



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

WINKLER ZEMİNE OTURAN ELASTİK İKİ TABAKA İÇİN SÜREKLİ TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ

Murat Yaylacı¹, Ahmet Birinci² ve Erdal Öner³

¹Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Rize

²Karadeniz Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon

³Bayburt Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bayburt

ABSTRACT

In this paper, a continuous contact problem for two bonded elastic layers resting on a Winkler foundation and loaded by uniformly distributed load is solved using finite element method. Body forces of elastic layers are neglected in the problem. Thickness in z-direction is taken to be unit. The finite element model of the problem is constituted using ANSYS software and the two dimensional analysis of the problem is carried out. By reason of the fact that maximum value of the normal stress is on the symmetry axis, σ_x and σ_y stresses on the symmetry axis are determined for various dimensionless quantities. Finally, the results obtained from finite element method are verified by comparison with the analytical results.

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve Winkler zemine oturan birbirine yapışık elastik iki tabakanın sürekli temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problem düzlem hal için incelendiğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. Problemin sonlu eleman modeli ANSYS paket programı kullanılarak oluşturulmuş ve iki boyutlu analizi yapılmıştır. En büyük normal gerilmeler simetri ekseninde meydana geldiğinden, bu ekseninde oluşan σ_x ve σ_y gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Son olarak bulunan sonuçlar literatürdeki analitik sonuçlarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

GİRİŞ

Temas problemleri pratik öneme sahip mühendislik yapılarında geniş uygulama alanları bulmuşlardır. Temeller, yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, akaryakıt tankları, tahıl siloları, silindirik miller ve bilyeler bu uygulama alanları arasında yer aldığı söylenebilir. Bu nedenle temas problemlerine ilişkin literatürde çok sayıda analitik [1-5] ve nümerik [6-10] çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların yanında, Adams ve Bogy [11] farklı elastik özelliklere sahip yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki değme problemini incelemişlerdir. Dempsey vd. [12] Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki değme problemini ele almışlardır. Blázquez vd. [13] iki boyutlu temas problemleri için sınır elemanlar metoduyla çözümünü irdelemişlerdir.

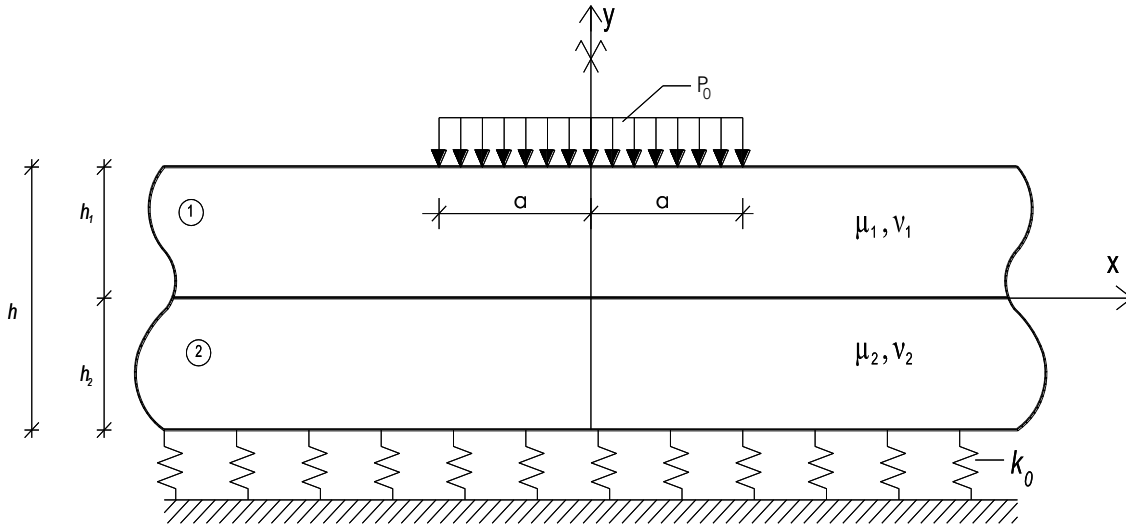
Sürtünmeli temas problemi için sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemlerinin birleşimi Guyot vd. [14] tarafından ele alınmıştır. El-Borgi vd. [15] fonksiyonel derecelendirilmiş bir

