



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARDA KAYMA KİLİTLENMESİ PROBLEMİ

Yurdakul Aygörmez<sup>1</sup>, Tülay Aksu Özkul<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa, İstanbul

<sup>2</sup> İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Maslak, İstanbul

### ABSTRACT

In this study, the strain energy expression was obtained by using the Mindlin plate theory which takes into account the effects resulting from the shear deformation in the thickness direction. Using this phrase, three noded triangular finite element, four noded quadrilateral finite element and eight noded quadrilateral finite element models have been developed. To compute the element stiffness matrix, shape functions of these elements are used. In order to test shear locking, the obtained elements are analyzed in both thin and moderately thick plates. In order to avoid shear locking phenomenon that appears in case of thin plate applications, discrete shear gap technique and reduced integration technique are employed for the evaluation of the stiffness matrices by using the principle of minimum potential energy.

### ÖZET

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkilerin göz önüne alındığı Mindlin plak teorisi kullanılarak plaklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Elde edilen bu ifade yardımıyla yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparametrik üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört ve sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. Eleman rijitlik matrisini elde etmek için bu elemanların biçim fonksiyonları kullanılmıştır. Kayma kilitlemesini test etmek için, elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda incelenmiştir. Kayma kilitlemesinin meydana geldiği durumlarda integrasyon adımı azaltılması ve ayrık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır.

### GİRİŞ

Kalın sayılabilecek plaklar için, plak diferansiyel denkleminin çözümü, trigonometrik hiperbolik seriler yardımı ile yükler ve yer değiştirmeler seriye açılarak sağlatılmaya çalışılır [1-3]. Teoride karşılaşılan güçlüklerin aşılması için kalın plakların analizi, son yıllarda kullanımı daha yaygınlaşan sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmaya başlanmıştır [4-11]. Ferreira, Mindlin plakların statik, dinamik ve burkulma analizi için Matlab programını kullanmıştır [12]. Khennane, kitabında sonlu eleman yöntemi için teorik bilgi vermiş, sonlu eleman yöntemi için Matlab ve Abaqus programlarını kullanarak analizler yapmıştır [13]. Bletzinger, Bischoff ve Ramm tarafından yapılan çalışmada ayrık kayma aralığı yönteminin teorik detayları verilmiş ve bu yöntemi kayma kilitlemesiz üçgen kabuk elemanlarda kullanmışlardır [14]. Nguyen-Thoi, Liu, Nguyen-Xuan ve Thai-Hoang yaptıkları çalışmada kayma kilitlemesi problemini önlemek için ayrık kayma aralığı yöntemini kullanmışlardır

[15]. Bu yöntem için bağ matrisleri yeniden tanımlanmış, buna göre sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkilerin göz önüne alındığı Mindlin plak teorisi kullanılarak plaklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Elde edilen şekil değiştirme enerjisi ifadesi yardımıyla yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparametrik dört ve sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. Ayrıca üç noktalı bir üçgen sonlu eleman modeli ile de çözüm yapılarak üç elemanın yaklaşımına bakılmıştır. Eleman rijitlik matrisini elde etmek için bu elemanların biçim fonksiyonları ve türevleri kullanılmıştır. Çözümleme için sonlu eleman programı hazırlanırken, Ferreira'nın oluşturduğu Matlab programı kullanılmıştır. Ferreira'nın programı dört ve sekiz noktalı dörtgen elemanlar ile üç noktalı üçgen eleman için yeniden düzenlenmiş, ayrıca ayırık kayma aralığı yöntemi için üç noktalı eleman kullanılarak bağ matrisleri yeniden formüle edilmiştir. Böylece farklı kalınlıklara, sınır koşullarına, yüklemelere ve geometrilere sahip plaklar için hazırlanan program kullanılarak yer değiştirmeler ve iç kuvvetler elde edilmiş ve üç elemanın yaklaşımına bakılmıştır. Ayrıca elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda denenerek kayma kilitlenmesi olayının meydana gelip gelmediği incelenmiştir. Kayma kilitlenmesinin meydana geldiği durumlarda integrasyon adımı azaltılması ve ayırık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır. Ayırık kayma aralığı yöntemi hem kalın hem de ince plaklarda üçgen elemanlar kullanıldığında oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Bu nedenle özellikle ayırık kayma aralığı yönteminin yaklaşımını görmek amacı ile üç noktalı üçgen sonlu eleman modeli kullanılmıştır.

