



YARI RİJİT BAĞLI BETONARME BACALARIN SERBEST TİTREŞİMİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORMASYON METODU İLE ANALİZİ

Baran Bozyiğit¹, Onur Öztürkoğlu² ve Seval Çatal³

^{1,2,3}Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

ABSTRACT

In this study, the free vibration analysis of semi-rigid connected reinforced concrete chimneys is investigated. The first three natural circular frequencies of the chimneys which have uniform cross sections along their heights and modeled by using different translational and rotational springs due to different soil conditions, are obtained using analytical solution and Differential Transform Method (DTM). SAP2000 is used in addition to analytical solutions and DTM solutions in numerical analysis. The stiffnesses of elastic springs that are used in numerical analysis are calculated by means of shear modulus of the soil, poisson ratio of the soil and radius of the foundation in accordance with ASCE 4-98. The results obtained from DTM are compared with the results of the analytical solution and very good proximity is observed. The natural frequencies of semi-rigid systems are compared with the natural frequencies of clamped foundation system. The natural frequencies are tabulated. After all, the mod shapes and normalized bending moment diagrams are presented.

ÖZET

Bu çalışmada; Timoshenko kiriş teorisi dikkate alınarak, yarı rijit bağlı betonarme bacaların serbest titreşim analizi incelenmiştir. Farklı zemin kayma modülleri için çökmeye ve dönmeye karşı elastik yaylar kullanılarak modellenen sabit enkesitli betonarme bacaların ilk üç modlarına ait doğal açısız frekansları, analitik metotla ve Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM) kullanılarak elde edilmiştir. Tüm analizlerde analitik yöntem ve DTM'nin yanında SAP2000 programı da kullanılmıştır. Sistemlerde kullanılan çökme ve dönme yayı rijitlikleri ASCE 4-98 yönetmeliği kapsamında zemine ait kayma modülüne, poisson oranına ve baca temelinin yarıçapına bağlı olarak hesaplanmıştır. DTM'den elde edilen sonuçların analitik yöntemle elde edilen sonuçlara oldukça başarılı bir şekilde yakınsadığı görülmüştür. Yarı rijit bağlı sistem için elde edilen açısız frekans değerleri, ankastre mesnetli sistem ile kıyaslanmıştır. Analizler sonucu elde edilen açısız frekans değerleri tablo halinde verilmiştir. İlk üç moda ait mod şekilleri ve normalize edilmiş eğilme momenti diyagramları sunulmuştur.

GİRİŞ

Ülkemizde de yapılması planlanan nükleer reaktörlerde ve çeşitli endüstriyel üretim tesislerinde sıkça kullanılan bacaların dinamik analizi can ve mal güvenliği açısından büyük önem arz etmektedir. Yüksek bacaların serbest titreşim analizinde genellikle basit ve hızlı çözüm için, topaklanmış kütleli sistem modeliyle birlikte ankastre mesnet varsayımı kullanılmaktadır. Literatürde sınırlı sayıda çalışmada yüksek bacaların serbest titreşim analizine yer verilmiştir. Güler [1], Euler-Bernoulli kiriş teorisini ve Galerkin yöntemini kullanarak, değişken enkesitli, boyları 115 metre ve 110 metre olan iki yüksek bacanın doğal titreşim periyotlarını ve mod şekillerini elde etmiştir. Yüksek bacaların tasarımında yapı-zemin etkileşiminin dinamik davranış üzerindeki etkilerinin vurgulandığı bu çalışmada, Winkler zeminine oturan dairesel temel plağı kullanılmıştır. Górski, Polonya'da bulunan bir elektrik santralindeki 295 metre uzunluğundaki bacanın doğal açısız frekanslarını ve sönüm oranını GPS teknolojisi kullanılarak incelemiştir [2]. Chmielewski ve arkadaşları [3] Polonya'da yer alan bir elektrik santraline ait 245 metre yüksekliğindeki bacanın ilk dört moduna ait doğal titreşim

