



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

DÖNMEYE KARŞI KONTROL ALTINA ALINMIŞ BASİT MESNETLİ ÇUBUKLARIN STOKE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA BURKULMA ANALİZİ

M. Özgür YAYLI¹, A. Erdem ÇERÇEVİK² ve Y. Cengiz TOKLU³
^{1,2,3}Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik

ABSTRACT

This paper presents an analytical method for buckling analysis of simply supported beam with rotational restraints at both ends. Euler Bernoulli theory is used. The lateral displacement function is selected by a Fourier sine series. Stokes' transformation is applied to boundary conditions in order to construct the coefficient matrix. This application gives more flexibility for buckling analysis of beams with different boundary conditions. Comparisons are performed to validate present analytical method.

ÖZET

Bu çalışmada eksenel yüklenmiş basit mesnetli bir kirişin burkulma yüklerinin tespiti için yerel bir analitik yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca kiriş uçlarından dönmeye karşı engelleyici yaylar ile sabitlenmiştir. Çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. İlk olarak literatürde çok iyi bilinen Euler-Bernoulli kiriş teorisinin denklemi eksenel yükler altında verilmiştir. Analitik genel çözümlerin elde edilmesi için yer değiştirme fonksiyonu Fourier sinüs serisi seçilmiştir. Fourier sinüs serisinin seçilmesinin kirişin basit mesnetli olması ile bir ilgisi bulunmamaktadır. Literatürdeki çalışmalarda basit mesnetli kirişlerin sınır koşullarını sağladığı için genellikle Fourier sinüs serileri kullanılmaktadır. Mesnetlerde dönmeye karşı yaylar kullanıldığı için; sınır koşullarında serbestlik sağlaması bakımından Stoke dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşümün yapılmasının temel amacı yay sabitlerine verilecek değerlerde esneklik sağlamasıdır.

GİRİŞ

Gelişen dünyada mühendislik yapılarının, gerek kullanım amaçları gerekse mimari amaçlar nedeni ile daha güçlü ve verimli hale dönüşmesi bir zorunluluk haline gelmiştir. Hesaplama yöntemlerinin ve malzemelerin gelişmesi de malzeme ekonomisi açısından her elemanın daha az kesit ile imal edilmesini sağlamıştır. Bilgisayar programlarının gelişmesi ve malzeme kalitesinin artması ile de eski usul kesit boyutlandırmaları yerini daha karmaşık hesaplara bırakmıştır.

Mühendislik sistemlerinin analizi iki aşamada yapılmaktadır. İlk aşama sistemin durumunu anlatan matematik modelin kurulmasıdır. İkinci aşama ise matematik modelin gerektirdiği denklemlerin çözülmesidir. Basit mesnetli çubukların çeşitli mesnet koşulları altında burkulma analizinin yapılması da öncelikli olarak sınır koşullarının belirlenmesine bağlıdır. Belirlenen sınır koşulları doğrultusunda oluşturulan matematik model gerçek durumu en yakın olarak çözebilecek model olmalıdır. Euler katı cisim mekaniğinin en temel problemlerinden olan basit mesnetli bir kirişin burkulma kuvvetlerini 1744 yılında sabit enine kesitli çubuklar için dört mesnetleme durumu için hesaplamıştır. [1] Geenhill belirli bir yük

altındaki çubuğun stabilitesinin bozulmadan taşıyabileceği kritik yükü hesaplamıştır.[2] Daha sonra Timoshenko ve Gere matematik modellerine kesme kuvveti etkisini de eklemişlerdir.[3] İlerleyen çalışmalarda eksenel ve yayılı yük kombinasyonları altındaki çubukların burkulma analizleri, kolon-kiriş olarak çalışan çubukların analizleri ve değişen kesitli çubukların analizleri yapılmıştır.[4-8] Bunların haricinde yakın zamanda yapılan çalışmalar daha çok kompozit çubukların burkulma yükü üzerine yoğunlaşmıştır.[9-15]

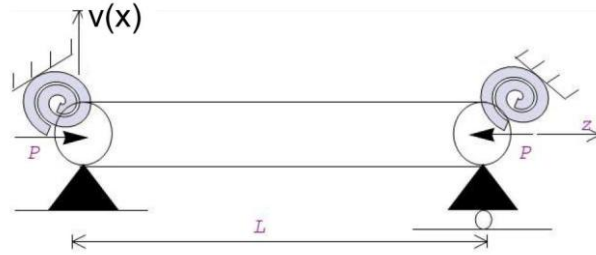
Hesaplama yöntemlerinin gelişmesi ile kurulan modelin farklı çözüm metotları ile çözülmesi mümkün olmuştur. Bu çalışmada da Stoke dönüşümünün dönmeye karşı engellenmiş basit mesnetli çubukların burkulma analizi için kullanılmış oldukça doğru sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Bu yöntemin en büyük avantajı tek bir katsayılar matrisi ile sınır koşulları ne olursa olsun çözümler yapılabilir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Problem Formülasyonu ve Analitik Yerdeğiştirme Fonksiyonu

Eksenel yüklenmiş ve Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre yerdeğiştirmeyi ifade eden çok iyi bilinen dördüncü dereceden diferansiyel denklem aşağıda verilmiştir.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (1)$$



Şekil 1: Eksenel yüklenmiş basit mesnetli bir kiriş modeli

Burada EI eğilme rijitliğini, P eksenel yükü v ise yerdeğiştirmeyi göstermektedir. Şekil 1'de verilen mesnetlerdeki dönmelerde esneklik sağlaması bakımından; yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$v(x) = \varphi(x) = \varphi_0 \quad x = 0 \quad (2)$$

$$v(x) = \varphi(x) = \varphi_L \quad x = L \quad (3)$$

$$v(x) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad 0 < x < L \quad (4)$$

(4) Denkleminde A_k Fourier katsayısıdır ve problemi yöneten denklemden elde edilecektir. Yerdeğiştirme fonksiyonunun Fourier sinüs serisi seçilmesinin problemin basit mesnetli olmasıyla ilgisi yoktur. İleriki aşamalarda Stoke dönüşümü yapılacağından Fourier cosinus serisi de seçilebilirdi. Bu çalışma için Fourier sinüs serisi seçilmiştir. (4) Denklemindeki Fourier katsayısı (A_k) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (5)$$

Yukarıdaki denklemin terim bazında türevi alınırsa;

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

bulunur. (6) denklemini Fourier kosinüs serisiyle gösterilebilir.

$$\varphi'(x) = \frac{B_0}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

(7) denklemindeki katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$B_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(x) dx = \frac{2}{L} [\varphi(L) - \varphi(0)] \quad (8)$$

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad k=1,2,\dots \quad (9)$$

Yukarıdaki denklem kısmi olarak integrale edilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$B_k = \frac{2}{L} \left[\varphi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{2}{L} \left[\frac{k\pi}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (10)$$

$$B_k = \frac{2}{L} [(-1)^k \varphi(L) - \varphi(0)] + \frac{k\pi}{L} A_k \quad (11)$$

Yüksek mertebeden türevler benzer dönüşümler yapılarak aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\alpha_k x) \left(\frac{2((-1)^k \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_k A_k \right) \quad (12)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(\alpha_k x) \left(\frac{2((-1)^k \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_k A_k \right) \quad (13)$$

Yukarıdaki dönüşümler bir matematiksel prosedür olup Stoke dönüşümü olarak bilinmektedir. Buradaki α_k aşağıda verilmiştir.

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{L}$$

Sınır Koşulları

Şekilde verilmiş kiriş için yukarıda verilen çözümler ışığında sınır koşulları çıkarılmıştır.

$$\varphi_0 = 0 \quad x = 0 \quad (14)$$

$$\varphi_L = 0 \quad x = L \quad (15)$$

$$\theta_0 \frac{d\varphi}{dx} = EI \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \quad x = 0 \quad (16)$$

$$\theta_L \frac{d\varphi}{dx} = -EI \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \quad x = L \quad (17)$$

Burada θ_0 ve θ_L dönmeyi engellemek üzere yerleştirilmiş yayların sabitleridir. (12) ve (13) denklemleri kullanılarak sonsuz serilerden oluşan aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\left(-1 + \theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2LEI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)}\right) \varphi_0'' - \left(\theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^k EI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)}\right) \varphi_L'' = 0 \quad (18)$$

$$-\left(\theta_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^k EI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)}\right) \varphi_0'' + \left(-1 + \theta_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2LEI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)}\right) \varphi_L'' = 0 \quad (19)$$

Yukardaki denklem takımı matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0'' \\ \varphi_L'' \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

Yukarıdaki denklem bir özdeğer problemidir ve karakteristik denklemin kurulabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$|z_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (21)$$

burada

$$z_{11} = -1 + \theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2LEI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)} \quad (22)$$

$$z_{12} = -\theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^k EI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)} \quad (23)$$

$$z_{21} = -\theta_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^k EI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)} \quad (24)$$

$$z_{22} = 1 - \theta_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2LEI}{EI(L^2P - k^2\pi^2EI)} \quad (25)$$

Yukarıdaki eşitlikler izleyen şekilde boyutsuz hale getirilmiştir.

$$z_{11} = -1 + \bar{\theta}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{[\alpha - k^2\pi^2]} \quad (23)$$

$$z_{12} = -\bar{\theta}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{[\alpha - k^2\pi^2]} \quad (24)$$

$$z_{21} = -\bar{\theta}_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{[\alpha - k^2\pi^2]} \quad (25)$$

$$z_{22} = 1 - \bar{\theta}_L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{[\alpha - k^2\pi^2]} \quad (26)$$

burada

$$\alpha = \frac{PL^2}{EI}$$

$$\bar{\theta}_0 = \frac{\theta_0 L}{EI}$$

$$\bar{\theta}_L = \frac{\theta_L L}{EI}$$

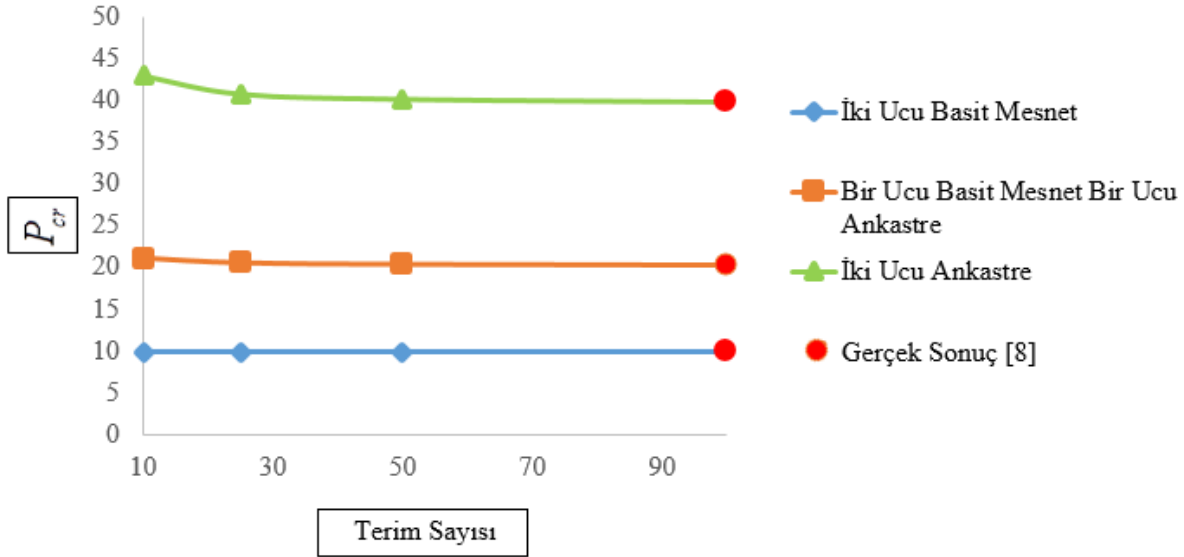
(21) denkleminin determinantının alınması sonucu bulunacak karakteristik denklemde en küçük P yükü kritik burkulma yükünü verecektir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, teorik olarak çıkarılmış olan denklemlerde; boyutsuz parametrelere çeşitli sayısal değerler verilmek suretiyle çözümler gerçekleştirilmiştir. Elde edilmiş olan sonuçlar literatürde çok iyi bilinen gerçek sonuçlarla karşılaştırılarak; kurulan formülasyonun doğruluğu ispatlanmıştır. Tablo 1’de analitik çözümler rijit sınır koşullarına göre bulunmuştur. Sonsuz serilerde kullanılan terim sayısının artırılmasıyla gerçek sonuca çok yakın değerler elde edilmiştir. Bu çalışmada Fourier sinüs serisi kullanıldığı için basit mesnetli kiriş için çözüme hemen ulaşılmaktadır. Diğer sınır koşulları için Stoke dönüşümünün etkisi terim sayısının artmasına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Tablo 1 ve Şekil 2’ de görüleceği gibi Stoke dönüşümünün sınır koşullarını sağlamaya yönelik zorlaması basit mesnetli kirişten fazladır. Eğer Fourier cosinus serileri kullanılmış olsaydı; basit mesnetli kiriş için çok az terimle sonuca ulaşmanın bu kadar kolay olmayacağı açıktır.

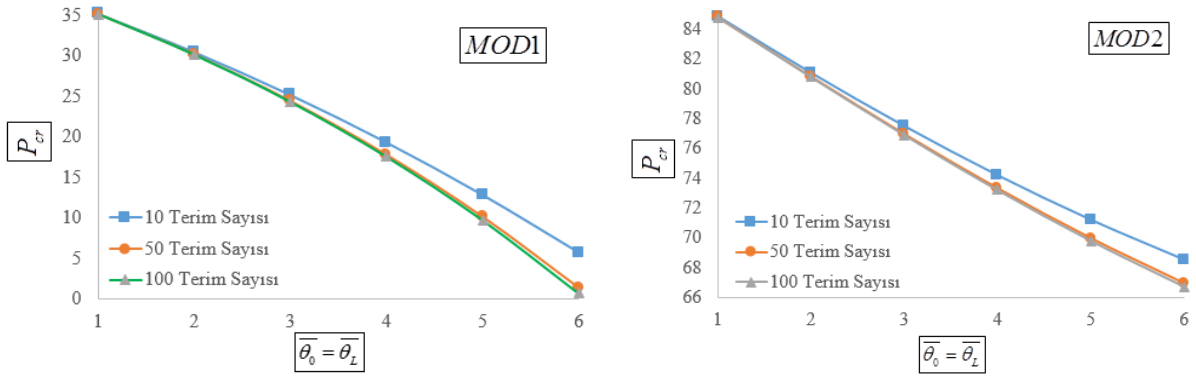
Tablo 1: Rijit sınır koşullarına göre karşılaştırma

Eleman Durumu	Fourier Dönüşümündeki Terim Sayısı				Gerçek Sonuç [8]
	10	25	50	100	
İki Ucu Basit Mesnet	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696
Bir Ucu Basit Mesnet Bir Ucu Ankastre	21.0124	20.5184	20.3545	20.2726	20.1902
İki Ucu Ankastre	42.9041	40.7404	40.1273	39.8013	39.4784

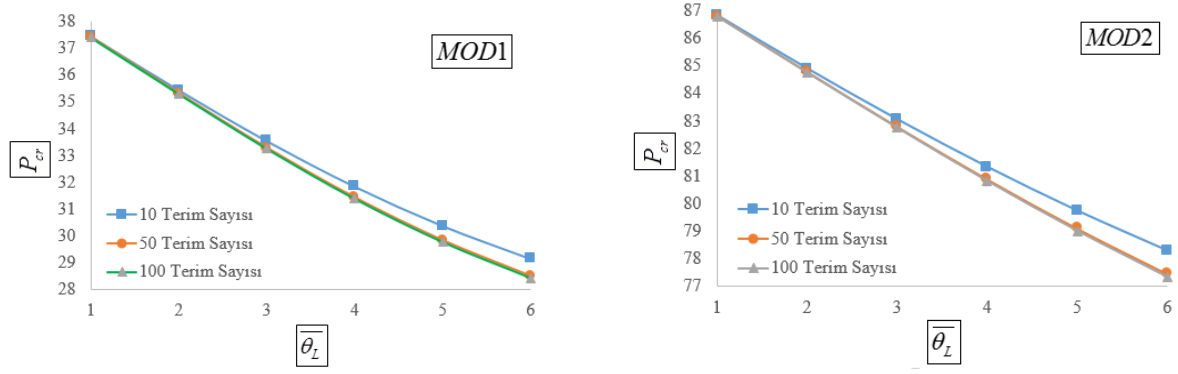


Şekil 2: Rijit sınır koşulları için çözümler

Şekil 2,3 ve 4 te farklı yay parametreleri için çözümler gerçekleştirilmiştir. Verilen şekillerde görüleceği gibi kullanılan terim sayısı arttıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edilmektedir.