tabaka ve homojen yarım düzlem arasındaki ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Oysu [16] yeniden ağlara bölme tekniğini kullanarak sonlu elemanlar ve sınır elemanlar ile değme gerilmesi analizini irdelemiştir. İki elastik çeyrek düzleme oturan ve tekil yükü ileten dairesel rijit bir panç ile bastırılan sürtünmesiz elastik tabaka problemi ve bu probleme yapay sınır ağı yönteminin uygulanması Çakıroğlu [17] tarafından çalışılmıştır. Chen vd. [18] elastik yarım düzleme bağlanmış pançların olması durumundaki değme problemi için singüler integral denklem metodunu incelemişlerdir. Yaylacı [19], iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik iki tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Winkler zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için temas problemi Çömez [20] tarafından ele alınmıştır. Öner vd. [21] Winkler zemine oturan elastik iki tabaka için ayrılmalı temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Gun ve Gao [22] sınır elemanlar metodunu kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için sürtümlü temas problemini incelemişlerdir.

Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve Winkler zemine oturan birbirine yapışık elastik iki tabakanın sürekli temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. En büyük normal gerilmelerin simetri ekseninde olduğu bilindiğinden, bu ekseninde oluşan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Son olarak bulunan sonuçlar literatürdeki analitik sonuçlarla Birinci [23] karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

PROBLEMİN TANIMI

Düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve Winkler zemine oturan birbirine yapışık elastik iki tabakanın sürekli temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Üst tabaka (-a, +a) aralığında düzgün yayılı yük ile yüklenmiştir. Tabakalar ve Winkler zemin (-∞, +∞) aralığında uzanmaktadır. Problem düzlem hal için incelendiğinden z ekseninde doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. (Şekil 1).

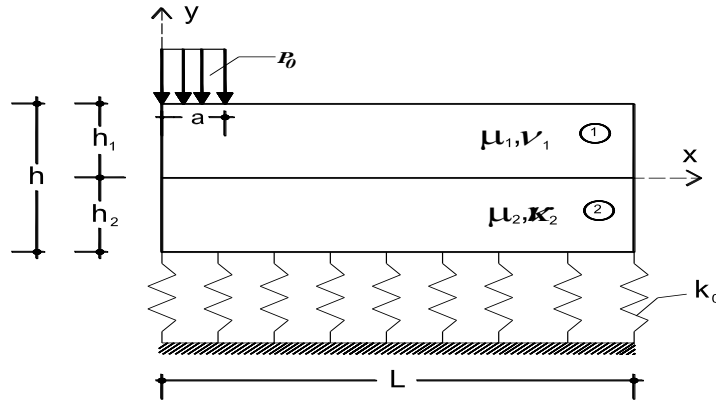


Şekil 1. Problemin Geometrisi

Burada μ_i , ν_i ($i=1,2$) ve k_0 sırasıyla tabakanın kayma modülünü, Poisson oranını ve elastik yay sabitini ifade etmektedir. Ayrıca h_1 , h_2 ve h sırasıyla (1) nolu tabakanın yüksekliğini, (2) nolu tabakanın yüksekliğini ve tabakaların toplam yüksekliğini göstermektedir.

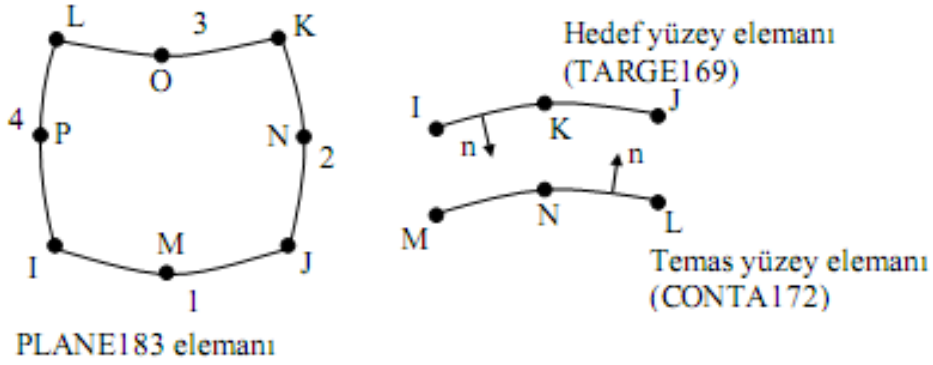
PROBLEMİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

