



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

İKİ RİJİT DİKDÖRTGEN BLOK İLE YÜKLENMİŞ ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK İKİ TABAKANIN SÜREKLİ TEMAS PROBLEMİ

Pınar Bora¹, Talat Şükrü Özşahin²
Cumhuriyet Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Sivas
KTÜ, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon

ABSTRACT

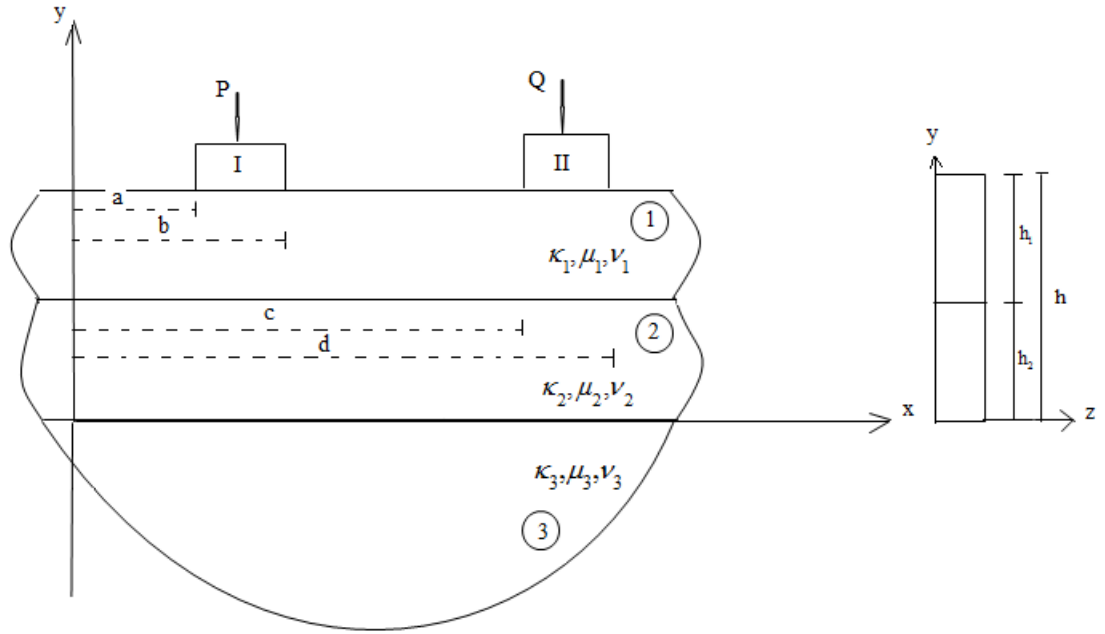
In this study, continuous contact problem for two layers, having different heights and elastic constants, loaded by means of two rigid rectangle stamps and resting on an elastic half infinite plane is considered according to theory of elasticity. The problem is solved under the assumptions that all surfaces are frictionless. Using boundary conditions of the problem and integral transform technique, the problem is reduced to a singular integral equation. The integral equation is solved numerically by making use of appropriate Gauss-Chebyshev integration formula for rectangular stamp profiles and contact stress distribution under the stamps is obtained. Depending on the contact stress under the stamps, initial separation loads and initial separation distances between elastic layers and between lower layer elastic half infinite plane are determined.

ÖZET

Bu çalışmada, rijit dikdörtgen iki blok aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri farklı iki tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Probleme bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Probleme ait sınır şartları ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak problem singüler bir integral denkleme indirgenmiştir. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak, integral denklem iki dikdörtgen blok profili için sayısal olarak çözülmüş ve blok altındaki temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Bloklar altındaki temas gerilmelerine bağlı olarak, tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir.

GİRİŞ

Birçok yapı ve mekanik sistem elemanlarının birbirleri ile temas halinde olması nedeniyle temas problemleri mühendislik yapılarında geniş yer bulmuşlardır. Mühendislik yapılarındaki gerilme, yer değiştirme, şekil değiştirme problemlerinin çözümünde eleman teorinin yetersiz kaldığı durumlarda elastisite teorisi yardımıyla problemler çözülmüş, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmeyle birlikte de bu konudaki çalışmaların sayısında önemli ölçüde artışlar meydana gelmiştir. Literatürde elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan farklı yükleme özelliklerine sahip elastik tabaka veya tabakaların sürtünmesiz sürekli ve süreksiz temas problemlerine sıklıkla rastlamak mümkündür.[1-8] Sürtünme etkisinin dikkate alındığı çalışmalar ise [9-11]'de verilmiştir.



