XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR METODU İLE ÜNİFORM OLMAYAN KESİTE SAHİP ÇUBUĞUN ZORLANMIŞ TİTREŞİM ANALİZİ

Kerimcan Çelebi[1], Durmuş Yarımpabuç[2] ve Mehmet Eker[3]
[1,3] Makine Müh. Böl., Müh. Fak., Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye
[2] Matematik Böl., Fen-Edb. Fak., Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye

ABSTRACT

The axial vibration problem formulation and solution of a nonuniform rod modeled as a continuous system were analyzed. By applying Laplace transformation to the differential equations that model to this problem, time independent boundary value problems were obtained in the axial coordinates, then this problem is solved by the complementary functions method. The equations solved numerically is converted into time space with the help of Durbin's numerical inverse transformation. The numerical results that obtained for each load type and inhomogeneity parameter were compared with analytical and ANSYS results in the literature. This unified method is well-structured, simple and efficient.

ÖZET

Sürekli sistem olarak modellenen eksenel yüklenmiş değişken kesitli bir çubuğun elastik davranış problemi analiz edilmiştir. Bu problemi modelleyen diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanarak zamandan bağımsız sınır değer problemi eksenel koordinatlarda elde edilmiş daha sonra bu problem tamamlayıcı fonksiyonlar metodu (TFM) tarafından çözülmüştür. Sayısal olarak çözülen denklemler Durbin'in sayısal ters dönüşümünü yardımıyla zaman uzayına dönüştürülmüştür. Her bir yükleme tipi ve inhomojenlik parametresi için elde edilen sayısal sonuçlar, analitik sonuçlar ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bu birleşik yöntem, iyi yapılandırılmış, basit ve etkili bir yöntemdir.

GİRİŞ

Malzeme mühendisliği alanındaki gelişmeler, değişken kesite sahip malzemelerden yapı elemanları imalatını mümkün kılmıştır. Tasarımcı tarafından değişken kesite sahip elemanların kullanılması ağırlığın azaltılmasında yardımcı olduğu gibi yapıların dayanımını ve kararlılığını da arttırmaktadır. Değişken kesite sahip çubukların dinamik yük altındaki davranışlarının analizi, kompozit malzeme araştırmalarında önemli bir yer tutmaktadır. Dinamik eksenel yük altındaki üniform olmayan kesite sahip çubukların analizi tek boyutlu titreşim problemleri başlığı altında incelenebilir. Bu konularda yapılan çok sayıda çalışma, serbest titreşim analizi ve zorlanmış titreşimin analizlerinde, ağırlıklı olarak, sonlu elemanlar yöntemi ve benzeri nümerik yöntemleri ihtiva etmektedir [4-11].

Bu çalışmada, değişken kesit alanına sahip bir çubuğun uç noktasına dinamik yükler uygulanarak analiz yapılmıştır. Problemi ifade eden diferansiyel denklem, değişken katsayılara sahip olacağından her kesit tipi için mevcut yöntemlerle analitik çözüm pratik olmayacaktır. Bundan dolayı, analizde Laplace transformasyon yöntemi ile birlikte Tamamlayıcı fonksiyonlar metodu (TFM) kullanılmıştır. Laplace transformasyon yöntemi zamandan bağımsız sınır değer problemini eksenel koordinatlarda verirken daha sonra bu problem TFM tarafından çözülmektedir. TFM benzer problemleri başlanğıç-değer sistemine çevirerek literatürdeki herhangi bir sayısal yöntem ile çözülmesine izin vermektedir. Bu çalışmada beşinci dereceden Runge-Kutta metodu kullanılarak sayısal olarak çözülen denklem sistemi Durbin'in sayısal ters dönüşümünü kullanarak zaman uzayına dönüştürülmüştür. Metodun teorisi literatürde [12-14] mevcuttur. Bu yöntem ayrıca çubuk harici elemanların kullanıldığı diğer bazı yapısal mekanik problemlerinde de başarılı bir şekilde uygulanmıştır [15-17]. Çubuğun serbest ucuna ait deplasman değerleri tablolar halinde verilmiş, elde edilen zorlanmış analiz sonuçları literatürdeki analitik sonuçlar Çelebi[10] ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak sayısal çözüm yapan ANSYS paket program sonuçları ile karşılaştırılmıştır. TFM sonuçlarının diğer bir sayısal çözüm yapan ANSYS sonuçlarına göre analitik sonuçlara çok daha yaklaştığı gözlemlenmiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar metodunun çubuğun dinamik analizinde sağladığı diğer avantajlar ise (1) zorlanmış titreşim etkisi doğrudan elde edilir, (2) zorlanmış titreşim analizi için serbest titreşim frekanslarına ve mod şekillerine ihtiyaç yoktur, (3) çözüm yöntemi kesit alanını ifade eden belirli bazı fonksiyonlara bağımlı değildir, kesit alanını ifade eden tüm keyfi fonksiyonlar için son derece uygundur.