periyotlarını ve mod şekillerini sonlu elemanlar metodu ile elde etmişlerdir. Analizlerde Kausel yaklaşımı ile zemine ait elastik dönme ve çökme yayları için rijitlikler kullanılmıştır. Çalışmanın deneysel olan ikinci bölümünde, bacaya jeofon sensörleri yerleştirilerek periyot ve deplasman ölçümleri yapılmıştır. Elde edilen doğal titreşim periyodu değerleri ve mod şekilleri nümerik analizden bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada kullanılan, etkili bir matematiksel teknik olan Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM) ilk kez Zhou tarafından, elektrik devrelerinde diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmış ve tanıtılmıştır [4]. Chen ve Ho, DTM'yi ilk kez özdeğer problemine uygulamışlardır, elde edilen özdeğer ve özvektörler analitik çözümle kıyaslanmış, yöntemin başarısı görülmüştür [5]. Demirdağ ve Yeşilce [6], zemine dönmeye karşı elastik yayla bağlı, tepe noktasında topaklanmış kütle bulunan Timoshenko kolonunun serbest titreşim analizi için DTM'yi uygulamışlardır. Yay ve kolon arasındaki rölatif rijitlik için tanımlanan katsayının farklı değerleri için elde edilen ilk üç moda ait açısal frekans değerleri analitik yöntemle kıyaslanmış olup, başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Yeşilce ve Çatal'ın araştırmasında, elastik zemine oturan değişken enkesitli, yarı rijit bağlı Reddy-Bickford kirişlerinin serbest titreşim analizi DTM uygulanarak incelenmiştir. Çalışmada ilk altı moda ait açısal frekans değerleri tablolar halinde sunulmuş olup, farklı eksenel basınç kuvveti ve rijitliklerin doğal açısal frekanslar üzerindeki etkileri açıkça görülmektedir [7]. Yeşilce ve Çatal, eksenel basınç kuvveti altında, elastik zemine oturan Reddy-Bickford kirişinin serbest titreşimini bir ucu basit bir ucu ankastre mesnetli sınır koşulları altında DTM'yi kullanarak incelemişlerdir. Hareket denklemleri Hamilton prensibi ile elde edildikten sonra analitik çözüm ve DTM ile çözüm yapılmıştır. Çeşitli eksenel basınç kuvveti ve zemin yatak katsayısı değerleri için elde edilen ilk üç moda ait açısal frekans değerleri tablolar halinde sunulmuştur. DTM'nin etkinliği ve başarısı elde edilen sonuçlarda görülmektedir [8].

Yapılan araştırmalar göstermiştir ki, yarı rijit bağlı betonarme bacaların serbest titreşim analizi, Timoshenko kiriş teorisi ve DTM kullanılarak ilk kez bu çalışma ile incelenmiştir. Analitik çözüm ve DTM çözümleri için Matlab ortamında tarafımızdan hazırlanan bilgisayar programları kullanılmıştır.

MODEL ve ANALİTİK ÇÖZÜM

Çalışmaya konu edilen betonarme baca ile ilgili olarak aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

1. Baca homojen ve izotropiktir.
2. Bacanın malzeme davranışı doğrusal elastiktir.
3. İkinci mertebeye etkiler ihmal edilmiştir.
4. Sönüm etkisi ihmal edilmiştir.
5. Eksenel deformasyonlar ihmal edilmiştir.

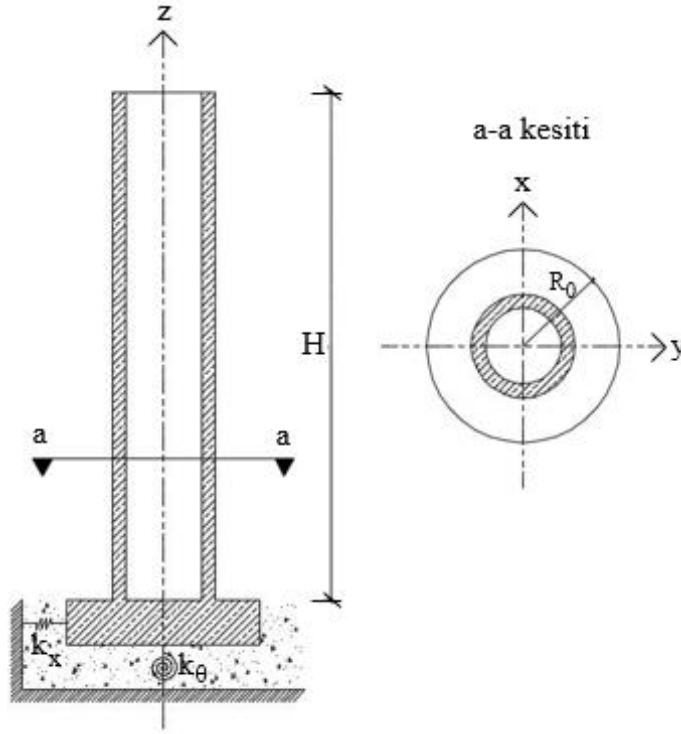
Bu çalışmada, zemin parametrelerine göre değişen elastik yay rijitliklerinin hesabında ASCE 4-98 yönetmeliği esas alınmıştır [9]. k_x ve k_θ sırasıyla (1) ve (2) numaralı bağıntılar kullanılarak elde edilebilir.

$$k_x = \frac{32(1-\nu)G_s R_0}{7-8\nu} \quad (1)$$

$$k_\theta = \frac{8G_s R_0^3}{3(1-\nu)} \quad (2)$$

Burada; ν ve G_s sırasıyla zemine ait poisson oranını ve kayma modülünü tanımlamaktadır.

Yarı rijit bağlı, sabit enkesitli betonarme baca modelinin boykesiti ve enkesiti Şekil 1'de sunulmuştur.



Şekil 1. Betonarme bacanın boykesiti ve enkesiti

Burada; H baca yüksekliğini, R_0 dairesel baca temelinin yarıçapını, k_x ve k_θ sırasıyla elastik çökme yayının rijitliğini ve elastik dönme yayının rijitliğini ifade etmektedir.

Timoshenko kiriş teorisine göre $w(z,t)$ kiriş eksenine dik yer değiştirme fonksiyonunu, $\theta(z,t)$ kesit dönmesi fonksiyonunu göstermek üzere, çalışmaya konu edilen betonarme bacanın hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir [10]:

$$\frac{AG}{\bar{k}} \left(\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} - \bar{m} \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial t^2} + \frac{AG}{\bar{k}} \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \theta(z,t) \right) = 0 \quad (4)$$

Burada; \bar{m} , A, G, E, I ve \bar{k} bacaya ait parametreler olup, sırasıyla yayılı kütleyi, enkesit alanını, kayma modülünü, elastisite modülünü, atalet momentini ve kesme düzeltme katsayısını göstermektedir.

Baca hareketinin harmonik olduğu varsayımıyla, $\xi = z / H$ olmak üzere; $w(z,t)$ ve $\theta(z,t)$ fonksiyonları değişkenlerine ayırma yöntemiyle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w(\xi,t) = w(\xi) \cdot e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\theta(\xi,t) = \theta(\xi) \cdot e^{i\omega t} \quad (6)$$

(3) ve (4) numaralı hareket denklemleri, (5) ve (6) numaralı bağıntılar kullanılarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürüldükten sonra, analitik çözüme ve DTM çözümüne esas olacak betonarme bacanın hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{AG}{\bar{k}H^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{AG}{\bar{k}H} \frac{d\theta}{d\xi} + \bar{m}\omega^2 w(\xi) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{EI}{H^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{AG}{kH} \frac{dw}{d\xi} + \left(\frac{\bar{m}I\omega^2}{A} - \frac{AG}{k} \right) \theta(\xi) = 0 \quad (8)$$

Burada; ω sistemin açısal frekansını ifade etmektedir.

Sisteme ait eğilme momenti $M(\xi)$ ve kesme kuvveti $T(\xi)$ fonksiyonları boyutsuz konum parametresi ξ 'e bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M(\xi) = \frac{EI}{H} \frac{d\theta}{d\xi} \quad (9)$$

$$T(\xi) = \frac{AG}{kH} \frac{dw}{d\xi} - \frac{AG}{k} \theta(\xi) \quad (10)$$

Bacaya ait sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M(\xi=0) + \theta(\xi=0)k_\theta = 0 \quad (11)$$

$$T(\xi=0) + w(\xi=0)k_x = 0 \quad (12)$$

$$M(\xi=1) = 0 \quad (13)$$

$$T(\xi=1) = 0 \quad (14)$$

Sınır koşulları kullanılarak elde edilen denklem takımının çözülmesiyle sistemin açısal frekans değerlerine ulaşılır.

DİFERANSİYEL TRANSFORMASYON METODU (DTM)

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin ve denklem takımlarının çözümünde oldukça etkili nümerik yöntemlerden biri olan Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM), Taylor seri açılımına dayanan ve yarı analitik kabul edilen matematiksel bir tekniktir. DTM yaklaşımı Taylor seri açılımına dayansa da, iterasyona dayalı bir prosedür uygulanarak fonksiyonların türevleri sembolik olarak elde edilmez [11]. Titreşim problemlerine ait, diferansiyel hareket denklemleri, DTM'ye özgü transfer fonksiyonları kullanılarak sınır koşulları bir takım cebirsel eşitlikler olarak elde edilir. Bu cebirsel eşitliklerin çözüm kümesi, serbest titreşim analizi uygulanan sistemin özdeğerleridir [12].

Tek boyutlu DTM için, uygulamada sıkça karşılaşılan fonksiyonlar ve sınır koşulları sırasıyla Çizelge 1 ve Çizelge 2'de sunulmuştur [11].

Çizelge 1. Tek boyutlu DTM için temel teoremler

Orijinal Fonksiyon	Transfer Edilmiş Fonksiyon
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = a \cdot u(x)$	$W(k) = a \cdot U(k)$
$w(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$	$W(k) = \frac{(k+m)!}{k!} \cdot U(k+m)$
$w(x) = u(x) \cdot v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) \cdot V(k-r)$

Çizelge 2. Sınır koşulları için tek boyutlu DTM teoremleri

$x = 0$		$x = 1$	
Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları	Orijinal Sınır Koşulları	Transfer Edilmiş Sınır Koşulları
$w(0) = 0$	$W(0) = 0$	$w(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} W(k) = 0$
$\frac{dw(0)}{dx} = 0$	$W(1) = 0$	$\frac{dw(1)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.W(k) = 0$
$\frac{d^2w(0)}{dx^2} = 0$	$W(2) = 0$	$\frac{d^2w(1)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1).W(k) = 0$
$\frac{d^3w(0)}{dx^3} = 0$	$W(3) = 0$	$\frac{d^3w(1)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1).(k-2).W(k) = 0$

DTM'nin Yarı Rijit Bağlı Betonarme Bacanın Hareket Denklemlerine Uygulanması

DTM çözümü için (7) ve (8) numaralı denklemler sırasıyla, (15) ve (16) numaralı eşitliklerle belirtilen formda yazılabilirler:

$$\frac{AG}{\bar{k}H^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} = \frac{AG}{\bar{k}H} \frac{d\theta}{d\xi} - \bar{m}\omega^2 w(\xi) \quad (15)$$

$$\frac{EI}{H^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\frac{AG}{\bar{k}H} \frac{dw}{d\xi} - \left(\frac{\bar{m}I\omega^2}{A} - \frac{AG}{\bar{k}} \right) \theta(\xi) \quad (16)$$

(9), (10), (15) ve (16) numaralı eşitlikler için aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır:

$$K1 = \frac{AG}{\bar{k}H}; K2 = \frac{-\bar{m}\omega^2}{AG}; K3 = \frac{-AG}{EI}; K4 = \frac{-\left(\frac{\bar{m}I\omega^2}{A} - \frac{AG}{\bar{k}}\right)}{EI}; K5 = \frac{EI}{H};$$

$$K6 = \frac{AG}{\bar{k}H}; K7 = \frac{AG}{\bar{k}}$$

(15) ve (16) numaralı bağıntılara Çizelge 1 ile sunulan teoremler kullanılarak DTM uygulanırsa (17) ve (18) numaralı eşitlikler elde edilir:

$$W(k+2) = \frac{K1.\varphi(k+1)}{(k+2)} + \frac{K2.W(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (17)$$

$$\varphi(k+2) = \frac{K3.W(k+1)}{(k+2)} + \frac{K4.\varphi(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (18)$$

Burada; $W(k)$ ve $\varphi(k)$ sırasıyla, deplasman ve kesit dönmesi fonksiyonlarının transfer edilmiş fonksiyonlarıdır.

(11) – (14) bağıntıları ile sunulan sınır koşullarının kullanılabilmesi için eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonlarına DTM uygulanarak, sırasıyla eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonlarının transfer edilmiş fonksiyonları olan $\bar{M}(k)$ ve $\bar{T}(k)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{M}(k) = K5.(k+1)\varphi(k+1) \quad (19)$$

$$\bar{T}(k) = K6.(k+1)W(k+1) + K7.\varphi(k) \quad (20)$$

Yarı rijit bağlı betonarme bacanın orijinal sınır koşulları ve transfer edilmiş sınır koşulları Çizelge 3 ile sunulmuştur.