Şekil 1. Problemin geometrisi

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzleme oturan ve iki rijit dikdörtgen blok aracılığı ile yüklenmiş, homojen, izotrop, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı elastik iki tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Bloklar yardımıyla tabakaya aktarılan yükler P ve Q olup $Q \geq P$ olduğu kabul edilmiştir. Problemde h, h_1, h_2 sırasıyla tabakaların toplam yüksekliğini, 1 nolu tabakanın yüksekliğini ve 2 nolu tabakanın yüksekliğini göstermektedir. Ayrıca ρ_i ($i=1,2$); 1 ve 2 no'lu tabakaların yoğunluklarını ve g yerçekimi ivmesini ifade etmektedir. Problem düzlem hal için incelendiğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU ve ÇÖZÜMÜ

Problemin çözümünde ilk olarak denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla Navier denklemleri elde edilmiştir. Navier denklemlerine, Fourier integral dönüşüm tekniği uygulanarak bir grup adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklem takımının çözülmesiyle gerilmelere ve yer değiştirmelere ait ifadeler bilinmeyen katsayılar cinsinden bulunmuştur. Bu bilinmeyen katsayılar aşağıdaki sınır şartları yardımıyla bilinmeyen temas gerilmeleri $p(x)$ ve $q(x)$ 'e bağlı olarak belirlenmiştir.

Probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \left\{ \begin{array}{ll} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_2) = \sigma_{y_1}(x, h_2) \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (3)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (4)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \sigma_{y_3}(x, 0) \quad -\infty < x < \infty \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a < x < b \\ \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad c < x < d \end{array} \right\} \quad (11)$$

Burada $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ x ve y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleridir, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ sırasıyla x ve y doğrultularındaki normal gerilme bileşenlerini $\tau_{xy}(x, y)$ ise kayma gerilmesi bileşenlerini göstermektedir. $p(x)$ ve $q(x)$ sırasıyla 1. ve 2. blok altındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir. Probleme ait denge şartları

$$\int_a^b p(x) dx = P, \quad \int_c^d q(x) dx = Q \quad (12a-b)$$

olarak tanımlanmıştır. Elde edilen katsayıların (11) no'lu sınır şartlarında yerlerine konulup gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \left[k_1(x, t) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t-x)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \left[k_1(x, t) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t-x)} \right] = 0 \quad a < x < b \quad (13a)$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \left[k_1(x, t) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t-x)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \left[k_1(x, t) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t-x)} \right] = 0 \quad c < x < d \quad (13b)$$

denklemler elde edilmiştir. $p(x)$ ve $q(x)$ temas gerilmelerinin hesaplanabilmesi için (12) no'lu denge denklemleri ile (13) no'lu integral denklemler birlikte çözülmelidir. Denklemlerdeki $k_1(x,t)$ integral denklemin çekirdeğidir ve açık şekli aşağıda verilmiştir.

$$k_1(x,t) = \int_0^{\infty} \{ \{ 16\alpha^3 (1+\kappa_1) ((e^{-4ah} - e^{-4ah_2} - 4\alpha e^{-2ah-2ah_2} (h-h_2)) (1+\kappa_2) ma(-1-\kappa_3 - (1+\kappa_2)mb) + e^{-4ah_2} (1+\kappa_3 - (1+\kappa_2)mb) + 2e^{-2ah_2} (-2\alpha h_2 (1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb)) + (e^{-4ah} + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2}) (1+\kappa_1)(1+\kappa_3 + (1+\kappa_2)mb) + e^{-4ah_2} (1+\kappa_3 - (1+\kappa_2)mb) + 2e^{-2ah_2} ((1+2\alpha^2 h_2^2)(-1-\kappa_3) + 2\alpha h_2 (1+\kappa_2)mb)) \} / \Delta - (1+\kappa_1)/4 \} \{ \sin\alpha(t-x) \} d\alpha \quad (14)$$

$$\Delta = -64\alpha^3 \{ [-e^{-4ah_2} - 2(2\alpha h - 2\alpha h_2)e^{-2ah-2ah_2} + e^{-4ah}] (1+\kappa_1) [e^{-4ah_2} ((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) - 2e^{-2ah_2} (-1 + 2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) + 2\alpha h_2 (1+\kappa_2)mb)] + [e^{-4ah_2} - 2(1+2\alpha^2 (h-h_2)^2)e^{-2ah-2ah_2} + e^{-4ah}] (1+\kappa_2) ma [e^{-4ah_2} ((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) - 2e^{-2ah_2} (-2\alpha h_2 (1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb)] \} \quad (15)$$