TEORİ

Eksenel yük altında kesit alanı koordinatına göre değişen bir çubuğun davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilir [10]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{1}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

Denklem (1)'i boyutsuz olarak ifade etmek istersek

$$\frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \eta^2}+\frac{1}{A(\eta)}\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial v(\eta,\tau)}{\partial \eta}=\frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \tau^2} \tag{2}$$

şeklinde olur. Burada $c^2 = E/\rho$ olup, "c" deplasman yayılma hızıdır. Bu işlem için aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılmıştır.

$$v(\eta,\tau)=\frac{u(x,t)}{L}, \qquad \eta=\frac{x}{L}, \qquad \tau=\frac{ct}{L} \tag{3}$$

Çubuğun uçları sabit-serbest şeklindedir. $\eta = 0$ ucunda ankastre olan çubuk başlangıçta hareketsizdir. $P(\tau)$ kuvveti $\eta = 1.0$ 'de ki serbest uca eksenel yönde uygulanmaktadır. Sınır şartları

$$v(\eta,0)=0\,, \qquad \frac{\partial v(\eta,0)}{\partial \tau}=0 \tag{5}$$

$$v(0,\tau)=0\,, \qquad \frac{\partial v(1,\tau)}{\partial \eta}=\frac{P(\tau)}{A(1)E(1)} \tag{6}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2), kesit alanı A'nın formuna bağlı olarak, değişken katsayılı bir denklem olduğundan genel çözümü yoktur. Analitik olarak özel bazı $A(\eta)$ formları için çözülebilirken sayısal olarak ise tamamlayıcı fonksiyonlar metodu kullanılarak kesit alanını ifade eden tüm keyfi fonksiyonlar için çözüm elde edilebilir. Çalışmamızda analitik çözüm ile sayısal çözümleri karşılaştırabilmemiz adına bu formlar $\sin^2[a\eta+b]$, $(1+a\eta)^2$ ve $e^{-a\eta}$ olarak tespit edilmiştir. Çubuğun serbest ucuna uygulanacak kuvvetler ise $P_1(\tau)=P_0(1-Cos[\gamma\,\tau\,])$, $P_2(\tau)=P_0$ ve $P_3(\tau)=P_0(1-e^{-\gamma\tau})$ olarak düşünülmüştür.

$A(\eta)=A_o\,Sin^2[a\eta+b]$ **Kesit İfadesi için Çözüm**

Kesit ifadesinin boyutsuz büyüklük olan η ile $A(\eta)=A_0 sin^2[a\eta+b]$ şeklinde değiştiğini, elastisite $E(\eta)=E_0$ ve yoğunluğun $\rho(\eta)=\rho_0$ ise üniform olduğunu kabul edersek diferansiyel denklem ve sınır şartları Laplace uzayında

$$y^{\iota\iota}(\eta,s)+(2a\cot[a\eta+b])y^{\iota}(\eta,s)-s^2\,y(\eta,s)=0 \tag{7}$$

$$y(0,s)=0\,,\qquad \frac{\partial y(1,s)}{\partial\eta}=\frac{L\{P(\tau)\}}{A_0\sin^2[a+b]\,E_0} \tag{8}$$

formunu alır. Burada $y(\eta,p)=L\{v(\eta,\tau\}$ ve s ise kompleks Laplace parametresini ifade eder. Bu safhada, denklem (7)'nin kapalı form çözümü bu kesit ifadesi için değişken dönüşümü yapılarak mümkündür fakat pratik değildir. Dolayısıyla Laplace uzayındaki sonuçların eldesi için TFM kullanılabilir. TFM, ikinci mertebeden sınır-değer problemlerini başlangıç değer-problemine dönüştürme esasına dayanmaktadır. TFM ile denklem (7)'nin genel çözümü

$$y=b_i y_i\quad,\quad i=1,2 \tag{9}$$

şeklindedir, burada y_i lineer bağımsız homojen çözüm iken b_i sınır şartlarından elde edilecek sabitlerdir.

