



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## KUADRATİK ORTAMDA PARİTE ZAMAN (PT) SİMETRİLİ KAFES SOLİTONLARI

Mahmut Bağcı<sup>1</sup>, İlkey Bakırtaş<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

Solitary wave solutions are investigated for the two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with mean term (NLSM) and additional Parity-Time (PT) Symmetric periodic lattices. The numerical existence of solitons are demonstrated for real and PT-Symmetric periodic lattices. The linear and nonlinear evolution of these solitons are investigated by using direct simulations of the NLSM system. It is demonstrated that solitons in the periodic lattice can be nonlinearly stable in the absence of the PT-Symmetry. Also, it is noticed that strengthened gain-loss component (imaginary part of the potential) in the PT-Symmetric lattices decreases blow-up distance of the solitons.

### ÖZET

Bu çalışmada doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denkleminde kuadratik terimlerin ve parite zaman (PT) simetrikli periyodik kafes yapılarının (latis) varlığında lokalize dalgalar (temel ve dipol solitonlar) incelenmiştir. Çalışmada, periyodik potansiyel içindeki solitonların varlığı, potansiyelin gerçel (reel) ve kompleks olduğu durumlar için gösterilmiştir. Gerçel potansiyelin varlığında doğrusal olmayan kararlılığa sahip solitonların, kompleks potansiyel içinde kararlı olamadıkları görülmüştür. Ayrıca, sanal (imaginary) terimin potansiyel içindeki ağırlığı arttırıldıkça solitonların daha hızlı çökerek kararsız hale geldikleri görülmüştür.

### GİRİŞ

Fizik ve matematikte çeşitli yönetici denklemler kullanılarak dalga çözümleri elde edilebilir. Elde edilen çözümlerin yapısı ve kararlılığı kullanılan fiziksel modele ve bu model için kullanılan parametrelere göre değişir. Bu çözümler kararlı lokalize dalgalar (soliton) veya sönümlü dalgalar olabilir. Çözüm elde edilmek istenen ortamın (malzemenin) simetri merkezli (centro-symmetric) olması durumunda üçüncü dereceden (kübik) doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi yönetici denklem olarak kullanılabilir. Fakat, kullanılan malzeme simetri merkezli değilse, bu ortamda çözüm elde edebilmek için NLS denkleminin ikinci dereceden (kuadratik) katkıları eklenmelidir. Kübik NLS denkleminin kuadratik katkıları eklendiğinde (NLS equation with Mean Term) aşağıda verilen NLSM sistemi elde edilmektedir [1].

$$iu_z + \frac{1}{2} \Delta u + |u|^2 u - \rho u \Phi = 0$$

$$\Phi_{xx} + \nu \Phi_{yy} = (|u|^2)_{xx}$$

Burada  $u(x, y, z)$  birinci harmoniğin genliğe katkısını,  $\Phi(x, y)$  kuadratik etkileri göstermektedir.  $\rho$  bağlantı katsayısını,  $\nu$  kullanılan malzemenin (ortamın) yönler bağımlılığını (anizotropisini) yansıtan sabiti göstermektedir.  $\rho < 0$  durumunda su dalgaları,

$\rho > 0$  durumunda elektromanyetik dalga çözümleri elde edilir ( $\rho = 0$  durumunda NLS denklemleri elde edilir).

Yönetici denklemlere bir dış potansiyel eklenerek kararlı çözüm elde etmek literatürde bilinen bir yöntemdir. Son yıllarda, düzenli (kristal veya yarı kristal) potansiyeller kullanılarak elde edilen temel dipol ve çoklu (vorteks) solitonlarla ilgili çok sayıda çalışma yayınlanmıştır [2,3]. Ayrıca karmaşık (kompleks) değerli (Parity Time Symmetric) potansiyellerin varlığında dalga çözümlerine önem verilmektedir. Kompleks değerli potansiyeller parite zaman (PT) Simetrik olarak tanımlanmaktadır[4].

NLSM Sistemi için bir dış potansiyelin varlığında çözümlerin incelendiği herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmada, PT-Simetrik periyodik kafes için elde edilen NLSM solitonları incelenmiştir.