Yukardaki eşitliklerde geçen μ_i ve κ_i elastik tabakalara ait malzeme sabitleri olup κ düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_i = (3-4\nu_i)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i)$ olduğu bilinmektedir. ν_i Poisson oranıdır, $ma = \mu_2/\mu_1$, $mb = \mu_3/\mu_2$ kabul edilmiştir.

İntegral denklemin sayısal çözümü için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} & t_1 &= \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \\ x_2 &= \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} & t_2 &= \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \end{aligned} \quad (16a-f)$$

$$g_1(s_1) = p \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right) / P/h, \quad g_2(s_2) = q \left(\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right) / P/h$$

Burada $g(s)$ rijit bloklar üzerinde ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmeleridir. Rijit blokların kenarlarında temas gerilmeleri singulariteye sahip olduğu için integral denklemin indisi +1 dir. Buna göre singüler integral denklemin çözümü aşağıdaki gibi aranır.

$$g_i(s_i) = \frac{G_i(s_i)}{(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1,2) \quad (17)$$

Burada $g(s)$, $-1 \leq s \leq 1$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak, (12) ve (13) nolu denklemler aşağıdaki hale indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_1(S_{1i}) \frac{b-a}{2h} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \pi W_i G_2(S_{2i}) \frac{d-c}{2h} = Q/P \quad (18a-b)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n W_i G_1(S_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[k_1(x_1, t_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i}-r_{1j})} \right] \\ & - \sum_{i=1}^n W_i G_2(S_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[k_1(x_1, t_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \quad (19a) \\ & (j=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n W_i G_1(S_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[k_1(x_2, t_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\ & - \sum_{i=1}^n W_i G_2(S_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[k_1(x_2, t_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}(s_{2i}-r_{2j}) \right]} \right] = 0 \quad (19b) \\ & (j=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Bu ifadelerde;

$$W_{1i} = W_{2i} \quad W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad (i=2, \dots, n-1)$$

$$S_{1i} = S_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \quad (i=1, \dots, n)$$

$$r_{1j} = r_{2j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right) \quad (j=1, \dots, n-1)$$

olarak verilmektedir. (18) ve (19) ifadelerinden n bilinmeyenli n tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklem takımlarının çözülmesi sonucunda $g(s_i)$ ($i=1, \dots, n$) ler hesaplanabilir.

Tabakaların birbirine temas ettikleri yüzeydeki $\sigma_y(x, y)$ gerilme yayılımı ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının hesaplanmasında kullanılır. Temas yüzeylerindeki $\sigma_{y_1}(x, h_2)$ ve $\sigma_{y_2}(x, 0)$ gerilmeleri, kütle kuvvetleri eklenip gerekli ara işlemlerin yapılması sonucunda belirlendikten sonra ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarını veren ifadeler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \int_a^b k_2(x, t) p(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_2(x, t) q(t) dt \quad -\infty < x < \infty \quad (20)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = -\frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_a^b k_3(x, t) p(t) dt - \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_c^d k_3(x, t) q(t) dt \quad -\infty < x < \infty \quad (21)$$

Burada λ yük faktörü olup; $\lambda = P/\rho_1 g h h_1$ eşittir.