ANSYS [24] paket programıyla yapılan bu analizde, eleman tiplerinin belirlenmesi, elemanların malzeme özelliklerinin atanması, problemin geometrisinin oluşturulması, ağ yapısının oluşturulması, sınır şartlarının verilmesi, yüklemenin yapılması, problemin çözümü ve analiz sonuçlarının alınması gibi birçok işlem gerçekleştirilmiştir. Problem y eksenine göre simetrik modellenmiş olup tabakaların ağırlığı ihmal edilmiştir (Şekil 2). Sonlu elemanlar modelinin tüm parçalarında lineer, elastik ve izotropik malzeme kullanılmıştır. Analizlerde tabakaların yarı uzunluğu $L=0.5$ m ve (2) nolu tabakanın yüksekliği $h_2=0.1$ m, Elastisite Modülü ve Poisson oranı sırasıyla $E_2=3 \times 10^{10}$ Pa, $\nu_2=0.34$ olarak alınmıştır. Yayılı yük değeri ise $P_0 = 10 \times 10^4$ N/m olarak alınmıştır. (1) nolu tabakaya ilişkin değerler ve k_0 elastik yay sabitine ilişkin değerler ise analizlerde kullanılan oranlara bağlı olarak hesaplanmış ve kullanılmıştır.



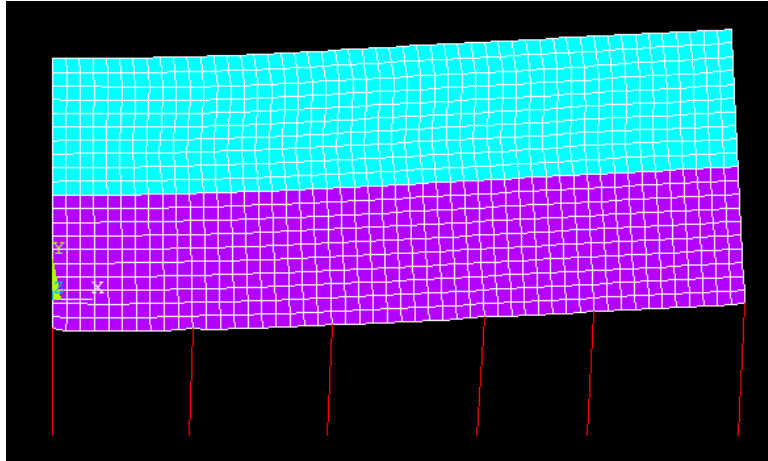
Şekil 2. Analiz geometrisi

Eleman seçimi, analizde kullanılacak olan matematiksel modelin belirlenmesi açısından son derece önemlidir. Elemanlar yapılacak analizin çeşidine göre seçilir. Yani statik, termal, akışkan veya elektromanyetik analizler için farklı elemanlar kullanılır. Benzer şekilde analiz edilecek olan modelin 2 veya 3 boyutlu olması eleman seçimindeki etkenlerden biridir. Seçilen elemanın düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin tipi ve sayısı analizin doğru yapılması açısından çok önemlidir. Sonlu eleman analizinde ANSYS paket programı kütüphanesinde bulunan PLANE183 tipi yapısal eleman kullanılmıştır. PLANE183 tipi eleman, sekiz düğüm noktası ile tanımlanır ve her düğüm noktasının iki serbestlik derecesi bulunmakta olup dönme serbestliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla x ve y doğrultularında yer ve şekil değiştirebilir. Elemanın plastiklik, büyük esnemelere dayanma ve oldukça fazla şekil değiştirme özellikleri vardır. PLANE183 elemanı, karmaşık geometrilerin ağ yapısının oluşturulmasında dört bağlantı noktasına sahip iki boyutlu diğer elemanlara göre daha iyi sonuç vermektedir [24]. Bu çalışmada yapılan analizlerde temas çiftinin modellenmesinde yüzey-yüzey (SURFACE TO SURFACE) temas modeli kullanılmıştır. Yüzey-yüzey temas modeli düğüm noktalarının üst üste gelmemesi halinde de çözüme olanak sağlamaktadır. Probleme temas eden bölgede temas çifti (Contact Pair) oluşturulmuştur. Temas çiftleri iki eleman tipinden oluşur. Bunlar TARGET ve CONTACT eleman tipleridir. Temas çiftinin oluşturulmasında hedef yüzey TARGE169 ve temas yüzey CONTA172 elemanları kullanılmıştır. TARGE169 ve CONTA172 elemanları üç düğüm noktası içeren elemanlardır ve bu düğüm noktaları Şekil 3'de görülebileceği gibi PLANE183 elemanının yüzeyindeki düğümlerle örtüşmektedir [25].