Kullanılan fiziksel sistemin yönetici modeli, bir dış potansiyel içeren NLSM Sistemi,

$$iu_z + \frac{1}{2}\Delta u + |u|^2 u - \rho u \Phi - V(x, y) = 0$$

$$\Phi_{xx} + \nu \Phi_{yy} = (|u|^2)_{xx}$$

ile verilir. Burada  $V(x, y)$  potansiyeli göstermektedir. Potansiyelleri elde etmek için kullanılan genel form

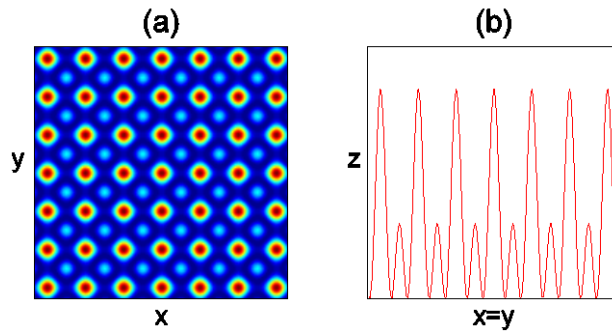
$$V(x, y) = \frac{V_0}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k_n x + k_n y)} \right|^2 + iW(x, y)$$

Şeklinde [2].  $W(x, y)$  potansiyelin sanal kısmını göstermektedir ve

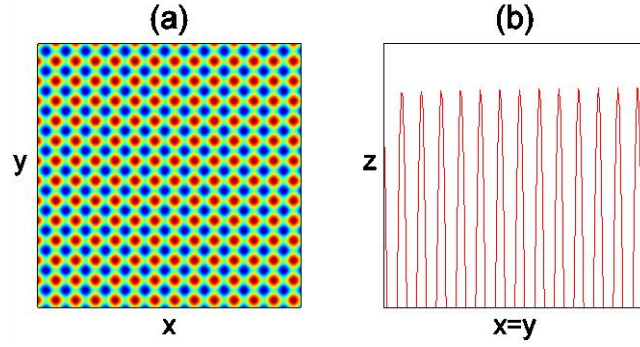
$$W(x, y) = W_0 V_0 [\sin(2x) + \sin(2y)]$$

olarak tanımlanmıştır.  $V_0$  potansiyel derinliğini  $W_0$  sanal kısmın potansiyel derinliğini belirleyen katsayıdır. Potansiyel frekansı  $k_x = k_y = 2\pi$  olarak belirlenmiştir. Burada  $N=2,3,4,6$  durumları periyodik potansiyelleri,  $N=5,7$  durumları yarı kristal potansiyelleri elde etmek için kullanılır. Bu çalışmada  $N=4$  durumuna karşılık gelen periyodik potansiyel incelenecektir.

Tanımlanan potansiyelin reel ve sanal kısımlarına ait üstten görünüşler ve diyagonal kesitler aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 1. Periyodik potansiyelin reel kısmına ait (a) üstten görünüş; (b) diyagonal kesit.



Şekil 2. Periyodik potansiyelin sanal kısmına ait (a) üstten görünüşü; (b) diyagonal kesit.

### SAYISAL YÖNTEM

Bu çalışmada, Ablowitz ve Musslimani'nin NLS tipi denklemlerin soliton çözümlerini sayısal olarak hesaplamak için oluşturdukları Spektral Renormalizasyon (SR) yöntemi NLSM sistemine uyarlanarak kullanılmıştır [5]. Bu yöntemde yönetici denklem Fourier uzayında ele alınıp,  $u = f(x, y)e^{-i\mu z}$  çözüm önerisi ile doğrusal olmayan terime göre bir yakınsama faktörü belirlenir. Belirlenen bu yakınsaklık sınırına ulaşıncaya kadar döngü yinelenir, bu çalışmada yakınsama koşulu  $10^{-8}$  olarak belirlenmiştir.

Sayısal çözüm için kullanılan Gaussian başlangıç koşulu aşağıdaki şekildedir.

$$w_0(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-A[(x+x_n)^2 + (y+y_n)^2] + i\theta_n}.$$

Burada  $x_n, y_n$  solitonların potansiyel üzerindeki yerini,  $\theta_n$  (birden fazla soliton olması durumunda) faz farkını,  $M$  soliton sayısını belirlemek için kullanılır.  $A$  değeri, solitonu belirlenen yere odaklamak için kullanılır.