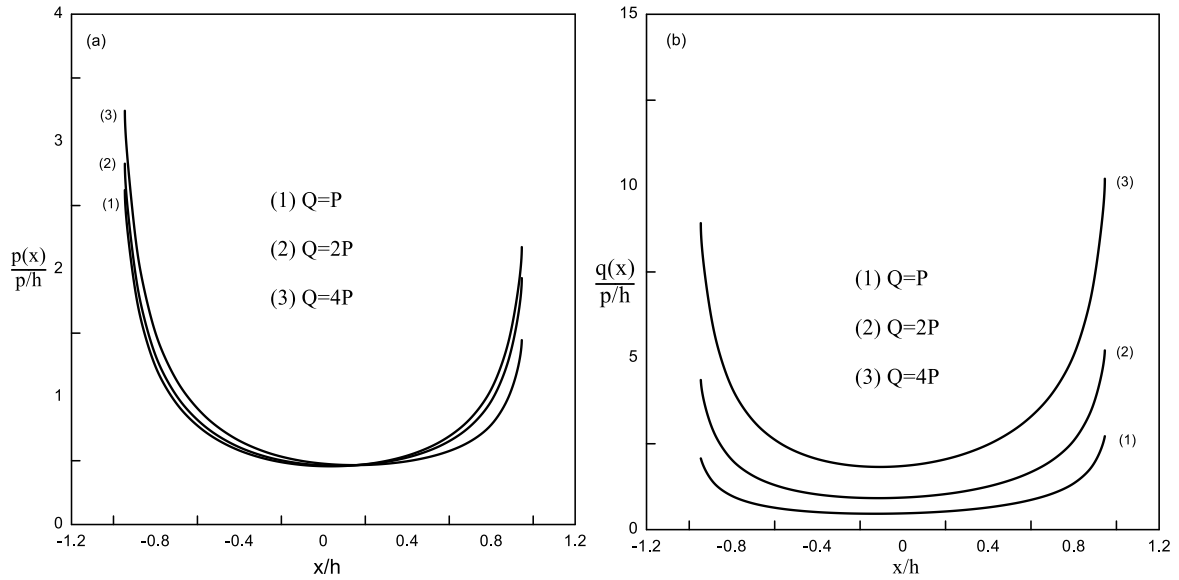
(20) ve (21) ifadelerinde geçen $k_2(x,t)$ ve $k_3(x,t)$ integral denklemlerin çekirdekleri olup açık halleri aşağıdaki gibidir.

$$k_2(x,t) = \int_0^{\infty} \left\{ 128\alpha^3 [(-1+\alpha(h-h_2))+e^{-2\alpha h_2}(1+\alpha(h-h_2))](1+\kappa_1)^{\mu_2/\mu_1} [e^{-\alpha h-5\alpha h_2}((1+\kappa_3) \right. \\ \left. -(1+\kappa_2)^{\mu_3/\mu_2})+e^{-\alpha h-\alpha h_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)^{\mu_3/\mu_2})-2e^{-\alpha h-3\alpha h_2}(1+2\alpha^2 h_2^2) \right. \\ \left. (1+\kappa_3)-2\alpha h_2(1+\kappa_2)^{\mu_3/\mu_2} \right\}$$

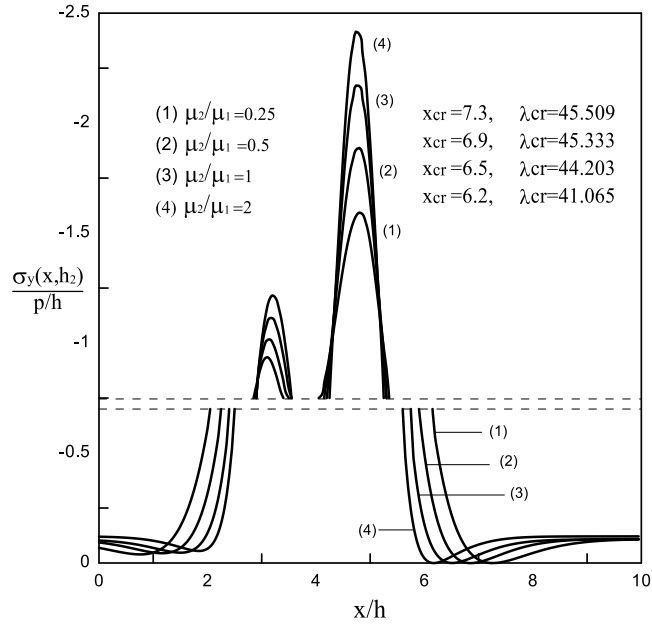
$$k_3(x,t) = \int_0^{\infty} \left\{ -256\alpha^3 [(1+\alpha h_2)+e^{-2\alpha h_2}(-1+\alpha h_2)](1+\kappa_1)(1+\kappa_2)^{\mu_3/\mu_2} [e^{-\alpha h-4\alpha h_2}(-1+\alpha \right. \\ \left. (-h+h_2))+e^{-3\alpha h-2\alpha h_2}(1+\alpha(-h+h_2))] \right\}$$

Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (20) , (21) ifadelerinin sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu eşitlikler yardımıyla ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları birlikte bulunabilir.