Şekil 3: İki Ucu Ankastre



Şekil 4: Bir Ucu Basit Mesnet Diğer Ucu Ankastre

SONUÇLAR

Bu çalışmada bir kirişin burkulma analizini farklı sınır koşulları için bulabilen bir analitik yöntem geliştirilmiştir. Kurulan yöntemle yay sabitlerine sonsuz büyük değerler verilmek suretiyle ankastre mesnet sonuçlarına geçiş yapabilmektir. Yay sabitlerinin sıfır alınması durumunda ise basit mesnetli kiriş sonuçları elde edilecektir. Stoke dönüşümü yapıldığı için başlangıçta fourier sinus serisi veya cosinus serisi seçilmesi arasında tercih yapılabilir. Seride kullanılacak terim sayısını azaltmak için bu çalışmada fourier sinüs serisi seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki gerçek sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Analitik çözümlerdeki temel avantaj, her sınır koşulu değişiminde farklı bir yaklaşım fonksiyonu seçilmesine ihtiyaç duyulmamasıdır. Elde edilen 2×2 boyutundaki katsayılar matrisi hem basit mesnetli çubuklar, hem de ankastre mesnetli çubuklar için çözüm elde edebileceği gibi yay sabitlerine değişik değerler verilmek suretiyle de çözümler yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] L. Euler, De Curvis Elasticis, Lausanne and Genf, (1744).
- [2] A. G. Greenhill, Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of a given proportions can grow., Proc. Cambridge Phil. Soc., 4, 65-74 (1881).
- [3] P. Timoshenko. Theory Of Elastic Stability second edition, New York, London, Toronto (1961).
- [4] Q.S. Li, Exact solution for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20, 485-500 (2001).
- [5] J. H. B. Sampaio, A mathematical model and analytical solution for buckling of inclined beam-columns, *Applied Mathematical Modelling*, 22, 405-421 (1998).
- [6] W. H. Duan. C. M. Wang. Exact solution for buckling of columns including self-weight, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 134(1), 116-119 (2008).
- [7] C.M. Wang, K. K. Ang, Buckling capacities of braced heavy columns under an axial load, *Computers and Structures*, 28(5), 563,571. (1988).
- [8] C.M. Wang, C. Y. Wang, ve J.N. Reddy, Exact Solutions for Buckling of Structural Members, *CRC Press*, USA. (2005).
- [9] M. R. Parlapalli, D. Shu, Buckling of composite beams with two non-overlapping delaminations: Lower and upper bounds. *International Journal of Mechanical Sciences* 49 793–805n(2007).

- [10] G. He, X. Yang. Finite element analysis for buckling of two-layer composite beams using Reddy's higher order beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design* Volume 83, June 2014, Pages 49–57 (2014).
- [11] S. Schnabl, , I. Planinc, G. Turk, Buckling Loads of Two-Layer Composite Columns with Interlayer Slip and Stochastic Material Properties. *J. Eng. Mech.* 139, SPECIAL ISSUE: Stability of Composite Structures, 961–966 (2013).
- [12] N. Challamel, U. A. Girhammar, Variationally-based theories for buckling of partial composite beam–columns including shear and axial effects. *Engineering Structures*, Volume 33, Issue 8, August 2011, Pages 2297–2319.
- [13] D. Lanc, G. Turkalj, I. Pesic, Global buckling analysis model for thin-walled composite laminated beam type structures. *Composite Structures* Volume 111, May 2014, Pages 371–380.
- [14] S. Eksi, A. O. Kapti, K. Genel, Buckling behavior of fiber reinforced plastic–metal hybrid-composite beam. *Materials & Design* Volume 49, August 2013, Pages 130–138.
- [15] S. Chen, Y. Jia, Numerical investigation of inelastic buckling of steel–concrete composite beams prestressed with external tendons. *Thin-Walled Structures*. Volume 48, Issue 3, March 2010, Pages 233–242.