Çalışmada, aksi belirtilmedikçe,  $\rho = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $A=1$ ,  $\mu = -1$  ve  $V_0 = 12.5$  olarak alınmıştır.

### KARARLILIK ANALİZİ

NLSM modeli kullanılarak elde edilen temel ve dipol solitonların doğrusal ve doğrusal olmayan kararlılığı incelenmiştir.

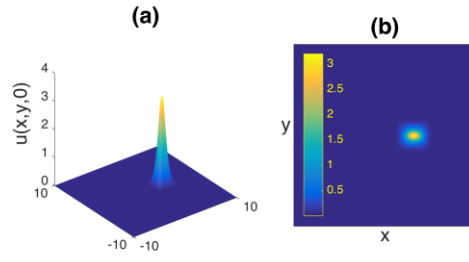
Solitonların kararlılığı incelenirken, ilk olarak soliton gücü ile solitonun doğrusal olmayan kararlılığı arasındaki ilişkiyi ortaya koyan Vakhitov-Kolokolov (VK) kararlılık kriterleri açıklanmıştır. VK kararlılık kriterlerine göre solitonun kararlı olabilmesi için soliton gücünün ( $P$ ), özdeğer ( $\mu$ ) arttıkça azalması (eğim koşulu) ve soliton gücünün kritik değer ( $P_c$ ) olan 5.85'ten küçük olması gerekir [6].

Güç-özdeğer analizi yapıldıktan sonra NLSM sisteminin ana denklemindeki türevler ( $u_{xx}$  ve  $u_{yy}$ ) sonlu farklar yöntemiyle doğrudan çözülüp solitonlar dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemiyle ilerletilerek soliton kararlılığının sayısal analizi yapılmıştır [2,3].

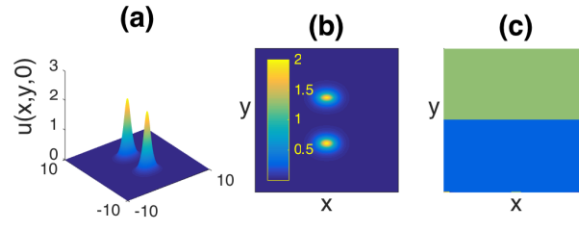
Ele alınan potansiyeller için temel ve dipol solitonlar, kafesin merkezine yakın minimumlarda elde edilmiş ve elde edilen bu solitonların kararlılık analizleri yapılmıştır. Temel solitonlar için sayısal yöntemle elde edilen kararlılık analizlerinin VK kararlılık kriterlerine uygunluğu gösterilmiştir.

### GERÇEL POTANSİYEL SOLİTONLARININ VARLIĞI VE KARARLILIK ANALİZİ

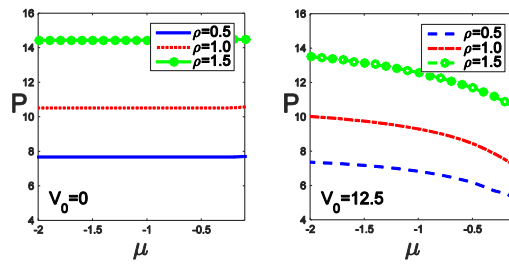
SR yöntemi kullanılarak gerçel periyodik potansiyelin varlığında NLSM yönetici sisteminin temel ve ikili (dipol) çözümleri sırasıyla Şekil 3 ve Şekil 4'te elde edilmiştir.



Şekil 3. Periyodik potansiyelin minimumuna odaklanan temel solitonun (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü.



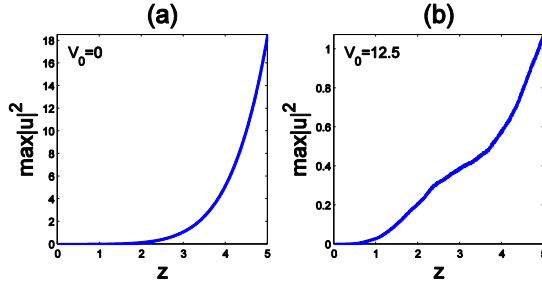
Şekil 4. Periyodik potansiyel için elde edilen ikili (dipol) solitonların (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü; (c) Faz yapısı.