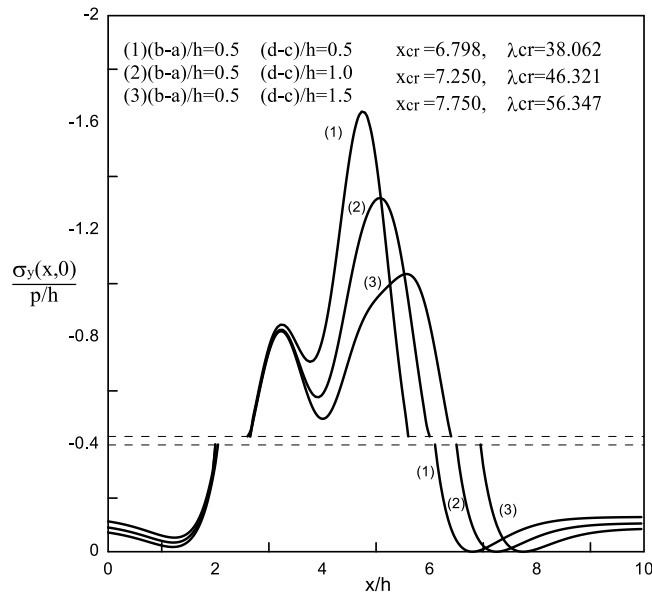
SAYISAL SONUÇLAR



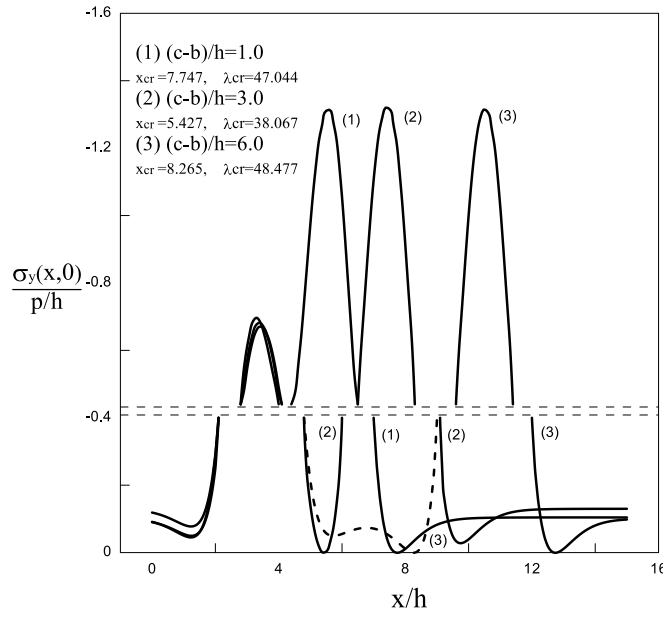
Şekil 2 a-b. Çeşitli yük oranı değerleri için bloklar altındaki temas gerilmeleri yayılışı $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1$



Şekil 3 $\sigma_y(x, h_2)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$)



Şekil 4 $\sigma_y(x, 0)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişimi ($\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=2P$)



Şekil 5 $\sigma_y(x,0)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ($\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=0.5, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, Q=2P$)

Tablo 1. Kritik yük faktörü (λ_{cr}) değerlerinin bloklar arasındaki uzaklıkla ($(c-b)/h$) değişimi ($Q=2P, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=(d-c)/h=1$)

$\frac{c-b}{h}$	BLOK I				BLOK II			
	$\lambda_{cr_{sol}}$	$X_{cr_{sol}}$	$X_{cr_{sağ}}$	$X_{cr_{sağ}}$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$X_{cr_{sol}}$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$X_{cr_{sağ}}$
0.5	71.2228	1.2556					45.7765	7.2451
1	82.4970	1.2284					47.0447	7.7476
3	92.9404	1.2317	38.067	5.4271	38.067	5.4271	48.3093	9.7452
5	94.4009	1.2402	46.2553	7.2439	46.2553	7.2439	48.4878	11.743
5.5	94.5287	1.2420	89.7045	5.7540	47.8830	7.7600	48.5027	12.243
6	94.6013	1.2428	94.2925	5.7269	48.4775	8.2652	48.5107	12.742
6.0647	94.6074	1.2430	94.6074	5.2570	48.5176	8.3303	48.5176	12.799