Çizelge 3. Yarı rijit bağlı betonarme bacanın sınır koşulları

$\xi = 0$		$\xi = 1$	
Orijinal Sınır Koşulu	Transfer Sınır Koşulu	Orijinal Sınır Koşulu	Transfer Sınır Koşulu
$M(0) + \theta(0)k_{\theta} = 0$	$\bar{M}(0) + \varphi(0)k_{\theta} = 0$	$M(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\bar{N}} \bar{M}(k) = 0$
$T(0) + w(0)k_x = 0$	$\bar{T}(0) + W(0)k_x = 0$	$T(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\bar{N}} \bar{T}(k) = 0$

Çizelge 3 ile sunulan, transfer edilmiş sınır koşulları (17) ve (18) numaralı bağıntılarda yerine yazıldıktan sonra $\varphi(1) = C_1$, $W(1) = C_2$ alınarak aşağıdaki matris form elde edilir:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{\bar{N}}(\omega) & A_{12}^{\bar{N}}(\omega) \\ A_{21}^{\bar{N}}(\omega) & A_{22}^{\bar{N}}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Burada; \bar{N} terim sayısını, C_1 ve C_2 denklem sisteminin katsayılarını, $A_{ji}^{\bar{N}}(\omega)$ ise ilgili terim sayısına karşılık gelen açısal frekansın polinomunu ifade etmektedir. Açısal frekans değerleri (21) numaralı bağıntıda yer alan katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir.

SAYISAL ANALİZ VE DEĞERLENDİRMELER

Sayısal analizde kullanılan baca modeli için, $H = 30$ m, $R_0 = 2.15$ m, baca dış çapı $D = 2.30$ m, iç çapı $d = 1.70$ m, $\bar{m} = 4.8038$ kN.sn²/m², $E = 31000000$ kN/m², $G = 12916667$ kN/m², kesme düzeltme katsayısı $\bar{k} = 2$, zemin poisson oranı $\nu = 0.25$ alınmıştır. Çalışmada kullanılan, farklı zemin kayma modüllerine (G_s) göre değişen elastik yay katsayıları Çizelge 4’de yer almaktadır. Yarı rijit bağlı sistemle birlikte, ankastre mesnetli sistemin ilk üç modlarına ait açısal frekans değerleri DTM, analitik yöntem ve SAP2000 yapısal analiz programı kullanılarak elde edilmiş ve sayısal değerler Çizelge 5’de sunulmuştur.

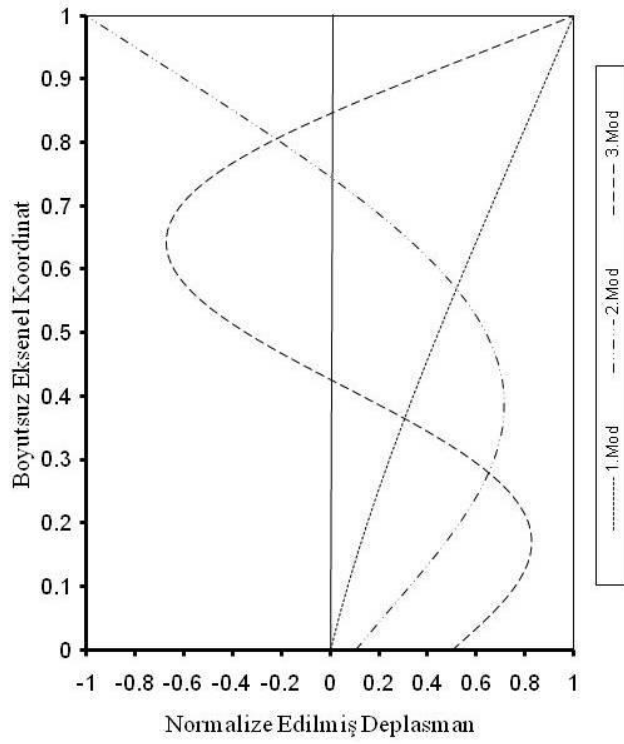
Çizelge 4. Zemin kayma modülü ve elastik yay rijitlikleri

G_s (kN / m ²)	30000	45000	60000	75000	90000	105000
k_x (kN / m)	309600	464400	619200	774000	928800	1083600
k_{θ} (kN.m / rad)	1060093	1590140	2120187	2650233	3180280	3710327