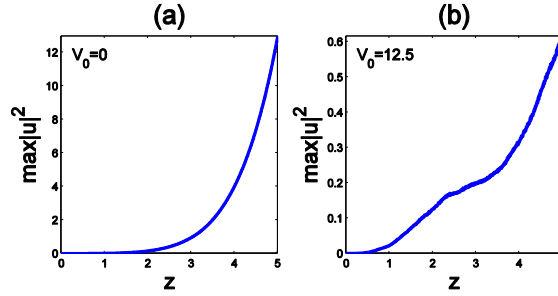
Şekil 5. (a) Potansiyelin olmadığı ( $V_0 = 0$ ); (b) Periyodik potansiyelin varlığında ( $V_0 = 12.5$ ) NLSM sistemi için güç analizi.

Şekil 5'teki güç analizinden görüldüğü gibi potansiyelin olduğu ( $V_0 = 12.5$ ) durumda soliton gücü azalmış ve eğim negatife dönmüştür. VK kararlılık kriterleri göz önüne alındığında periyodik potansiyelin varlığında elde edilen solitonların doğrusal olmayan kararlılığa sahip olacağı öngörülmektedir.

Şekil 3 ve Şekil 4'te elde edilen solitonların doğrusal kararlılıkları sırasıyla Şekil 6 ve Şekil 7'de incelenmiştir.



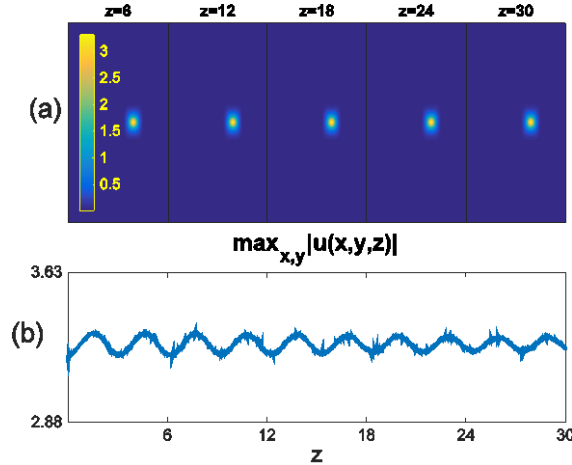
Şekil 6. (a) Potansiyelin olmadığı; (b) Periyodik potansiyelin varlığında temel solitonun en büyük genlik değerinin ilerlemeye bağlı olarak değişimi.



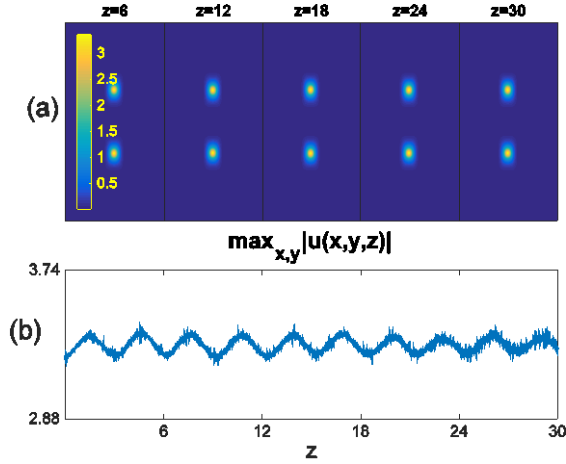
Şekil 7. (a) Potansiyelin olmadığı; (b) Periyodik potansiyelin varlığında ikili (dipol) solitonların en büyük genlik değerinin ilerlemeye bağlı olarak değişimi.

Şekil 6 ve Şekil 7’de görüldüğü gibi hem temel hem ikili solitonlar için ilerleme sonucunda en büyük genlik değeri artmaktadır. Bu artış, incelenen solitonların doğrusal kararsızlığını göstermektedir. Genlik artışı potansiyelin olmadığı durumlar için çok daha hızlı gerçekleşmektedir.

Benzer şekilde elde edilen temel ve ikili solitonlar için doğrusal olmayan kararlılık analizi sırasıyla Şekil 8 ve Şekil 9’da yapılmıştır.