SONUÇLAR

Şekil 2 a-b’de çeşitli yük değerleri için dikdörtgen rijit bloklar altındaki $p(x)/(P/h)$, $q(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmelerinin değişimi verilmektedir. 1. blok sabit yüklenmiş 2. blokta yük artırılmıştır. Temas gerilmeleri rijit blokların kenarlarında sonsuza gitmekte, $x=0$ simetri düzlemine yaklaştıkça yük değerinin artmasına bağlı olarak düzgün bir şekilde artmaktadır. Rijit bloğun kenarlarının gerilme için singüler noktalar olduğu düşünülürse bu beklenen bir sonuçtur. 1. blok altında ise 2. bloktaki yüklemeler nedeniyle değişim gözlenmektedir. Şekil 3’te tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Şekildeki değerler incelendiğinde alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı arttıkça yani alt tabaka üst tabakaya oranla rijitleştikçe tabakalar arasında ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmakta, bu durumda ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir. Şekil 4’te alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yük ve ilk ayrılma uzaklığının blok genişlikleri ile değişimi görülmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi blok genişliği arttıkça ilk ayrılma yük ve uzaklıkları artmaktadır. Şekil 5’te alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının bloklar arasındaki mesafe ile değişimi görülmektedir. Buna göre $(c-b)/h$ ‘ın küçük değerleri için $((c-b)/h) < 3$ λ ‘ya bağlı iki ayrılma bölgesi meydana gelmektedir. $Q/h \geq P/h$ kabulünden ilk ayrılma bölgesi ikinci bloğun sağ tarafında olmaktadır. Bloklar arasındaki uzaklık $((c-b)/h=3)$ daha da artırılırsa bloklar arasında bir ayrılma bölgesi daha ortaya çıkmaktadır. Ve bu bölge muhtemelen ilk ayrılma bölgesidir. Tabakalar arasındaki uzaklık artırılmaya devam ettiğinde $((c-b)/h=6)$ ise yük faktörü λ ‘ya bağlı olarak dört ayrılma bölgesi meydana gelir. İlk ayrılma bölgesi ikinci bloğun yakınlarındadır ve $(c-b)/h$ ‘ın belli bir değerinden sonra bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Tablo 1’de Şekil 5’te ki durum için tablo oluşturulmuş ve verilen sabitler için bloklar arasındaki etkileşimin son bulunduğu değer $(c-b)/h=6.0647$ olarak belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Keer, L. M., Silva , M. A. G., Two Mixed Problems for a Semi-Infinite Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME , 39, 94 (1972) 1121-1124
- [2] Adams, G. G., (1978), “An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a , Stea Moving Force”, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, Vol.45, pp.89-94
- [3] Çakıroğlu, A. O., Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1979
- [4] Geçit, M., R., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16 (1980) 387-396.
- [5] Çakıroğlu, F. L., Erdöl , R., Elastik Zemin Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6.Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1989, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 243-248.
- [6] Birinci, A., vb , Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
- [7] Özşahin vd. Elastik Yarı Sonsuz Ortam Üzerine Oturan Farklı İki Düz Blok ile Yüklenmiş Elastik Tabakada Temas Problemi, XV. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 2007, ISPARTA
- [8] Adıbelli, H., Çömez, İ., Erdöl, R., 2009. “Rijit Panç İle Bastırılmış Elastik Yarı Düzleme Oturmuş Ağırksız Çift Şeritte Değme Problemi”, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, Bildiriler Kitabı Cilt 1, 71-82

- [9] King, R. B., O'Sullivan, t. C., (1987), "Sliding Contact Stress in a Two- Dimensional Layered Elastic Half-Space", ASME Journal of Solids and Structures, Vol.23 No:5, pp.581-597
- [10] Güler, M. A. Ve Erdoğan, F., 2004. Contact Mechanics of Graded Coatings, International Journal of Solids and Structures, 41, 14 3865-3889
- [11] Çömez, İ., Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon