasında basit bir ilişki elde etmektir. Bu nedenle küresel bir gaz kabarcığı ve çevreleyen sıvı arasında enerji dengesi göz önüne alınmaktadır. Gaz basıncı ve sıcaklık için bilinen kuple denklemler, düzgün basınç dağılımı varsayımıyla yinelemeli bir yöntemle çözülmeye çalışılarak kabarcık içindeki ısıl davranış incelenmektedir. Özellikle, birinci yinelemede gaz basıncı evrim denkleminin gaz sıcaklığını karakterize eden yayılım denkleminde dekopple olması sonucu, birinci merteye indirgenmiş gaz basıncı yasasının, kabarcık cidar sıcaklığı ve kabarcık yarıçapının politropik bir yasası olduğu gösterilmektedir. Bu durumda politropik üs, gazın izentropik üssünün bir fonksiyonu olarak belirlenmektedir. Kabarcık duvar sıcaklığı ise, sıvı tarafında ince sınır tabakası yaklaşımı varsayılarak Plesset-Zwick [12] sıcaklık dağılımı çözümünden elde edilmektedir. Akustik olarak tetiklenmiş kavitasyon kabarcığı için Rayleigh-Plesset küresel kabarcık dinamiği denklemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar, kabarcığın büzülmesinin son safhasında kabarcık cidar sıcaklığının, sıvı sıcaklığının birkaç merteye üstüne çıkabileceğini göstermektedir.

## KÜRESEL KABARCİK DİNAMİĞİ İÇİN ENERJİ BİLANÇOSU

Bu bölümde küresel bir gaz kabarcığı ve etrafındaki sıvı arasındaki enerji dengesini inceleyeceğiz. Düzgün basınç dağılımı yaklaşımında, kabarcık içinde olduğu gibi çevreleyen sıvı içinde de kabarcığın ısıl davranışı üzerine yoğunlaşacağız.

### *Düzgün Basınç Dağılımı Yaklaşımında Gaz Kabarcığının Isıl Yayılımı*

Düzgün basınç dağılımı yaklaşımında bir gaz kabarcığının içindeki sıcaklık alanı için kısmi diferansiyel denklem Prosperetti [13] tarafından verilmiş ve normalize edilmiş hali [14]

$$\frac{p}{T} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{D}{pR^2} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} - y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=R} \right] \frac{\partial T}{\partial y} \right\} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dp}{dt} + \frac{D}{R^2 y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^2 \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (1)$$

biçimindedir. (1) denkleminde  $T$  kabarcık içindeki sıcaklık alanını göstermektedir ve  $T'_0$  sıvı sıcaklığına göre normalize edilmiştir;  $p$  düzgün basınç yaklaşımındaki kabarcık gaz basıncıdır ve bir  $p'_0$  referans basıncına göre normalize edilmiştir;  $R$  kabarcık yarıçapıdır ve başlangıç kabarcık yarıçapı  $R'_0$  ne göre normalize edilmiştir;  $\lambda(T)$  gazın ısıl iletkenliğidir ve kabarcık cidarındaki  $\lambda'_R$  değerine göre normalize edilmiştir;  $\gamma$  gazın isentropik üssüdür;  $y$  kabarcık merkezinden ölçülen radyal koordinattır ve kabarcık yarıçapının ani değerine göre

normalize edilmiştir;  $t$  zamanı göstermektedir ve karakteristik zaman  $\Theta'$  ne göre normalize edilmiştir.  $D$  ısı nüfuz etme kalınlığının başlangıç kabarcık yarıçapına oranının karesidir ve

$$D = \frac{(\gamma - 1)\lambda'_R T'_0 \Theta'}{\gamma p'_0 R_0'^2} \quad (2)$$

ifadesiyle tanımlanır. Düzgün basınç yaklaşımında gaz basıncı, (1) denkleminin kabarcık cidar sıcaklık gradyanı  $c(t) = (\partial T / \partial y)_{y=1^-}$  için,

$$T(t=0, y) = 1 \quad ; \quad T(t, y=1^-) = T_R(t) \quad ; \quad (\partial T / \partial y)_{y=0} = 0 \quad (3)$$

başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak elde edilen çözümden,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3\gamma}{R} \left[ \frac{D}{R} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1^-} - p \frac{dR}{dt} \right] \quad (4)$$

denkleminin çözümüyle bulunur. Bu vesileyle, kabarcık cidarının yakınında kabarcık içindeki gazın sıcaklık alanı için ilk yaklaşım olarak

$$T(t, y) = T_R(t) + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1^-} (y - 1^-) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y=1^-} (y - 1^-)^2 + O[(y - 1^-)^3] \quad (5)$$

olarak ve gazın ısı iletkenliği için benzer bir yaklaşım kabul ederek, yinelemeli bir çözüm yöntemi uyarlanır. Yukarıdaki açılımlar (1) denkleminde yerine koyulup  $y=1^-$  limiti alınarak kabarcık duvarındaki gaz sıcaklık gradyanı için

$$c(t) = \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1^-} = \frac{R^2}{2D} \left[ \frac{p}{T_R} \frac{dT_R}{dt} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{dp}{dt} \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y=1^-} \quad (6)$$

ifadesi elde edilir. Burada kabarcık cidarında  $\lambda(T)$  ısı iletkenliğinin sıcaklık değişimi ihmal edilmiştir. Kabarcık duvar sıcaklığı  $T_R(t)$  bilindiğinde, gaz sıcaklığı için başlangıç ve sınır koşulları ile gaz basıncı için başlangıç koşulunu birlikte sağlanarak (1) ve (3) denklemleri (6) denklemi ile birlikte, gaz sıcaklığı ve gaz basıncı için yinelemeli olarak çözülebilir (kabarcık cidar sıcaklığı, arayüz koşulları göz önünde bulundurularak sıvı tarafında ısı yayılım denkleminin çözümünden elde edilecektir).

#### *İlk Yinelemeli Çözüm: Büyüme ve Büzülme Esnasında Birinci Mertebe Gaz Basıncı Yasası*

İlk yinelemede (6) denkleminde kabarcık duvarındaki gaz sıcaklığının ikinci radyal türevinin etkisi ihmal edilir; yani  $(\partial^2 T / \partial y^2)_{y=1^-} = 0$  varsayımı yapılır. Bu varsayım, gaz basıncı denklemi (3)'ün kabarcık içindeki sıcaklık alanı denklemi (1)'den dekuple olmasını sağlar. Cidardaki sıcaklık gradyanı  $c(t)$ 'nin ilk yinelemeli yaklaşımı (3) denkleminde yerine koyularak ve integre edilerek, kabarcığın büyümesi ve büzülmesi esnasında gaz basıncı yasası için ilk yaklaşım

$$p = p_i \left( \frac{\sqrt{T_R}}{R} \right)^{3\kappa} \quad ; \quad \kappa = \frac{2\gamma}{(3\gamma - 1)} \quad (7)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $p_i$  kabarcığın başlangıç dengesinden elde edilen başlangıç gaz basıncıdır ve  $\kappa$  bir politropik üsdür. (7) denklemi ile verilen gaz basıncı yasasının  $\gamma=1$  ve  $T_R=1$  iken eşsıcaklık yasasına, kabarcık duvar sıcaklığı  $T_R = (p/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma}$  izentropik bağıntıyı sağladığında adyabatik yasaya indirgendiği gösterilebilir. Sıvı içindeki sıcaklık dağılımının ince sınır tabaka yaklaşımındaki çözümünden, normalize edilmiş kabarcık cidar sıcaklığı  $T_R$  için Plesset-Zwick [12] ifadesi bulunur.

## AKUSTİK KAVİTASYON KABARCIKLARI İÇİN SONUÇLAR

Bu bölümde akustik kavitasyon (gaz-buhar) kabarcıkları göz önüne alınmaktadır. Burada kabarcık içindeki basınç, kısmi buhar basıncı ve kısmi gaz basıncının toplamı olarak alınmış olup ilk yinelemeli yaklaşım normalize formda

$$p = p_v + p_i \left( \frac{\sqrt{T_R}}{R} \right)^{3\kappa} \quad (8)$$

olarak yazılabilir. Buhar-gaz kabarcığının kabarcık cidarındaki ısı akısı için arayüz koşulu kullanılarak ve sıvının ısıl iletkenliğinin gaz-buhar karışımınınkinden çok daha büyük olduğu varsayılarak, kabarcık cidarındaki faz değişiminin sıvı tarafında daha baskın olduğu düşünülebilir. Bu durumda sıvı tarafındaki kabarcık duvar sıcaklığı için Plesset-Zwick çözümü

$$T_R(t) = 1 - B \int_0^t \frac{R^2(\xi)(dR/d\xi)}{[\int_\xi^t R^4(\tau)d\tau]^{1/2}} d\xi \quad (9)$$

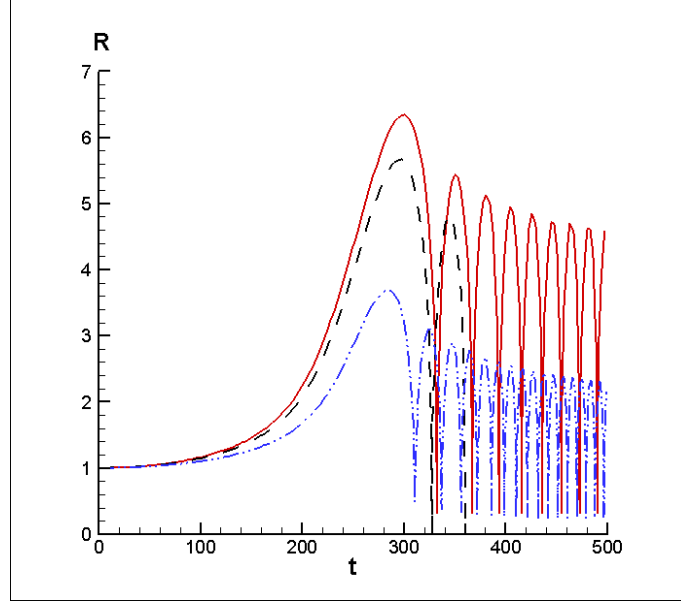
bulunur. Burada  $B$

$$B = \left( \frac{L'}{T_0' c_{p\ell}'} \right) \left( \frac{\rho_v'}{\rho_\ell'} \right) \frac{R_0'}{(\pi \theta' \alpha_\ell')^{1/2}} \quad (10)$$

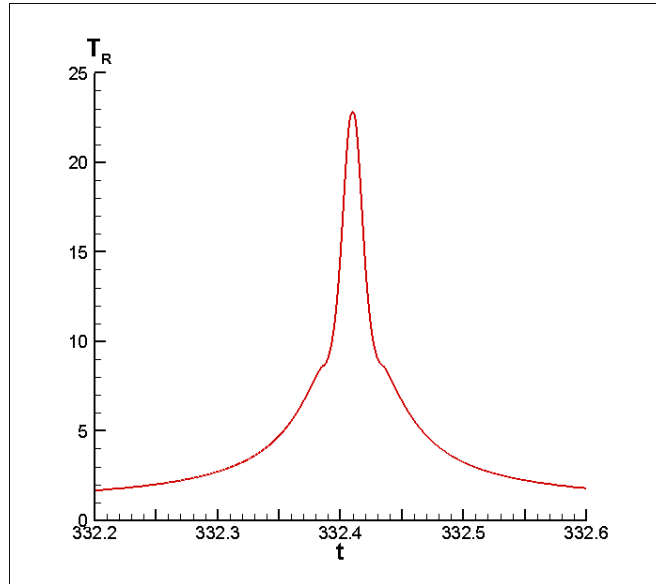
ifadesiyle tanımlanan boyutsuz bir sabiti,  $L'$  yoğunlaşma ısısını,  $\rho_v'$  doymuş buhar yoğunluğunu,  $\rho_\ell'$  sıvı yoğunluğunu,  $\alpha_\ell'$  sıvının ısıl yayılım katsayısını ve  $c_{p\ell}'$  sıvının özgül ısısını göstermektedir. (7)-(10) denklem sistemini kapatmak için küresel kabarcığın Rayleigh-Plesset denkleminde, gaz basıncı için (8) denklemindeki birinci mertebe gaz basıncı yasasını, tetikleyici normalize akustik basınç  $p_\infty(t)$  için de