Şekil 8. Periyodik potansiyelin minimumuna odaklanan temel solitonun ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

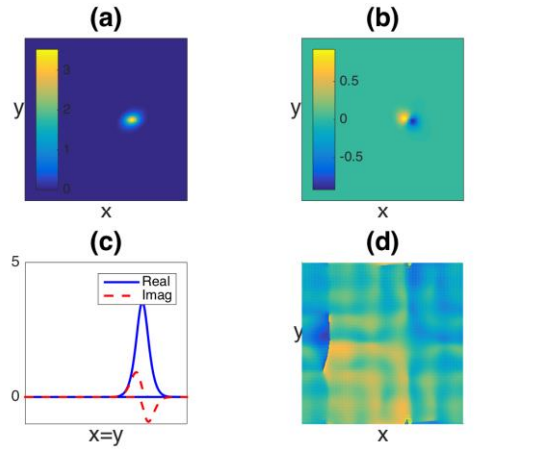


Şekil 9. Periyodik potansiyelin minimumuna odaklanan ikili (dipol) solitonların ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

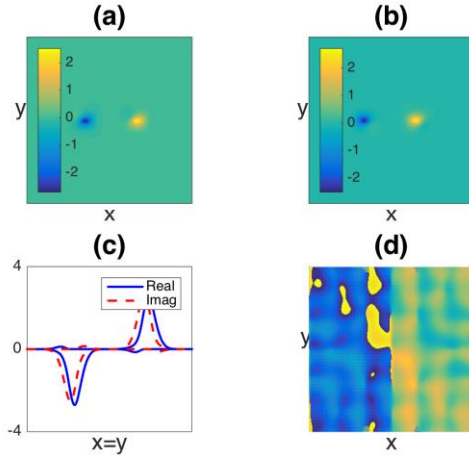
Şekil 8 ve Şekil 9’da görüldüğü gibi temel ve ikili solitonların şekil ve konumları değişmemiş ve en büyük genlik değerleri salınım yapmıştır. Bu durum periyodik potansiyelin varlığında temel ve ikili solitonların doğrusal olmayan kararlılığa sahip olduğunu göstermektedir.

### PT-SİMETRİLİ POTANSİYEL SOLİTONLARININ VARLIĞI VE KARARLILIK ANALİZİ

SR yöntemi kullanılarak PT-simetrik potansiyelin varlığında NLSM yönetici sisteminin temel ve ikili (dipol) çözümleri sırasıyla Şekil 10 ve Şekil 11’de elde edilmiştir. İki durum için de sanal kısmın potansiyel derinliğini  $W_0 = 0.1$  olarak alınmıştır.

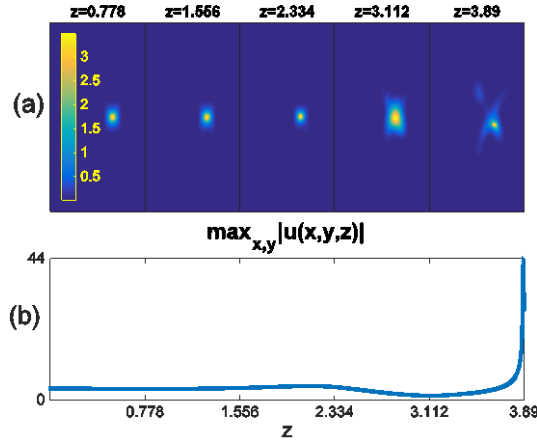


Şekil 10. PT simetrik potansiyelin minimumuna odaklanan temel soliton. (a) Gerçek kısmın üstten görünüşü; (b) Sanal kısmın üstten görünüşü; (c) Gerçek ve sanal kısmın diyagonal kesitleri; (d) Faz yapısı.