TFM ile çözüme $y_i=Z_1^{(i)}$ ve $y_i^{\iota}=Z_2^{(i)}$ kabulleri yapılarak başlanır ve

$$\begin{aligned}\left(Z_1^{(i)}\right)^{\iota}&=Z_2^{(i)}\\ \left(Z_2^{(i)}\right)^{\iota}&=-(2a\cot[a\eta+b])Z_2^{(i)}+s^2 Z_1^{(i)}\end{aligned} \tag{10}$$

eşitlikleri elde edilir. Yukardaki homojen denklem sisteminin çözümü keyfi başlangıç koşulları için sayısal olarak yapılır. Bu keyfi başlangıç koşulları C_{ij}

$$Z_j^{(i)}=C_{ij}\quad,\quad i=1,2 \tag{11}$$

çözümün lineer bağımsızlığını sağlamak için lineer bağımsız olarak seçilmelidir. Bu başlangıç değer problemi beşinci dereceden Runge-Kutta metodu (RK5) ile çözülmüştür. Çözümde $0\le\eta\le 1$ aralığı boyunca 21 düğüm noktası (20 aralık) alınmıştır.

Bu çözüm sonucunda elde edilen y_i ve türevi y_i^{ι} 'nin değerleri denklem (8)'de yerine yazılarak bilinmeyen b_i katsayılarını içeren iki denklem elde edilir. Bu denklemler matrix formunda

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21}\\ y_1^{\iota}(1,s) & y_2^{\iota}(1,s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ \dfrac{L\{P(\tau)\}}{A_0\sin^2[a+b]\,E_0}\end{bmatrix} \tag{12}$$

şeklinde yazılır. Burada, C_{11} ve C_{21} değerleri sırasıyla $y_1(0,s)$ ve $y_2(0,s)$'e karşılık gelir. Bu sistem çözülerek b_i katsayıları bulunur.

Bu katsayılar bulunduktan sonra boyutsuz deplasman $v(\eta,\tau)$ değerlerinin zaman uzayına dönüşümü ters Laplace dönüşümü ile yapılır. Bu amaçla Fast Fourier dönüşümüne (FFT) dayalı modifiye Durbin ters Laplace sayısal dönüşümü kullanılmıştır. [18].

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada sürekli sistem olarak modellenen eksenel yüklenmiş değişken kesitli bir çubuğun elastik davranış problemi analiz edilmiştir. Bu problemi modelleyen diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanarak zamandan bağımsız sınır değer problemi eksenel koordinatlarda elde edilmiş daha sonra bu problem TFM tarafından çözülmüştür. Sayısal olarak çözülen denklemler Durbin'in sayısal ters dönüşümünü yardımıyla zaman uzayına dönüştürülmüştür. Çubuğun serbest ucuna etki eden üç tip eksenel dinamik yükleme analizlerde kullanılmıştır: $P_1(\tau) = P_0(1-\cos[\gamma\tau)]$, $P_2(\tau) = P_0$ and $P_3(\tau) = P_0(1-e^{-\gamma\tau})$. Hesaplamalarda γ değeri 0.6 olarak kabul edilmiştir. Kesit ifadelerinde yer alan a inhomojenlik parametresidir ve hesaplamalarda sırasıyla 0, 1, 2 değerlerini almakta iken b ise 1 değerini almaktadır. TFM kullanılarak bulunan, çubuğun serbest ucuna ait deplasman sonuçları, literatürdeki analitik sonuçlar [11] ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak sayısal çözüm yapan ANSYS paket programı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. ANSYS paket programı ile çözümde yükleme şeklinden dolayı Newmark metodu tercih edilmiştir. Eleman tipi olarak BEAM188 kullanılmış, eksenel yönde değişen kesit ifadesi ANSYS parametrik tasarım dili (APDL) kullanılarak verilmiştir. Sonuçlar belirlenen inhomojenlik parametreleri ve yükleme tipleri için Tablo 1-9'da sunulmuştur. Çözümlerde, ANSYS'te çubuk eksenel yönde eşit uzunlukta 1000 parçaya bölünerek çözüm yapılırken TFM'de çubuk 20 parçaya bölünerek çözüm elde edilmiştir. TFM sonuçları ile analitik sonuçların, ANSYS sonuçlarına göre birbirine daha yakın çıktığı gözlemlenmiştir.

