



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

DÜZLEME DİK DÖNME SERBESTLİĞİNE HAİZ YENİ BİR DÜZLEM GERİLME SONLU ELEMANI

Murat Yılmaz¹

¹İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

A simple formulation of a four node membrane finite element with drilling degrees of freedom is presented. The drilling degrees of freedom refer to the incorporation of a degree of freedom that represents the rotation in the plane of the element which is inherently essential when a connection with frame element with rotational degree of freedoms is in question to satisfy the rotational continuity. In this study, rotational freedoms are directly incorporated within the displacement field through the superposition of a non-rotational displacement field and a proper rotation-originated displacement field. A cantilever wall example is presented and compared with well-known trusted commercial software which yielded a promise for future work in terms of element performance.

ÖZET

Bu çalışmada düzlemine dik dönme serbestliklerine haiz yeni bir düzlem gerilme sonlu eleman modeli sunulmaktadır. Düzleme dik dönme serbestlikleri kiriş-perde birleşimlerinin modellenmesi söz konusu olduğunda gündeme gelmektedir. Bu çalışmada düzlem yer değiştirme alanı, biri salt dönme içeren diğeri ise pür deplasman alanlarında oluşan iki farklı yer değiştirme alanının süperpozisyonu olarak tarif edilerek dönme terimleri bağımsız değişken olarak ortaya çıkartılmıştır. Sayısal örnek olarak konsol perdelerde kayma etkisi incelenmiş ve sonuçlar literatürde kullanılan ve güvenilen sonlu elemanlar hazır programları ile test edilerek söz konusu düzlem gerilme elemanının performansı ortaya konulmuştur.

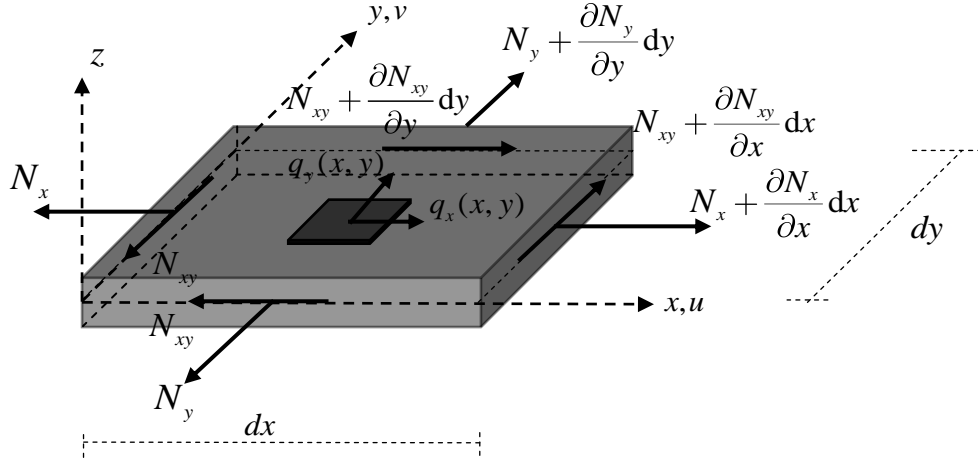
GİRİŞ

Kabuk sonlu elemanlarının, plak elemanı ile klasik membran elemanının birleşimi ile oluşturulduğu durumlarda, eleman düzlemine dik serbestlik söz konusu olmadığı üzere bir takım sayısal problemler belirmektedir [1]. Çeşitli sonlu eleman tiplerinin aynı anda modele mevcut olması durumunda, elemanların aralarındaki süreklilik koşullarının ve bunun doğal sonucu olarak kuvvet aktarımlarının tam olarak sağlanabilmesi için, üç boyutlu halde altı adet (üç öteleme, üç dönme) serbestlik tanımının tüm elemanlar için var olması gerekliliği aşıkardır [2]. Bu bağlamda membran elemanların nod başına iki den fazla serbestlik içerecek şekilde formüle edilme çabaları popülerlik kazanmıştır. Düzlemine dik dönme serbestliğinin ilk olarak öne sürülmesi Tocher 1967[3] ile sunulmuş ve takip eden çalışmalarda [4-7] çeşitli tekniklerle başarıyla uygulanmıştır. Literatürde gerçekleştirilen en önemli çalışmalardan birisi de Felippa'nın [8] ANDES elemanı olmuştur. Klasik yöntemler yer-değiştirme alanından türetilen sanal dönme bileşenlerinden, eğilme enerjisi dengelemesine dayanan çok parametrelili