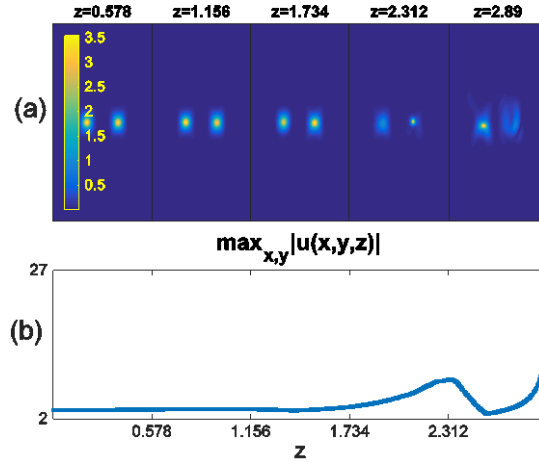


Şekil 11. PT simetrlili potansiyelin minimumuna odaklanan ikili (dipol) solitonlar. (a) Gerçek kısmın üstten görünüşü; (b) Sanal kısmın üstten görünüşü; (c) Gerçek ve sanal kısmın diyagonal kesitleri; (d) Faz yapısı.

Şekil 10 ve Şekil 11’de elde edilen PT-simetrlili potansiyel solitonlarının doğrusal olmayan kararlılık özellikleri sırasıyla Şekil 12 ve Şekil 13’te incelenmiştir.



Şekil 12. PT-simetrlili potansiyelin minimumuna odaklanan temel solitonun ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.



Şekil 13. PT-simetrlili potansiyelin minimumuna odaklanan ikili solitonların ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

Şekil 12 ve Şekil 13'ten görüldüğü gibi, temel ve ikili solitonlar PT-simetrik potansiyel içinde ilerlerken soliton profilleri değişmiş ve en büyük genlik değeri sınırlı ilerleme sonucunda önemli ölçüde artmıştır. Bu durum, PT-simetrik potansiyel içinde elde edilen solitonların kararsızlığını göstermektedir.

Benzer şekilde sanal kısmın derinliği artırılarak ( $W_0=0.3$  için) elde edilen temel ve ikili solitonların kararlılık özellikleri incelendiğinde bu solitonların da kararsız oldukları ve en büyük genlik değerinin daha hızlı şekilde arttığı görülmüştür. Sanal kısmın derinliği arttıkça solitonlar daha hızlı kararsız hale gelmiştir.

### SONUÇLAR

Periyodik potansiyelin gerçel ve kompleks (PT-Simetrik) olduğu durumlar için temel ve dipol NLSM solitonlarının sayısal olarak elde edilebileceği gösterilmiştir.

Potansiyelin sanal kısmının olmaması durumunda ( $W_0=0$ ) doğrusal olmayan kararlılığa sahip NLSM solitonları elde edilmiş fakat PT-Simetrisin olduğu durumlar için kararlı soliton yapısı elde edilememiştir. Ayrıca, potansiyel içinde sanal kısmın ağırlığının artırılmasının kararlılığı olumsuz etkilediği ve çökme mesafesini kısalttığı görülmüştür.

Potansiyelin hem gerçel hem kompleks olduğu durum için elde edilen solitonların doğrusal olarak kararsız oldukları görülmüştür.

NLSM sistemine potansiyel eklenince soliton gücü azalmıştır. Kararlılık analizlerinden elde edilen sayısal sonuçlar gerçel potansiyel için VK kararlılık kriterleri ile uyum içindedir.

### KAYNAKLAR

- [1] M.J. Ablowitz, Gino Biondini, and Steve Blair, Nonlinear Schrödinger equations with mean terms in non-resonant multidimensional quadratic materials, *Phys. Rev. E.* 63 (2001) 046605. doi:10.1103/PhysRevE.63.046605.
- [2] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. İlan, Vortex and dipole solitons in complex two-dimensional nonlinear lattices, *Physical Review A.* 86 (2012) 033804. doi:10.1103/PhysRevA.86.033804.
- [3] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. İlan, Band gap formation and fundamental solitons in complex 2D nonlinear lattices, *Physical Review A.* 81 (2010) 033834. doi:10.1103/PhysRevA.81.033834.
- [4] C.M. Bender and S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT-Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 5243-5246. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.5243.
- [5] M.J. Ablowitz, and Z.H. Musslimani, Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems, *Opt. Lett.* 30 (2005), 2140-2142. doi:10.1364/OL.30.002140.
- [6] M. Vakhitov and A. Kolokolov, Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation, *Radio Phys. Quant. Elec.* 16 (1973) 783. doi:10.1007/BF01031343.