## MİNDLİN PLAKLARIN ELEMAN FORMÜLASYONU

### 2.1. Temel Bağlıntılar

Mindlin plaklarda karakteristik bir noktada yer değiştirme bileşenleri U, V, W ile gösterilir.

$$U(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad V(x, y, z) = -z\theta_y(x, y), \quad W(x, y, z) = w(x, y) \quad (1)$$

Burada U, V ve W sırasıyla plağın X, Y ve Z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmelerini ifade etmektedir.  $\theta_x$  Y eksenini etrafındaki dönmeyi,  $\theta_y$  X eksenini etrafındaki dönmeyi, w ise yer değiştirmeyi tanımlamaktadır. Burada,  $\theta$  vektörü:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır.  $\partial w / \partial x$  ve  $\partial w / \partial y$  terimleri ince plaktaki eğilme dönme miktarlarını,  $\phi_x$  ve  $\phi_y$  terimleri de x ve y doğrultusundaki ortalama kayma şekil değiştirmelerini göstermektedir.

Sonlu elemanda her bir düğüm noktasında serbestlikler, w yüzeye dik doğrultuda yer değiştirme bileşeni ile  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  dönme bileşenleridir. Elemanın uç serbestlikleri matris formunda:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \{\delta^n\} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

olur. Burada  $n$  eleman düğüm noktası sayısını göstermektedir.  $\{\delta^i\}$  vektörü,  $i$  düğüm noktasının serbestliklerinden oluşmaktadır. Ve  $\{\delta^i\}$  vektörü:

$$\{\delta^i\} = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

şekindedir. Her düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi olmak üzere elemanın yer değiştirme fonksiyonu:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N]_{(3 \times n)} \{\delta\}_{(n \times 1)}^e \quad (5)$$

Burada  $[N^i]$   $3 \times 3$  boyutunda bir matristir.  $[N^i]$  matrisinin herhangi bir kolonunu oluşturan satırlar, o kolona ait serbestliğin birim, diğer serbestliklerin sıfır olması durumunda  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  yer değiştirmelerini veren şekil fonksiyonlarıdır.

### Yer Değiştirmeler-Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağlılıklar

U, V, W yer değiştirme ifadelerine göre plağın birim şekil değiştirmeleri:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \end{aligned} \quad (6)$$

şeklinde elde edilebilir.

Şekil değiştirme bağıntıları matris formunda yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i = [B]^i \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}^i \quad (7)$$

elde edilir. Burada:

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{yi} \quad (8)$$

bağıntılarına göre yer değiştirmeler şekil fonksiyonlarına bağlı yazılmaktadır.  $[B]$  matrisi şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı veren matristir.

Burada  $[B]$  matrisi:

$$[B] = [\partial][N_i] \quad (9)$$

şekindedir.  $[B]$  matrisi, eğilme terimlerinden gelen  $[B]_b^i$  matrisi ve kayma terimlerinden gelen  $[B]_s^i$  matrisi olmak üzere iki kısımdan oluşur.  $[B]_b^i$  matrisi:

$$[B]_b^i = \begin{bmatrix} 0 & -N_{ix} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{iy} \\ 0 & -N_{iy} & -N_{ix} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (10)$$

şeklindedir.  $[B]_b^i$   $3 \times 3$  boyutundadır. Benzer biçimde  $[B]_s^i$  matrisi:

$$[B]_s^i = \begin{bmatrix} N_{ix} & -N_i & 0 \\ N_{iy} & 0 & -N_i \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad (11)$$

şeklindedir.

### Gerilmeler-Şekil Değişiklikler Arasındaki Bağlılıklar

Bilindiği gibi düğüm noktası  $i$ ' ye ait gerilme vektörü:

$$\{\sigma^i\}^T = \{\sigma_x^i \ \sigma_y^i \ \tau_{xy}^i \ \tau_{xz}^i \ \tau_{yz}^i\} \quad (12)$$

şeklinde elde edilmektedir. İç kuvvetleri matris formunda gösterirsek, eğilme terimlerini içeren  $[M]$  matrisi:

$$M_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_b [B]_b \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ve kesme kuvvetlerini içeren  $[Q]$  matrisi:

$$Q_i = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = [D]_s [B]_s \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

olur. Elastisite matrisi  $[D]$ , eğilme terimlerinden gelen katkı  $[D]_b$  ve kayma terimlerinden gelen katkı  $[D]_s$  ile gösterilerek elde edilir:

$$[D] = [D]_b + [D]_s \quad (15)$$

$[D]_b$  matrisi:

$$[D]_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (16)$$

şeklinde olur. Benzer şekilde  $[D]_s$  matrisi:

$$[D]_s = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (17)$$

olur.

### Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

Eleman rijitlik matrisinin elde edilmesinde eğilme ve kayma terimlerinin etkileri iki ayrı kısımda incelenmiştir.  $b$  alt indisi eğilme etkilerini,  $s$  alt indisi ise kayma etkilerini sembolize etmektedir. Bu durumda  $[K]^e$  eleman rijitlik matrisi:

$$[K]^e = [K]_b^e + [K]_s^e \quad (18)$$

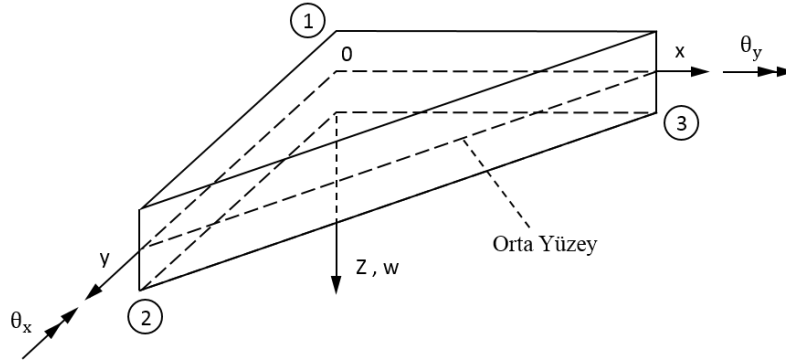
şeklindedir. Eğilme ve kayma rijitlik matrisleri:

$$[K]_b^e = \int_A [B]_b^T [D]_b [B]_b dA, \quad [K]_s^e = \int_A [B]_s^T [D]_s [B]_s dA \quad (19)$$

ifadeleri ile hesaplanmaktadır.

## KULLANILAN SONLU ELEMAN MODELLERİ

### Noktalı Sonlu Elemanın Şekil Fonksiyonları



Şekil 1: 3 noktalı üçgen sonlu eleman.

3 noktalı üçgen sonlu elemanın (Şekil 1) biçim fonksiyonları:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (20)$$

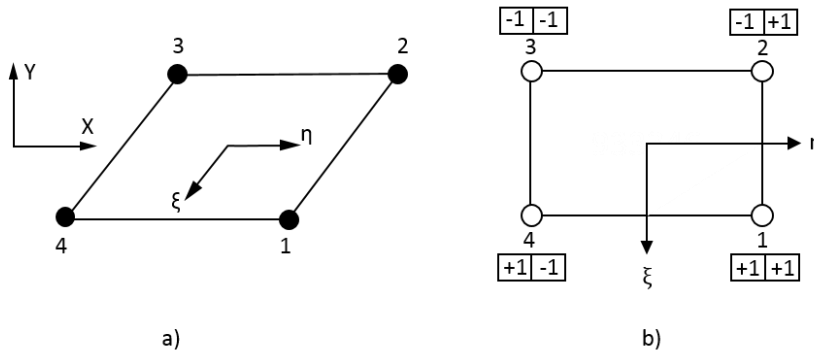
şeklindedir.

### Noktalı Sonlu Elemanın Şekil Fonksiyonları

4 noktalı dörtgen sonlu elemanın (Şekil 2) biçim fonksiyonları:

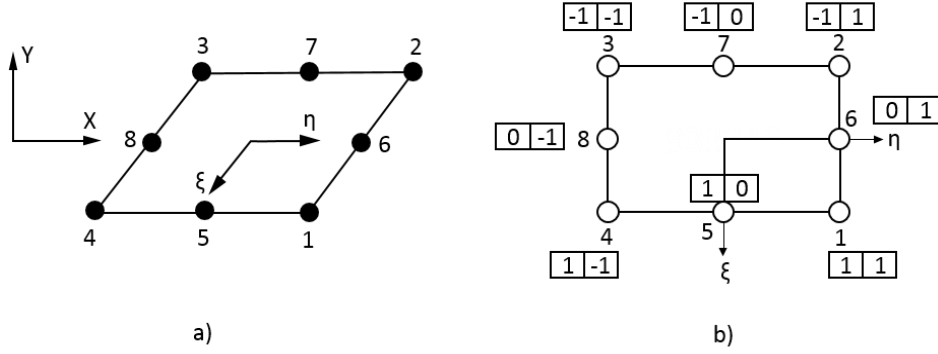
$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned} \quad (21)$$

olarak bilinmektedir. Şekil (2 b)'deki kutular içindeki sayılar eleman noktalarının yerel koordinatlarıdır.



Şekil 2: İzoparametrik 4 noktalı dörtgen sonlu eleman.

### Noktalı Sonlu Elemanın Şekil Fonksiyonları



Şekil 3: İzoparametrik 8 noktalı dörtgen sonlu eleman.

8 noktalı dörtgen sonlu elemanın (Şekil 3) şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), & N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1), & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \quad (22)$$

### KAYMA KİLİTLENMESİNİN ÖNLENMESİ

Kaymadan gelen terimler plağın kalın olması durumunda ihmal edilemeyecek mertebede iken ince olması durumunda eğilme terimleri yanında bu terimlerin etkisi çok küçüktür. Bu yüzden kalın plaklara uygulanan bu tür genel sonlu elemanların ince plaklara uygulanması durumunda kayma kilitlemesi denilen problemle karşılaşılır. Zira ince plakta kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinden gelen rijitlik matrisi terimlerinin diğer terimlere göre daha büyük değerler alması çözümün hassasiyetini bozup bu tür zorluklara yol açmaktadır. Çalışmada kayma kilitlemesinin önlenmesi için integrasyon adımının azaltılması yöntemi ve ayrık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır.

#### İntegrasyon Adımının Azaltılması

Kayma kilitlemesi problemi sayısal integrasyon adımı azaltılarak basit bir biçimde çözülmektedir. Zira integralde az terim almak serbestlik derecesi sayısını artırarak kayma şekil değiştirmelerini sıfır ve potansiyel enerjiyi minimum yapacak düzeye çıkarır. Bu da kayma terimlerinden gelen kilitlemeyi kaldırır. Bunun için sadece kayma etkilerini içeren ifadelerin hesabında integrasyon adımının azaltılması işlemi uygulanmaktadır. Böylece integrasyon adımının azaltılması ile elde edilen kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisi gerçek haline daha yakın terimler içerir. Burada rijitlik matrisi ifadeleri oluşturulurken eğilme ve kayma etkileri ayrı düşünülmelidir.

#### Ayrık Kayma Aralığı Yönteminde Üçgen Sonlu Eleman

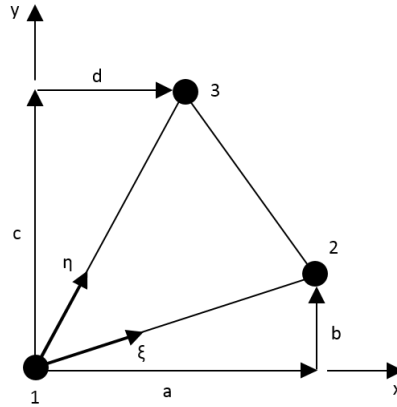
Bu bölümde ayrık kayma aralığı yöntemini ve bu yöntemde kullanılan biçim fonksiyonları önceki bölümde verilen üçgen elemanı tanımlayacağız. Ayrık kayma aralığı yöntemi hem kalın hem de ince plaklarda üçgen elemanlar kullanıldığında oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Mindlin plakların üçgen sonlu elemanlar ile çözümünde yer değiştirmeleri,

$$f^i = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x) \end{bmatrix} \delta^i \quad (23)$$

şeklindedir. Burada:

$N_i(x)$  şekil fonksiyonunu,  $\delta^i = [w_i \theta_{xi} \theta_{yi}]^T$  düğüm noktası serbestliklerini göstermektedir.

Bu yöntemde  $[B]$  matrisi şekil fonksiyonlarının türevlerine bağlı olarak yazılmakta ve sadece sabitlerden oluştuğu görülmektedir. Bu durumda  $[B]$  matrisi yine eğilme ve kayma terimlerinden oluşmak üzere ikiye ayrılır. Üç noktalı üçgen elemanın koordinatları şekilde gösterildiği gibidir (Şekil 4).



Şekil 4: Üç noktalı üçgen eleman ve genel koordinatlar.

Şekil 4'de,  $a = x_2 - x_1$ ,  $b = y_2 - y_1$ ,  $c = y_3 - y_1$  ve  $d = x_3 - x_1$  şeklindedir.

Bu tez kapsamında, ayırık kayma aralığı yönteminin uygulanması için üç noktalı sonlu eleman modellerinde tanımlanan bağ matrisleri kullanılmıştır. Ayırık kayma aralığı yöntemi için tanımlanan bağ matrisleri  $[B]_b$  ve  $[B]_s$  Nguyen-Xuan ve diğ. (2012) yayınından alınmıştır.

Bunlara göre  $[B]_b$  matrisi:

$$[B]_b = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} 0 & b-c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & d-a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & a \\ 0 & d-a & b-c & 0 & -d & c & 0 & a & -b \end{bmatrix} \quad (24)$$

elde edilir. Burada  $A^e$  üçgen elemanın alanıdır. Benzer şekilde kayma şekil değiştirmeleri yeniden düzenlenebilir.  $[B]_s$  matrisi:

$$[B]_s = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b-c & A^e & 0 & c & \frac{ac}{2} & \frac{bc}{2} & -b & -\frac{bd}{2} & -\frac{bc}{2} \\ d-a & 0 & A^e & -d & -\frac{ad}{2} & -\frac{bd}{2} & a & \frac{ad}{2} & \frac{ac}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

olarak elde edilir. Bunlara göre elemanın eğilme ve kayma şekil değiştirmesi yeniden elde edilir:

$$\kappa = [B]_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \gamma = [B]_s \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

İfadeler yukarıdaki gibi alınırsa ayırık kayma aralığı yöntemine göre düzenlenmiş  $[K]$  sistem rijitlik matrisi:

$$[K]^{DSG3} = \sum_{e=1}^{N_e} [K]^{eDSG3} \quad (27)$$

şeklinde olur. Eleman rijitlik matrisi ise:

$$[K]^{eDSG3} = \int_A [B]_b^T [D]_b [B]_b dA + \int_A [B]_s^T [D]_s [B]_s dA = [B]_b^T [D]_b [B]_b A^e + [B]_s^T [D]_s [B]_s A^e \quad (28)$$

olarak elde edilir.

## SAYISAL ÇÖZÜMLER

### Örnek 1: Düzgün Yayılı Yük Etkisi Altında Ankastre Mesnetli Kare Plak

Bu örnekte  $E=10920 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.30$  ve  $q=1 \text{ kN/m}^2$  olarak alınmıştır. 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla plak kalınlığı  $h=0.1 \text{ m}$  ve  $h=0.01 \text{ m}$  alınarak çözümler yapılmıştır. Problemden simetri dikkate alınmadan tüm sistemde sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Dörtgen elemanlar için 400 elemanlı karelajlar oluşturulmuştur. Kayma kilitlenmesi problemi için ise söz konusu üçgen ve dörtgen elemanlarla farklı kalınlık/açıklık oranlarıyla çözümler yapılmıştır. Bulunan sonuçlarda ( $h/a < 0.05$ ) 'den itibaren kayma kilitlenmesi gözlenmiştir. Kayma kilitlenmesi problemini gidermek için dörtgen sonlu elemanlarda tam, azaltılmış, seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemleri kullanılırken, 3 noktalı üçgen sonlu elemanda bu yöntemin yanı sıra ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. Çizelgelerde büyüklükler boyutsuz olarak verilmiştir. Bunun için çökmeler  $wD/qa^4$  cinsinden tanımlanmıştır.

**Çizelge 1:** Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta  $h/a=0.1$  için plak ortası çökmesi ( $wD/qa^4$ ).

Eleman ağı	Analitik	[11]	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	8 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	3 Noktalı Üçgen Eleman	Yaklaşım
20x20	0.001499	0.001521	0.001501	0.13%	0.001499	0.0%	0.001501	0.13%

**Çizelge 2:** Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta  $h/a=0.01$  için plak ortası çökmesi ( $wD/qa^4$ ).