formülasyonlara kadar oldukça çeşitlilik göstermektedir. Bu çalışmada, bilindiği kadarıyla yeni bir yaklaşım olarak, nodal öteleme ve dönme kaynaklı yer değiştirme alanları ayrı ayrı ele alınarak gerçek dönme alanını tespitte yönelik bir formülasyon geliştirilmiştir. Bu sayede elemanın nodal ötelemelerinden kaynaklı muhtemel kayma enerjisi etkisi azaltılmaya çalışılmıştır.

MEMBRAN DENGE DENKLEMİ VE BÜNYE BAĞINTILARI

Şekil 1 de klasik membran denge denklemlerine esas teşkil eden diferansiyel eleman verilmiştir. N , eleman birim kesit boyuna etki eden normal kuvveti temsil etmek üzere, z eksenini etrafında moment denge koşulu itibariyle $N_{xy} = N_{yx}$ olacağı açıktır.



Şekil 1. Diferansiyel membran elemanı ve dengeye esas iç kuvvetler

Elemanda x ve y doğrultularında denge denklemleri

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x(x, y) = 0 \quad (\text{x yönünde D.D.}) \quad (1)$$

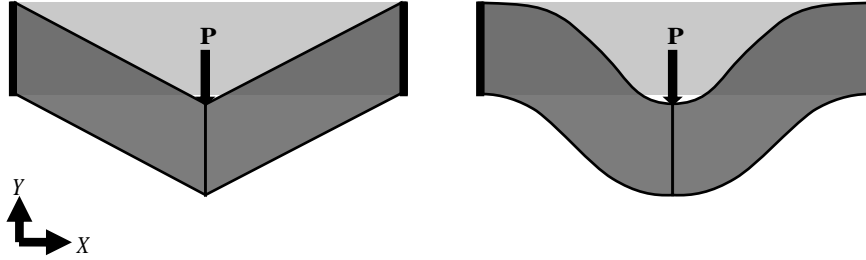
$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y(x, y) = 0 \quad (\text{y yönünde D.D.}) \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Düzlem gerilme durumu için bünye bağıntıları (3) ile verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_c}{\partial x} \\ \frac{\partial v_c}{\partial y} \\ \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

DÜZLEMİNE DİK SERBESTLİĞİN EKLENMESİ

Hesaplamalara geçmeden önce, düşük mertebeli (doğrusal) yaklaşım fonksiyonları ile elde edilmiş bir membran elemanın, seyrek ağ yapıları için kiriş eğilme probleminin hesabında oluşturacağı olumsuz etkiyi vurgulamak üzere Şekil 2. ye dikkat çekmek yerinde olacaktır.



Şekil 2. Klasik membran eleman ile betimlenen iki ucu ankastre kirişte oluşan kayma alanı.

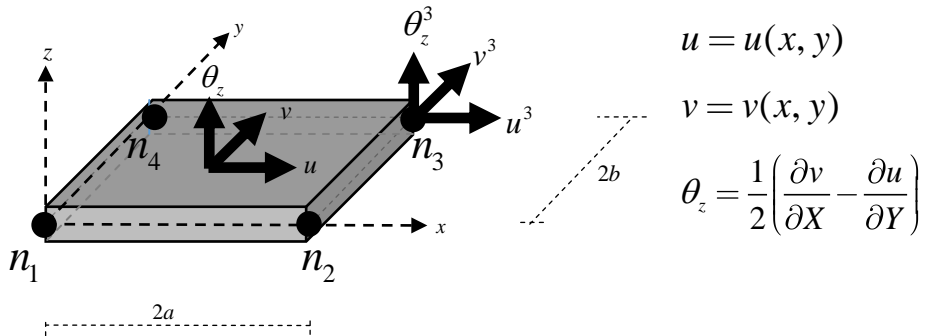
Şekil 2 de, solda, kirişte gerçekte mevcut olmayan yoğun bir kayma alanı oluşmaktadır. Bu kayma alanı, membran elemanların mertebesini veya sayısını arttırarak bir ölçüde yok edilebilir. Aynı şekilde sağdaki şekilde görüldüğü üzere düğüm noktalarına dönme serbestlikleri eklenerek de bu kayma alanını benzer biçimde hafifletmek mümkün olacaktır.

Bu bağlamda, klasik yer değiştirme alanı yerine (4) ve (5) de verilen

$$u(s, t) = u^i \psi_u^i + \theta^i \phi_u^i \quad (4)$$

$$v(s, t) = v^i \psi_v^i + \theta^i \phi_v^i \quad (5)$$

tarzda uç dönmelerle geliştirilmiş bir yer değiştirme modeli kullanılması bu çalışmanın temelini oluşturmaktadır. Bu çalışmada, klasik yöntemlerden farklı olarak dört grup şekil fonksiyonu, ψ_u^i , ϕ_u^i , ψ_v^i ve ϕ_v^i , önerilmiş olup, Şekil 3 de verilen sonlu eleman modeline uygunlukları itibariyle bu fonksiyonların elde edilmesi üzerinde durulmuştur.



$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} \right)$$

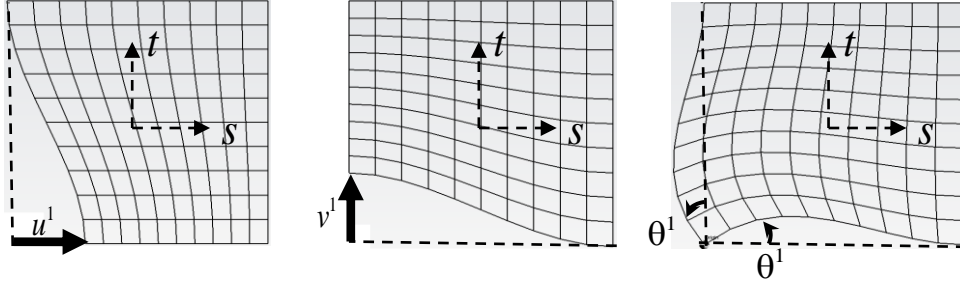
Şekil 3. Düzlemine dik dönme bileşeni eklenmiş yer değiştirme alanlı sonlu eleman modeli

Uygun şekil fonksiyonlarını elde etmek üzere seçilen baz fonksiyon uzayı $s, t \in [-1, +1]$ sıkıştırılmış koordinat uzayında

$$u = u(s, t) = \alpha_1 + s\alpha_2 + t\alpha_3 + st\alpha_4 + t^2\alpha_5 + st^2\alpha_6 + t^3\alpha_7 + st^3\alpha_8 \quad (6)$$

$$v = v(s, t) = \beta_1 + s\beta_2 + t\beta_3 + st\beta_4 + s^2\beta_5 + ts^2\beta_6 + s^3\beta_7 + ts^3\beta_8 \quad (7)$$

birbirlerinden bağımsız olmak üzere eşitlik (6) ve (7) olarak seçilmiştir. Bu seçimin ana nedeni Şekil 4 ile verilen ve dönme kaynaklı yer değiştirmeleri de içeren ayrıklaştırılmış yer değiştirme alanlarını tam olarak ifade edebilmesidir.



Şekil 4. Ayrıklaştırılmış yer değiştirme alanları

Burada α_i ve β_i katsayılarının elde edilmesi gerekecektir. Bunun için Şekil 3 de verilen nodal büyüklükler ve ayrık yer değiştirme alanlarına ilişkin sınır koşulları (6) ve (7) denklemlerinde sağlatılarak (8) ve (9) denklem takımları kurulabilir.

$$\begin{cases} u(-1, -1) = u^1 \\ -u_{,y}(-1, -1) = \theta^1 \\ u(+1, -1) = u^2 \\ -u_{,y}(+1, -1) = \theta^2 \\ u(+1, +1) = u^3 \\ -u_{,y}(+1, +1) = \theta^3 \\ u(-1, +1) = u^4 \\ -u_{,y}(-1, +1) = \theta^4 \end{cases} = \frac{1}{b} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{cases} \begin{pmatrix} 1. & b & -b & -b & b & b & -b & -b & b \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & -3 & 3 & \\ 1. & b & b & -b & -b & b & b & -b & -b \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & -3 & -3 & \\ 1. & b & b & b & b & b & b & b & b \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -3 & \\ 1. & b & -b & b & -b & b & -b & b & -b \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{cases} v(-1, -1) = v^1 \\ v_{,x}(-1, -1) = \theta^1 \\ v(+1, -1) = v^2 \\ v_{,x}(+1, -1) = \theta^2 \\ v(+1, +1) = v^3 \\ v_{,x}(+1, +1) = \theta^3 \\ v(-1, +1) = v^4 \\ v_{,x}(-1, +1) = \theta^4 \end{cases} = \frac{1}{a} \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{cases} \begin{pmatrix} 1. & a & -a & -a & a & a & -a & -a & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 & -3 & \\ 1. & a & a & -a & -a & a & -a & a & -a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \\ 1. & a & a & a & a & a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \\ 1. & a & -a & a & -a & a & a & -a & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3 & \end{pmatrix} \quad (9)$$

Bu denklemlerin çözümden eşitlik (10) ve (11) ile verilen şekil fonksiyonunu elde etmek kabildir.

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{A}_u^{-T} \mathbf{P}_u = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s(-t^3 + 3t - 2) + t^3 - 3t + 2 \\ b(s-1)(t+1)(1-t)^2 \\ s(t^3 - 3t + 2) + t^3 - 3t + 2 \\ b(-s-1)(t+1)(1-t)^2 \\ s(-t^3 + 3t + 2) - t^3 + 3t + 2 \\ b(-s-1)(t-1)(t+1)^2 \\ s(t^3 - 3t - 2) - t^3 + 3t + 2 \\ b(s-1)(t-1)(t+1)^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{A}_v^{-T} \mathbf{p}_v = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^3(1-t) + s(3t-3) - 2t + 2 \\ a(s+1)(1-s)^2(1-t) \\ s(3-3t) + s^3(t-1) - 2t + 2 \\ a(s-1)(s+1)^2(1-t) \\ s^3(-t-1) + s(3t+3) + 2t + 2 \\ a(s-1)(s+1)^2(t+1) \\ s^3(t+1) + s(-3t-3) + 2t + 2 \\ a(s+1)(t+1)(1-s)^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Burada \mathbf{A}_u ve \mathbf{A}_v , (8) ve (9) ile verilen katsayılar matrisleridir. \mathbf{p}_u ve \mathbf{p}_v vektörleri ise, seçilen yer değiştirme alanlarının baz polinomlarını içeren vektörler olup (12) ve (13) şeklinde tanımlıdır.

$$\mathbf{p}_u = 1 \quad s \quad t \quad st \quad t^2 \quad st^2 \quad t^3 \quad st^3 \quad T \quad (12)$$

$$\mathbf{p}_v = 1 \quad s \quad t \quad st \quad s^2 \quad ts^2 \quad s^3 \quad ts^3 \quad T \quad (13)$$

SONLU ELEMAN FORMULASYONUN ELDE EDİLMESİ

(10) ve (11) ile elde edilen şekil fonksiyonları ayrıklaştırılmış yer-değiştirme alanı ifadesinde (bakınız (4) ve (5)) dört gurup olarak ortaya çıkacağı aşikardır.

$$\psi_u^i \Rightarrow \mathbf{N}_u^{1,3,5,7}, \quad \phi_u^i \Rightarrow \mathbf{N}_u^{2,4,6,8} \quad (14)$$

$$\psi_v^i \Rightarrow \mathbf{N}_v^{1,3,5,7}, \quad \phi_v^i \Rightarrow \mathbf{N}_v^{2,4,6,8} \quad (15)$$

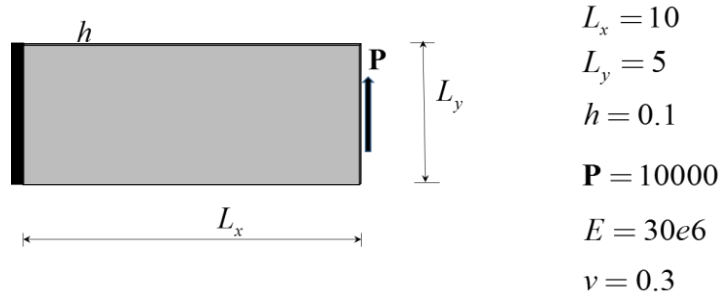
(1) ve (2) ile verilen denge denklemleri zayıf formda denklem (16) şeklinde yazılarak 12 serbestlik dereceli sonlu eleman matrisi elde edilmiştir.

$$\iint_A \left(N_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + N_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u} q_x + \bar{v} q_y \right) dA = Q_x^i \bar{u}_i + Q_y^i \bar{v}_i \quad (16)$$

Burada elemanın yanal yüzey sınır yüklemeleri olmadığı var sayılmaktadır.

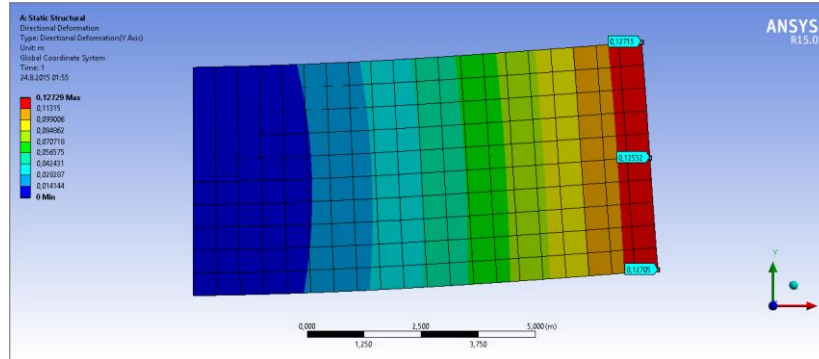
ÖRNEK

Geliştirilen elemanı test etmek üzere Şekil 5 de özellikleri verilen bir konsol perde analizi, SAP2000 ve ANSYS programları ile karşılaştırmalı olarak yapılmıştır.



Şekil 5. Konsol perde örneği (Yatay gösterim)

ANSYS Ver 15. Programında 20x10 ağ sıklığı ile elde edilen çözüm Şekil 6 da verilmiş olup, diğer çözümler karşılaştırmalı olarak Çizelge 1 de özetlenmiştir.

Şekil 6. Konsol perde: ANSYS 20x10 eleman için d_y^{\max} yer değiştirmesi.

Çizelge 1. Maksimum yatay ve düşey yer değiştirmeler ve maksimum normal gerilme (birim boya) karşılaştırması. (M12:Geliştirilen eleman, M8:Standart dönme serbestiksiz eleman, Ağ sıklığı XxY formatındadır)

| | d_x^{\max} | d_y^{\max} | N_{xx}^{\max} | | | |
|------------|--------------|----------------|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| TIMOSHENKO | - | 0,12747 | 24000 | | | |
| ANSYS | 0,0413 | 0,12729 | 32817 | Hata% (Ansys) | Hata% (Ansys) | Hata% (Ansys) |
| | | | | d_x^{\max} | d_y^{\max} | N_{xx}^{\max} |
| SAP 1x1 | 0,0396 | 0,09528 | 13048 | 4,1 | 25,1 | 60,2 |
| SAP 2x2 | 0,0392 | 0,11372 | 19033 | 5,1 | 10,7 | 42,0 |
| SAP 10x5 | 0,0405 | 0,12530 | 26467 | 1,9 | 1,6 | 19,3 |
| SAP 20x10 | 0,0410 | 0,12667 | 29742 | 0,7 | 0,5 | 9,4 |

| | | | | | | |
|------------------|--------|---------|-------|------|------|------|
| M12 1x1 | 0,0393 | 0,09591 | 12952 | 4,8 | 24,7 | 60,5 |
| M12 2x2 | 0,0419 | 0,12064 | 18949 | 1,5 | 5,2 | 42,3 |
| M12 10x5 | 0,0420 | 0,12757 | 26701 | 1,7 | 0,2 | 18,6 |
| M12 20x10 | 0,0417 | 0,12756 | 29778 | 1,0 | 0,2 | 9,3 |
| | | | | | | |
| M8 1x1 | 0,0152 | 0,04767 | 5000 | 63,2 | 62,6 | 84,8 |
| M8 2x2 | 0,0280 | 0,08680 | 13667 | 32,2 | 31,8 | 58,4 |
| M8 10x5 | 0,0398 | 0,12336 | 25763 | 3,6 | 3,1 | 21,5 |
| M8_20x10 | 0,0407 | 0,12614 | 29221 | 1,5 | 0,9 | 11,0 |

SONUÇLAR

Düzlemine dik dönme serbestliğine haiz bir membran sonlu elemanı geliştirilmiştir. Klasik yaklaşımlardan farklı olarak, dönme alanı, yer değiştirme alanının bir parçası olarak ele alınmış olup, kübik mertebeye bölge terimleri ile uygun ayrıklaştırmaların yapılması sağlanarak eleman için uç dönmelerinden teşkil olan bağımsız bir yer değiştirme alanı türetilmiştir. Bu yaklaşım konsol perde problemi ile test edilmiş ve düşük ağ sıklığında klasik membran elemana göre oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir.

[1] Mingwu Yuan, Shuli Sun, and Pu Chen, Applications of drilling degrees of freedom for 2D and 3D structural analysis, *Computational Mechanics* (1998) CIMNE, Barcelona, Spain

[2] M. Paknahad, J. Noorzai, M.S. Jaafar and W. A. Thanoon, Formulation, computation and application of optimal membrane triangle element with drilling degrees of freedom, *International Journal of Engineering and Technology* (2007) Vol. 4, No. 1, pp. 95-105.

[3] J.L. Tocher and B.J. Hartz, Higher order finite elements for plane stress. *Journal of Engineering Mechanics*. (1967), Proc. ASCE 93 (EM4), pp. 149-172

[4] Allman, D.J., Compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers and Structures* (1984). 19(1-2): 1-8.

[5] Bergan, P.G., Felippa, C.A., A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1985) 50: 25-69.

[6] A. Ibrahimbegovic and F. Frey, Membrane quadrilateral finite elements with rotational degrees of freedom, *Engineering Fracture Mechanics* (1992), 43(1): 13-24.

[7] R. D. Cook, Four node flat shell element, drilling degrees of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry, and behavior. *Computers & Structures* (1994), 50(4): 549-555.

[8] C. A. Felippa and C. Militello, Membrane triangles with corner drilling freedoms II. The ANDES element, *Finite Elements in Analysis and Design* (1992), 12: 189-201.