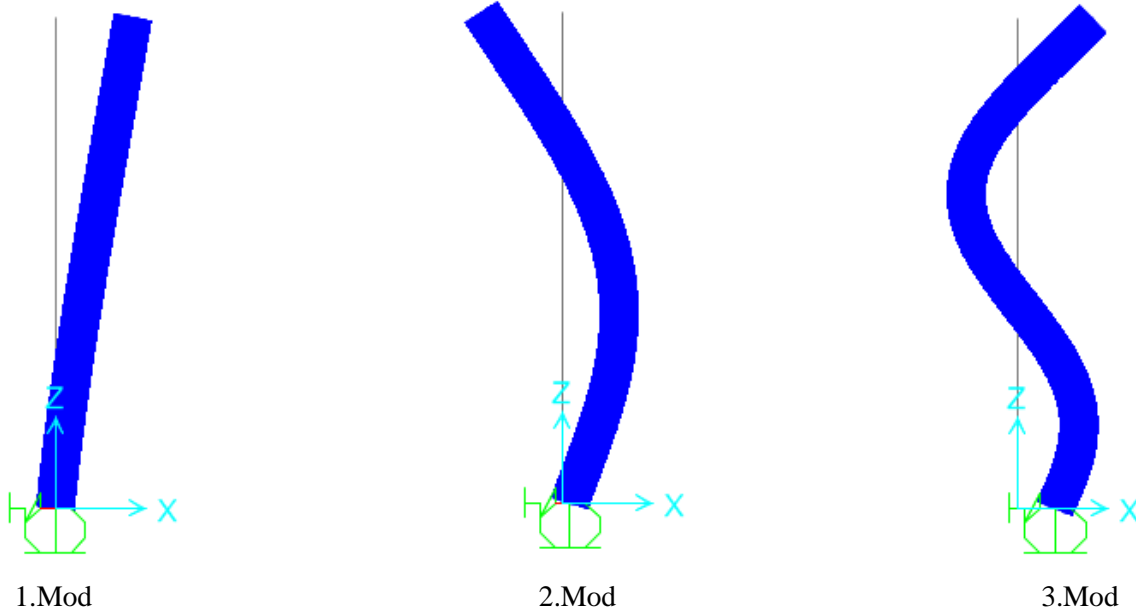
Çizelge 5. Yarı rijit bağlı ve ankastre mesnetli bacalara ait açılal frekans değerleri

Yöntem	Yarı Rijit Bağlı Sistem									
	\bar{N}	$G_s = 30000 \text{ kN/m}^2$			$G_s = 45000 \text{ kN/m}^2$			$G_s = 60000 \text{ kN/m}^2$		
		ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)	ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)	ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)
DTM	12	4.3668	-	-	5.0988	-	-	5.6359	-	-
	14	4.3668	40.7694	-	5.0988	42.4290	-	5.6359	43.6343	-
	20	4.3668	40.9103	-	5.0988	42.6147	114.0166	5.6359	43.8289	-
	22	4.3668	40.9103	107.3163	5.0988	42.6146	114.8059	5.6359	43.8288	119.3310
	24	4.3668	40.9103	107.2678	5.0988	42.6146	114.6942	5.6359	43.8288	119.1534
	28	4.3668	40.9103	107.2704	5.0988	42.6146	114.7012	5.6359	43.8288	119.1653
	30	4.3668	40.9103	107.2704	5.0988	42.6146	114.7012	5.6359	43.8288	119.1654
Analitik		4.3668	40.9103	107.2704	5.0988	42.6146	114.7012	5.6359	43.8288	119.1654
SAP 2000		4.3699	41.1486	108.3355	5.1026	42.8787	115.9524	5.6401	44.1095	120.5606
Yöntem	\bar{N}	$G_s = 75000 \text{ kN/m}^2$			$G_s = 90000 \text{ kN/m}^2$			$G_s = 105000 \text{ kN/m}^2$		
		ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)	ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)	ω_1 (rad/sn)	ω_2 (rad/sn)	ω_3 (rad/sn)
	DTM	12	6.0524	-	-	6.3871	-	-	6.6630	-
20		6.0524	44.7979	-	6.3871	45.6126	-	6.6630	46.3172	-
22		6.0524	44.7979	122.4480	6.3871	45.6125	124.7923	6.6630	46.3172	126.6631
30		6.0524	44.7979	122.2250	6.3871	45.6125	124.5163	6.6630	46.3172	126.3379
Analitik		6.0524	44.7979	122.2250	6.3871	45.6125	124.5163	6.6630	46.3172	126.3379
SAP 2000		6.0571	45.0909	123.7284	6.3921	45.9155	126.1026	6.6684	46.6286	127.9896
Yöntem	Ankastre Mesnetli Sistem									
Analitik		$\omega_1 = 9.6704 \text{ rad/sn}$			$\omega_2 = 58.0518 \text{ rad/sn}$			$\omega_3 = 152.9392 \text{ rad/sn}$		
SAP 2000		$\omega_1 = 9.6806 \text{ rad/sn}$			$\omega_2 = 58.4975 \text{ rad/sn}$			$\omega_3 = 152.9392 \text{ rad/sn}$		

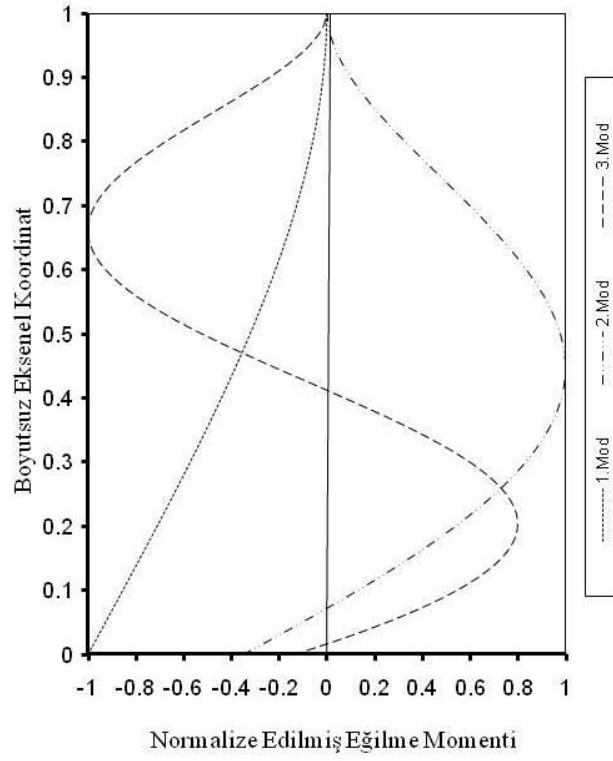
Çizelge 5’de görüldüğü üzere, zemin kayma modülü arttıkça sistemin ilk üç moduna ait açılal frekans değerleri artarak ankastre mesnetli sistemin değerlerine doğru yakınsamaktadır. Basit ve hızlı analiz olanağı sağlayan ankastre mesnet yaklaşımı, yarı rijit bağlı sisteme göre uzak sonuçlar vermese de, zemin kayma dayanımı azaldıkça gerçek dinamik davranışı sergilemekten uzaklaştığı anlaşılmaktadır. DTM ile elde edilen sonuçların analitik yöntemden elde edilen sonuçlara yeterli terim sayısı kullanıldığında oldukça başarılı bir hassasiyetle yakınsadığı görülmektedir. Yarı rijit bağlı sistemde, birinci moda ait açılal frekans değerleri tüm kayma modülleri için onikinci terimde yeterli hassasiyete ulaşırken, ikinci modlarda yirminci terim, üçüncü modlarda otuzuncu terim civarında gerekli yakınsama gerçekleşmiştir.



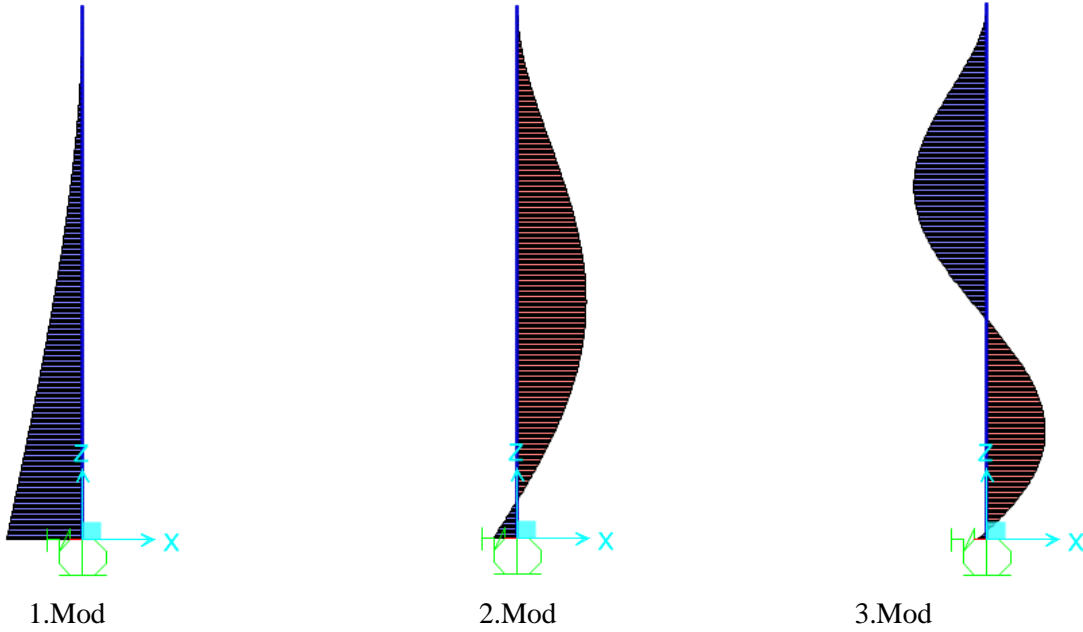
Şekil 2. $G_s = 60000 \text{ kN/m}^2$ değeri için DTM ve analitik çözümden elde edilen mod şekilleri



Şekil 3. $G_s = 60000 \text{ kN/m}^2$ değeri için SAP2000'den elde edilen mod şekilleri



Şekil 4. $G_s = 60000 \text{ kN/m}^2$ değeri için DTM ve analitik çözümden elde edilen normalize edilmiş eğilme momenti diyagramı



Şekil 5. $G_s=60000 \text{ kN/m}^2$ değeri için SAP2000'den elde edilen eğilme momenti diyagramları

Şekil 2, Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5 karşılaştırmalı olarak incelendiğinde, DTM'den elde edilen sonuçlarla çizilen mod şekillerinin ve normalize edilmiş eğilme momenti diyagramlarının SAP2000'den elde edilenlere oldukça yakın olduğu gözlemlenmiştir. Mod şekilleri çizilirken, Matlab ortamında boyutsuz konum parametresi ξ için 0.05 aralıkla okuma yapılırken, eğilme momenti diyagramında 0.02 aralıkla okuma yapılmıştır.

SONUÇLAR

Bu çalışma ile, yarı rijit bağlı betonarme bacaların serbest titreşim analizi Timoshenko kiriş teorisi ve DTM kullanılarak incelenmiştir. Farklı zemin kayma modülleri için ilk üç moda ait açısız frekans değerleri analitik yöntemle, DTM ile ve SAP2000 kullanılarak elde edilmiştir. Mod şekilleri ve normalize edilmiş eğilme momenti diyagramları SAP2000 ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar göre, özellikle karmaşık yapıya sahip diferansiyel denklemlerin çözümünü gerektiren titreşim problemlerinde başarısı ve hızı kanıtlanmış olan DTM'nin, yarı rijit bağlı bacaların serbest titreşim analizinde de oldukça başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Güler K., Free vibrations and modes of chimneys on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*. 218(3) (1998) 541-547.
- [2] Górski P., Investigation of dynamic characteristic of tall industrial chimney based on GPS measurements using random decrement method, *Engineering Structures*. 83 (2015) 30-49.
- [3] Chmielewski T., Górski P., Beirrow B., Kretzschmar J., *Engineering Structures*. 27 (2005) 25-34.
- [4] Zhou, J. K. (1986). *Differential transformation and its applications for electrical circuits*. Wuhan: Huazhong University Press.
- [5] Chen, C.K. ve Ho, S.-H. (1996). Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, 79(2-3), 173-188.
- [6] Demirdağ, O. ve Yeşilce, Y. (2011). Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method. *Advances in Engineering Software*, 42(10), 860-867.
- [7] Yeşilce, Y. ve Çatal, H. H. (2011). Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2), 199-213.
- [8] Yeşilce, Y. ve Çatal, S. (2009). Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 31(4), 453-476.
- [9] ASCE 4-98, Seismic Analysis of safety-related nuclear structures and commentary, American Society of Civil Engineers, 1998, USA.
- [10] Zhang, Z., Huang, X., Zhang, Z. Ve Hua, H. (2014). On the transverse vibration of Timoshenko double-beam systems coupled with various discontinuities, *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 222-241.
- [11] Çatal, S. (2008). Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method. *Applied Mathematical Modelling*, 32(9), 1744-1757.
- [12] Yeşilce, Y. (2010). Differential transform method for free vibration analysis of a moving beam. *Structural Engineering and Mechanics*, 35(5), 645-658.
- [13] Matlab R2014b (2014). The MathWorks, Inc.
- [14] SAP2000 V16.0.0. Integrated Solution For Structural Analysis & Design, Computer & Structures Inc., USA.