$$p_\infty(t) = -0.25 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{500}\right) \right] ; \quad 0 < t < 500 \quad (11)$$

ifadesini kullanacağız. Uygulamalarda  $T_0' = 20^\circ\text{C}$  sıcaklığındaki suda, su-buhar/hava kabarcıklarının akustik kavitasyonunu göz önüne alacağız. (11) denklemi ile verilen tetikleyici normalize akustik basınç altında doymuş buhar basıncı  $p_v' = 0.0234$  bar, yüzey gerilim katsayısı  $S' = 0.071$  N/m, suyun viskozitesi  $\mu_\ell' = 10^{-3}$  kg/m-s, kavitasyon sayısı  $\sigma = 0.492$ , başlangıç denge kabarcık yarıçapı  $R_0' = 100$   $\mu\text{m}$  ve karakteristik zaman  $\theta' = 10^{-5}$  s olarak alınmaktadır. Rayleigh-Plesset denklemi, birinci mertebe gaz basınç yasası ve Simpson 3/8 sayısal integrasyon kuralı ile hesaplanan (9) denkleminin çözümü ile birlikte Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak integre edilmiştir. Şekil 1(a) birinci mertebe gaz basıncı yasası kullanılarak bulunan kabarcık yarıçapının zamanla değişiminin, gaz basıncı için klasik eşsıcaklık ve adyabatik yasalarla hesaplanan sonuçlarıyla karşılaştırmasını göstermektedir. Kabarcık yarıçapının farkedilebilir bir ısıl sönüm etkisi ile eşsıcaklık yasasıyla bulunandan daha büyük değerlere ulaştığı görülmektedir. Şekil 1(b) ise kabarcık cidar sıcaklığının birinci sönüm periyodu boyunca zamana göre detaylı değişimini göstermektedir. Bu durumda kabarcık cidarının mutlak gaz sıcaklığı, sıvının mutlak sıcaklığının yirmi üç katına kadar çıkmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 1. (a) (8) denklemi ile verilen birinci mertebe gaz basıncı yasası (kırmızı düz çizgi), eşsıcaklık yasası (siyah kesik çizgi) ve adyabatik yasa (mavi noktalı kesik çizgi) kullanılarak su içinde başlangıç denge yarıçapı  $R_0'=100 \mu\text{m}$ , kaviteasyon sayısı  $\sigma = 0.492$  olan su-su buharı/hava kabarcığı normalize yarıçapının, (11) denklemi ile verilen akustik basınç sinyali altında zamanla değişiminin karşılaştırılması, (b) normalize kabarcık cidar sıcaklığının ilk büzülme esnasında zamanla detaylı değişimi.

## KAYNAKLAR

- [1] C.E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, Oxford), 1995: s. 47-67.
- [2] M.S. Plesset, A. Prosperetti, *Annu.Rev.Fluid Mech.* 9 (1977) 145.
- [3] T.G. Leighton, *The Acoustic Bubble*, Academic Press, London, 1994: s. 84-86.
- [4] K.S. Suslick, *Science* 247 (1990) 1439.
- [5] D.F. Gaitan, L.A. Crum, C.C. Church, R.A. Roy, *J. Acoust. Soc. Am.* 91 (1992) 3166.
- [6] L.A. Crum, *Phys.Today* 47 (1994) 22.
- [7] R.I. Nigmatulin, N.S. Khabeev, F.B. Nagiev, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 24 (1981) 1033.
- [8] Y. Matsumoto, F. Takemura, *JSME Int. J. Ser. B* 37 (1994) 288.
- [9] A.T. Preston, T. Colonius, C.E. Brennen, *Phys. Fluids.* 19 (2007) Art. No. 123302.
- [10] L. Stricker, A. Prosperetti, D. Lohse, *J. Acoust. Soc. Am.* 130 (2011) 3243.
- [11] A. Prosperetti, L.A. Crum, K.W. Commander, *J. Acoust. Soc. Am.* 83 (1988) 502.
- [12] M.S. Plesset, S.A. Zwick, *J. Appl. Phys.* 23 (1952) 95.
- [13] A. Prosperetti, *J. Fluid Mech.* 222 (1991) 587.
- [14] C.F. Delale, *J. Fluids Eng.* 124 (2002) 969.