Eleman ağı	Analitik	[11]	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	8 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	3 Noktalı Üçgen Eleman	Yaklaşım
20x20	0.001265	0.001293	0.001261	-0.32%	0.001266	0.08%	0.001263	-0.16%

Çizelge 1 ve Çizelge 2'ye bakıldığında 20x20 karelaj için analitik çözüme en yakın değer hem  $h/a=0.1$  hem de  $h/a=0.01$ 'de 8 noktalı dörtgen sonlu elemandadır. Kayma kilitlenmesi probleminin çözümünde kullanılan yaklaşımların etkisini görmek amacıyla farklı kalınlık/açıklık oranları için 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar Çizelge 3'te verilmiştir. Dörtgen elemanlarla çözümde tam integrasyon, azaltılmış integrasyon ve seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Üçgen elemanla yapılan çözümlerde bu yöntemlerin yanı sıra üçgen elemanlarda iyi sonuç veren ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. Çizelgede analitik çözüme en yakın değerler koyu punto ile yazılmıştır. Çizelge 3'e baktığımızda 3 noktalı üçgen elemanda analitik çözüme en yakın değerler ayrık kayma aralığı yönteminde verilmiştir. 4 noktalı dörtgen elemanda  $h/a < 0.05$  oranı için azaltılmış ve seçilerek azaltılmış integrasyon değerleri



daha yakın sonuçlar vermiştir. 8 noktalı dörtgen elemanda ise ( $h/a < 0.05$ ) durumunda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar diğer yöntemlere göre analitik sonuca daha yakın sonuçlar vermiştir.

**Çizelge 3: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.**

h/a	Analitik	3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
		T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.001263	0.000089	0.001250	0.001252	<b>0.001260</b>	0.000101	0.001251	<b>0.001259</b>	0.001206	0.001258	<b>0.001263</b>
0.005	0.001264	0.000106	0.001255	0.001254	<b>0.001261</b>	0.000125	0.001253	<b>0.001262</b>	0.001241	0.001260	<b>0.001265</b>
0.01	0.001265	0.000149	0.001258	0.001255	<b>0.001263</b>	0.000159	<b>0.001261</b>	0.001261	0.001246	0.001253	<b>0.001266</b>
0.02	0.001270	0.000437	0.001262	0.001261	<b>0.001272</b>	0.000545	<b>0.001270</b>	0.001273	0.001261	0.001264	<b>0.001269</b>
0.03	0.001282	0.000693	0.001268	0.001274	<b>0.001280</b>	0.000789	<b>0.001281</b>	0.001286	0.001270	0.001273	<b>0.001283</b>
0.04	0.001298	0.000998	0.001286	0.001290	<b>0.001295</b>	0.001007	<b>0.001298</b>	0.001303	0.001283	0.001291	<b>0.001298</b>
0.05	0.001304	0.001193	0.001294	0.001291	<b>0.001301</b>	0.001281	0.001328	<b>0.001325</b>	0.001297	<b>0.001302</b>	0.001310
0.06	0.001341	0.001225	0.001331	0.001328	<b>0.001337</b>	0.001304	0.001359	<b>0.001352</b>	0.001333	<b>0.001339</b>	0.001347
0.07	0.001377	0.001263	0.001369	0.001371	<b>0.001379</b>	0.001341	<b>0.001379</b>	0.001383	0.001375	<b>0.001377</b>	0.001378
0.08	0.001415	0.001302	0.001405	0.001403	<b>0.001410</b>	0.001386	0.001408	<b>0.001419</b>	0.001413	<b>0.001414</b>	0.001417
0.09	0.001456	0.001349	0.001442	0.001446	<b>0.001454</b>	0.001419	0.001462	<b>0.001459</b>	<b>0.001457</b>	0.001459	0.001459
0.1	0.001499	0.001402	0.001491	0.001490	<b>0.001501</b>	0.001449	<b>0.001501</b>	0.001503	0.001498	<b>0.001499</b>	0.001500
0.2	0.002167	0.002103	0.002158	0.002158	<b>0.002169</b>	0.002133	<b>0.002169</b>	0.002172	<b>0.002167</b>	0.002169	0.002169

T: Tam İntegrasyon, A: Azaltılmış İntegrasyon, S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı

**Örnek 2: Düzgün Yayılı Yük Etkisi Altında Basit Mesnetli Kare Plak**

Aynı plak düzgün yayılı yük etkisi altında dört tarafı basit mesnetli olarak incelenmiştir. Örnek 1’de olduğu gibi aynı sonlu eleman ağları kullanılarak plağın ince ve kalın olduğu durumlarda plak ortasında çökmeler bulunmuştur.

**Çizelge 4: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta  $h/a=0.1$  için plak ortası çökmesi ( $wD/qa^4$ ).**

Eleman ağı	Analitik	[11]	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	8 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	3 Noktalı Üçgen Eleman	Yaklaşım
20x20	0.004273	0.004242	0.004272	-0.02%	0.004273	0.0%	0.004269	-0.09%

**Çizelge 5: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta  $h/a=0.01$  için plak ortası çökmesi ( $wD/qa^4$ ).**

Eleman ağı	Analitik	[11]	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	8 Noktalı Dörtgen Eleman	Yaklaşım	3 Noktalı Üçgen Eleman	Yaklaşım
20x20	0.004062	0.004045	0.004062	0.0%	0.004062	0.0%	0.004061	-0.02%

Çizelge 4 ve Çizelge 5’teki sonuçlara göre analitik sonuca en yakın değerler 8 noktalı dörtgen sonlu elemanla bulunmuştur. Çizelge 6’da dört kenarı basit mesnetli kare plak için kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesine ait 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu

elemanlarla 20x20 karelede elde edilen sonuçlar verilmiştir. Çizelge 6'ya göre 3 noktalı üçgen sonlu eleman basit mesnetli kare plak için en uygun sonuçları ayırık kayma aralığı yönteminde vermiştir. Sadece  $h/a=0.1$  için seçilerek azaltılmış integrasyon adımı bulunan sonuç analitik sonuca daha yakınsaktır. Ama bu fark çok belirgin değildir. 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi sonuçlarının yakınsaması daha iyidir. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda tam integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar ile seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar dengeli bir dağılım göstermiştir.

**Çizelge 6:** Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.

h/a	Analitik	3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
		T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.004059	0.000956	0.004048	0.004051	<b>0.004057</b>	0.001021	0.004052	<b>0.004056</b>	0.004005	0.004055	<b>0.004060</b>
0.005	0.004060	0.001556	0.004052	0.004057	<b>0.004059</b>	0.001689	0.004055	<b>0.004058</b>	0.004024	0.004056	<b>0.004061</b>
0.01	0.004062	0.002203	0.004060	0.004068	<b>0.004061</b>	0.002265	0.004054	<b>0.004062</b>	<b>0.004062</b>	0.004069	0.004073
0.02	0.004062	0.002758	0.004039	0.004058	<b>0.004064</b>	0.002804	<b>0.004058</b>	0.004068	0.004048	0.004056	<b>0.004060</b>
0.03	0.004074	0.003091	0.004015	0.004058	<b>0.004070</b>	0.003372	0.004066	<b>0.004078</b>	0.004055	0.004064	<b>0.004071</b>
0.04	0.004096	0.003392	0.004058	0.004083	<b>0.004089</b>	0.003708	0.004082	<b>0.004093</b>	0.004088	<b>0.004095</b>	0.004099
0.05	0.004107	0.004020	0.004089	0.004095	<b>0.004101</b>	0.004049	0.004101	<b>0.004112</b>	0.004083	0.004099	<b>0.004109</b>
0.06	0.004133	0.004085	0.004128	0.004139	<b>0.004135</b>	0.004087	<b>0.004132</b>	0.004135	0.004102	0.004125	<b>0.004134</b>
0.07	0.004159	0.004102	0.004148	0.004146	<b>0.004166</b>	0.004129	0.004151	<b>0.004163</b>	<b>0.004158</b>	0.004166	0.004172
0.08	0.004199	0.004185	0.004215	0.004222	<b>0.004205</b>	0.004160	0.004186	<b>0.004195</b>	<b>0.004198</b>	0.004205	0.004211
0.09	0.004232	0.004208	0.004240	0.004245	<b>0.004229</b>	0.004202	0.004238	<b>0.004231</b>	<b>0.004232</b>	0.004236	0.004238
0.1	0.004273	0.004232	0.004261	<b>0.004269</b>	0.004279	<b>0.004272</b>	0.004289	0.004271	<b>0.004273</b>	0.004279	0.004285
0.2	0.004906	0.004884	0.004913	0.004918	<b>0.004911</b>	0.004889	0.004918	<b>0.004905</b>	0.004897	0.004899	<b>0.004906</b>

T: Tam İntegrasyon, A: Azaltılmış İntegrasyon, S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon,

A.K.A.: Ayırık Kayma Aralığı

## SONUÇLAR

Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkilerin göz önüne alındığı Mindlin plak teorisi kullanılarak yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparametrik üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört ve sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. Elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda denenerek kayma kilitlenmesi olayının meydana gelip gelmediği incelenmiştir. Kayma kilitlenmesinin meydana geldiği durumlarda integrasyon adımı azaltılması ve ayırık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır. Ayırık kayma aralığı yöntemi hem kalın hem de ince plaklarda üçgen elemanlar kullanıldığında oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Bu nedenle ayırık kayma aralığı yönteminin yaklaşımını görmek amacı ile yukarıda detayları verilen üç noktalı üçgen sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Söz konusu elemanların doğruluğunu ve yakınsaklığını belirlemek amacı ile bazı örnekler alınmış ve elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Farklı kalınlık oranları için elde edilen sonuçlardan hareketle sonlu elemanların birbirine göre yaklaşımı belirlenmeye çalışılmıştır. Kayma kilitlenmesi olayının incelenmesi için kare plaklar, düzgün yayılı yük altında 3 noktalı üçgen, 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar kullanılarak  $h/a=0.001$ 'den  $h/a=0.2$ 'ye kadar değişen kalınlıklarda çözülmüştür. Her çözüm tam integrasyon, azaltılmış integrasyon ve seçilerek azaltılmış integrasyon başlıkları altında hesaplanmıştır. Ayrıca 3 noktalı üçgen sonlu

elemanda kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesi için üçgen sonlu elemanlarda daha iyi sonuç veren ayırık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır.

Sonuç olarak; bu çalışmada geliştirilen 9, 12 ve 24 serbestlik dereceli izoparametrik sonlu elemanların, gerek kalın sayılabilecek plak uygulamalarında, gerekse ince plaklarda, mühendislik analizleri bakımından yeterli yaklaşıklıkta çözümler verdiği görülmüştür. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümler ve literatürdeki başka sonlu eleman sonuçlarıyla karşılaştırılarak bu çalışmada yapılan formülasyonun ve hazırlanan programın güvenle kullanılabilceği sonucuna varılmıştır.

### KAYNAKLAR

- [1] Timoshenko, S., 1964. Plak ve kabuklar teorisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [2] Berktaş İ., 1992. Plak teorisi ve uygulamaları : küçük sehimli ince plaklar, Yıldız Üniversitesi, İstanbul.
- [3] Ventsel, E., Krauthammer, T., 2001. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications, Marcel Dekker, INC., New York.
- [4] Desai, C. S. and Abel, J. F., 1972. Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [5] Kardestuncer, H., 1987. Finite element handbook, McGraw-Hill, New York.
- [6] Zienkiewicz, O. C., 1971. The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, London.
- [7] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. The finite element method-Volume 2, McGraw-Hill, London.
- [8] Aksu, T., 1993. Genel biçimli kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [9] Özkul, T. A., Türe, Ü., 2004. The transition from thin plates to moderately thick plates by using finite element analysis and the shear locking problem, Thin-Walled Structures, 42, 1405-1430.
- [10] Gören, F., 2006. Kalın plaklar için üç boyutlu sonlu eleman modelleri, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [11] Long YQ, Xi F (1992). A universal method for including shear deformation in the thin plate elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 34: 171-177.
- [12] Ferreira, A. J. M., 2009. MATLAB Codes for Finite Element Analysis-Solids and Structures, Springer, Porto.
- [13] Khennane, A., 2013. Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and ABAQUS, CRC Press, London.
- [14] Bletzinger, K.-U., Bischoff, M. and Ramm, E., 1998. A Unified Approach For Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements, Computational Mechanics, Barcelona, Spain.
- [15] Nguyen-Xuan, H., Liu, G. R., Thai-Hoang, C. and Nguyen-Thoi, T., 2010. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 199, 471–489.