SONUÇLAR

Üniform olmayan kesite sahip bir çubuğun zorlanmış titreşim analizi Laplace dönüşüm yöntemi ile birlikte Tamamlayıcı fonksiyonlar metodu (TFM) kullanılarak yapılmıştır. Laplace dönüşüm yöntemi zamandan bağımsız sınır değer problemini eksenel koordinatlarda verirken daha sonra bu problem TFM tarafından çözülmüştür. TFM benzer problemleri başlangıç-değer sistemine çevirerek literatürdeki herhangi bir sayısal yöntem ile çözülmesine izin vermektedir. Bu çalışmada beşinci dereceden Runge-Kutta metodu kullanılarak sayısal olarak çözülen denklem sistemi Durbin'in sayısal ters dönüşümünü kullanarak zaman uzayına dönüştürülmüştür. TFM kullanılarak bulunan sayısal sonuçlar, literatürdeki analitik sonuçlar ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Burada açıkça görülen odur ki, bazı durumlarda TFM ile çözümde, çubuğun 20 parçaya bölünerek çözüm elde edilmesi sonuçlarda virgülden sonra beş haneli hassasiyet sağlarken, aynı sonuç için ANSYS'te ihtiyaç duyulan bölme sayısı binli rakamlara çıkmaktadır. Bu yöntemle çözüm zamanı büyük oranda azalmaktadır. Tamamlayıcı fonksiyonlar metodunun çubuğun dinamik analizinde sağladığı avantajlar sırasıyla:

(1) Zorlanmış titreşim etkisi doğrudan elde edilir.

(2) Zorlanmış titreşim analizi için serbest titreşim frekanslarına ve mod şekillerine ihtiyaç yoktur.

(3) Çözüm yöntemi kesit alanını ifade eden belirli bazı özel fonksiyonlara bağımlı değildir, kesit alanını ifade eden tüm keyfi fonksiyonlar için son derece uygundur.

(4) Sonlu elemanlar yöntemi gibi diğer sayısal yöntemlerle karşılaştırıldığında, daha az sürede ve daha az maliyetle daha hassas sonuçlar bulunabilmektedir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, analitik olarak eldesi mümkün olmayan, elastisite modülü, yoğunluk ve kesit alanının birlikte bir eksen boyunca değişken olduğu çubukların gelecekteki titreşim analizi araştırmalarında bir referans oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

[1] M. Eisenberger, Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics.* 34 (1991) 123–130.

[2] H. Matsuda, T. Sakiyama, C. Morita, M. Kawakami, Longitudinal impulsive response analysis of variable cross-section bars, *Journal of Sound and Vibration.* 181 (1995) 541–551.

[3] C.N. Bapat, Vibration of rods with uniformly tapered sections, *Journal of Sound and Vibration.* 185 (1995) 185–189.

[4] S. Abrate, Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of Sound and Vibration.* 185 (1995) 703–716.

[5] B.M. Kumar, R.I. Sujith, Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration.* 207 (5) (1997) 721–729.

[6] Q.S. Li, Exact solutions for free longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration.* 234 (1)(2000) 1–19.

[7] Q.S. Li, Exact solutions for free longitudinal vibration of bars with non-uniform cross-section, *Journal of Applied Mechanics and Engineering.* 5 (3) (2000) 521–541.

[8] Q.S. Li, Exact solutions for longitudinal vibration of multi-step bars with varying cross-section, *Journal of Vibration and Acoustics.* 122 (2000) 183–187.

[9] B. Yardimoglu, L. Aydin, Exact longitudinal vibration characteristics of rods with variable cross-Sections, *Shock and Vibration.* 18 (2011) 555-562.

[10] K. Celebi, I. Keles, N. Tutuncu, Exact solutions for forced vibration of non-uniform rods by Laplace transformation, *Gazi University Journal of Science.* 24(2) (2011) 347-353.

[11] M. Shokrollahi, A.Z.B. Nejad, Numerical Analysis of Free Longitudinal Vibration of Nonuniform Rods: Discrete Singular Convolution Approach, *Journal of Engineering Mechanics.* 140 (8) (2014) 06014007.

[12] Z. Aktas, Numerical solutions of two-point boundary value problems, METU, Dept. of Computer Eng., Ankara, Turkey, 1972.

[13] S.M. Roberts, J.S. Shipman, Fundamental matrix and two-point boundary-value problems, *Journal of Optimization Theory and Applications.* 28(1) (1979) 77-78.

[14] R.P. Agarwal,On the method of complementary functions for nonlinear boundary-value problems, *Journal of Optimization Theory and Applications.* 36(1) (1982) 139-144.

[15] V. Yildirim, Free vibration analysis of non-cylindrical coil springs by combined use of the transfer matrix and the complementary functions methods, *Communications in Numerical Methods in Engineering.* 13 (1997) 487-494.

[16] F.F. Calim, Free and forced vibration of non-uniform composite beams, *Composite Structures.* 88 (2009) 413-423.

[17] N. Tutuncu, B. Temel, A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structure.* 91 (2009) 385-390.

[18] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate’s method, *The Computer Journal.* 17 (1974) 371–6.

Tablo 1. Kesiti polinom formda değişen çubuk için $P_1(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$v(1,\tau)$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	2.13338	2.133376	2.12915	1.30411	1.304106	1.30111	0.881667	0.881667	0.879087
10	-0.23388	-0.23388	-0.23452	-0.0371	-0.0371	-0.0373	-0.36271	-0.36271	-0.36140
20	0.179785	0.179786	0.176996	-0.09914	-0.09914	-0.1002	0.059314	0.059314	0.057668
30	0.109509	0.109508	0.108413	-0.08487	-0.08487	-0.08609	-0.15767	-0.15767	-0.15662
40	0.659848	0.659849	0.654500	0.07812	0.07812	0.077231	0.216753	0.216752	0.213320
50	0.688	0.688	0.686527	0.374068	0.374067	0.372233	0.190823	0.190822	0.191549

Tablo 2. Kesiti polinom formda değişen çubuk için $P_2(\tau)$yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$v(1,\tau)$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	0.999845	1.000407	0.982324	0.107887	0.107655	0.112122	0.301791	0.301887	0.306523
10	1.97439	1.97858	1.90338	0.252835	0.253724	0.236228	0.64419	0.644694	0.632406
20	0.030772	0.0264007	0.115879	0.616221	0.615039	0.647566	0.068131	0.067815	0.071693
30	1.97673	1.97858	1.87385	0.892067	0.893377	0.896216	0.557082	0.557428	0.565088
40	0.032116	0.026401	0.150149	0.910138	0.908685	0.882136	0.159587	0.159312	0.150591
50	1.99163	1.978836	1.82829	0.578499	0.578521	0.585328	0.437142	0.43645	0.434744

Tablo 3. Kesiti polinom formda değişen çubuk için $P_3(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$v(1,\tau)$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	0.696886	0.696882	0.694604	0.479316	0.479316	0.477698	0.450853	0.450851	0.448833
10	1.10445	1.104459	1.09737	0.584101	0.584096	0.582325	0.450136	0.450135	0.448745

20	0.898295	0.898296	0.903889	0.705466	0.705475	0.702761	0.192374	0.192377	0.190641
30	1.1067	1.106679	1.09402	0.659433	0.659431	0.659555	0.493461	0.493458	0.492180
40	0.898239	0.898302	0.909387	0.494009	0.494003	0.490425	0.169128	0.169133	0.169414
50	1.10715	1.106679	1.08915	0.337535	0.337593	0.335158	0.493381	0.493355	0.489925

Tablo 4. Kesiti üstel formda değişen çubuk için $P_1(\tau)$yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$v(1,\tau)$								
	a=0			**a=1**			**a=2**		
τ	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**
5	2.13294	2.133376	2.12915	3.43205	3.432317	3.42647	6.57568	6.577714	6.57017
10	-0.23283	-0.23388	-0.23456	0.067883	0.06748	0.065364	-0.12812	-0.13023	-0.13670
20	0.179831	0.179786	0.176996	0.276992	0.276589	0.275055	0.425383	0.424095	0.422169
30	0.1105	0.109508	0.108413	0.613708	0.613464	0.610443	1.04217	1.04133	1.02593
40	0.659759	0.659849	0.654500	1.03681	1.036546	1.03251	1.67432	1.672538	1.66657
50	0.688788	0.688	0.686527	1.51709	1.516876	1.51444	2.84346	2.843814	2.82331

Tablo 5. Kesiti üstel formda değişen çubuk için $P_2(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$v(1,\tau)$								
	a=0			**a=1**			**a=2**		
τ	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**
5	1.00014	1.000407	0.982324	2.82698	2.829704	2.85501	2.20688	2.193008	2.30300
10	1.95421	1.978580	1.90338	0.706242	0.750206	0.682098	4.27086	4.344166	4.46342
20	0.0508049	0.0264	0.115879	0.726567	0.691595	0.608808	2.37251	2.357593	2.07136
30	1.95421	1.97858	1.87385	0.485277	0.496762	0.481202	2.14177	2.093442	2.31998
40	0.050796	0.026401	0.150149	0.824117	0.810774	0.733318	4.24035	4.276586	4.52993
5	1.95623	1.978836	1.82829	1.1062	1.102023	1.14669	0.75352	0.660371	1.42154

Tablo 6. Kesiti üstel formda değişen çubuk için $P_3(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$\boldsymbol{v(1,\tau)}$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	0.697456	0.696882	0.694604	1.79934	1.800494	1.79658	3.45606	3.458083	3.45855
10	1.10394	1.104459	1.09737	1.57887	1.57961	1.57023	3.5996	3.606126	3.59279
20	0.89885	0.898296	0.903889	1.47445	1.471508	1.47719	2.72247	2.717392	2.72499
30	1.10616	1.106679	1.09402	1.43238	1.431784	1.44200	3.62238	3.62549	3.65290
40	0.898855	0.898302	0.909387	1.42607	1.424038	1.43205	3.03772	3.036661	3.05766
50	1.10617	1.106679	1.10700	1.38319	1.3824	1.37667	3.10921	3.108574	3.16154

Tablo 7. Kesiti sinüzoidal formda değişen çubuk için $P_1(\tau)$yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$\boldsymbol{v(1,\tau)}$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	3.01293	3.00649	3.00696	2.39753	2.39325	2.39293	7.69337	7.67786	7.72680
10	-0.33030	-0.33194	-0.33121	-0.25380	-0.25524	-0.25434	0.01716	0.01721	0.01210
20	0.25390	0.25144	0.24996	0.11608	0.11409	0.11281	0.56929	0.56217	0.56643
30	0.15465	0.15091	0.15310	0.26976	0.26717	0.26870	1.24836	1.23844	1.24860
40	0.93189	0.92725	0.92433	0.48438	0.48027	0.47920	2.15271	2.15268	2.15737
50	0.97164	0.96584	0.96957	1.05025	1.04627	1.04647	3.3042	3.30424	3.30736

Tablo 8. Kesiti sinüzoidal formda değişen çubuk için $P_2(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$\boldsymbol{v(1,\tau)}$								
	a=0			a=1			a=2		
τ	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS	TFM	Ref. [10]	ANSYS
5	1.41374	0.01998	1.38732	0.87905	0.87485	0.86046	4.2167	4.21988	4.51497
10	2.78979	2.79598	2.68811	2.04846	2.05379	1.94477	4.92822	4.88116	4.92970
20	0.04213	0.03728	0.16365	0.48546	0.47609	0.62242	3.98989	4.01468	4.05914
30	2.79512	2.79598	2.64641	1.2719	1.27452	1.11143	4.28231	4.26753	4.04947
40	0.03814	0.03728	0.21205	1.37882	1.36930	1.55770	4.45084	4.05653	3.97037
50	2.8469	2.79598	2.58207	0.50381	0.51185	0.31635	3.05324	2.73448	2.73945

Tablo 9. Kesiti sinüzoidal formda değişen çubuk için $P_3(\tau)$ yükü altında TFM ile bulunan serbest uçtaki deplasman değerlerinin analitik ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılması

	$\boldsymbol{v(1,\tau)}$								
	a=0			**a=1**			**a=2**		
$\boldsymbol{\tau}$	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**	**TFM**	**Ref. [10]**	**ANSYS**
5	0.98418	0.98111	0.980977	0.74643	0.74293	0.743068	3.86414	3.86569	3.88552
10	1.55978	1.55729	1.54980	1.0515	1.04811	1.04349	3.8405	3.84217	3.84505
20	1.26861	1.26415	1.27655	1.30635	1.30461	1.31007	4.01908	4.01898	4.01433
30	1.56299	1.56038	1.54507	0.79908	0.79544	0.791522	3.58918	3.59032	3.63378
40	1.26892	1.26420	1.28431	1.42204	1.42025	1.42323	4.01313	4.01696	4.02497
50	1.56353	1.56033	1.53819	0.85374	0.85033	0.850061	3.68764	3.65701	3.68520