Şekil 3. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları

Modelin elemanlara bölünmesi işlemi sırasında geometrideki parçalara ait malzeme özellikleri ve eleman tipleri atanmakta olup kullanılan ağ yapısı ve sıklığı belirlenmektedir. Sınır şartlarının uygulanması ve yüklemenin yapılması işlemlerinden sonra problem program yardımıyla çözülmektedir. Çıkış kısmında (General Postprocessor), çözüm kısmından elde edilen sonuçlara grafik, şekil ya da liste halinde ulaşılabilir. Problemin çözümünde 3822 düğüm noktası ve 1280 eleman kullanılmış olup analiz sonrası oluşan şekil değişikliği aşağıda verilmiştir (Şekil 4).



Şekil 4. Analiz sonrası problemin geometrisi (şekil değiştirmiş hal)

SONUÇLAR

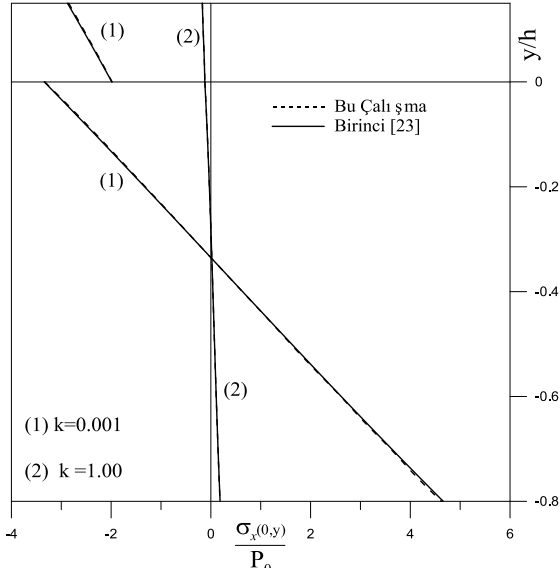
Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve Winkler zemine oturan birbirine yapışık elastik iki tabakanın sürekli temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. En büyük normal gerilmelerin simetri ekseninde olduğu bilindiğinden, bu ekseninde oluşan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Söz konusu gerilmelere ilişkin değerler iki farklı durum için hesaplanmıştır. İlk olarak yayılı yükün yarı uzunluğu (a/h) sifira yaklaştırılarak tekil yük durumu irdelenmiş, daha sonra ise düzgün yayılı yük olması durumu ele alınmıştır.

Tablo 1. $a/h=0.0001$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.2$ ve $k=k_0/\mu_2=0.001$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_x/P_0 ve σ_y/P_0 boyutsuz normal gerilme değerleri

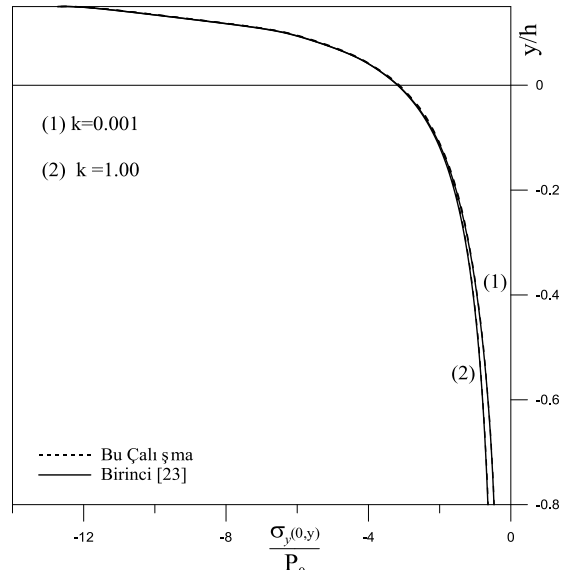
y/h	σ_x/P_0			σ_y/P_0		
	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)
0.10	-2.5728	-2.5545	0.71	-6.33627	-6.2786	0.91
0.05	-2.2767	-2.2619	0.65	-4.2364	-4.2004	0.85
0.00	-1.9862	-1.9812	0.25	-3.1697	-3.1605	0.29
0.00	-3.3409	-3.3319	0.27	-3.1697	-3.1605	0.29
-0.05	-2.8303	-2.8065	0.84	-2.5256	-2.4817	1.74
-0.1	-2.3256	-2.3007	1.07	-2.0917	-2.0693	1.07
-0.15	-1.8256	-1.8041	1.18	-1.7775	-1.7547	1.28
-0.2	-1.3294	-1.3141	1.15	-1.5378	-1.5186	1.25
-0.25	-0.8360	-0.8252	1.29	-1.3479	-1.3305	1.29
-0.3	-0.3445	-0.3423	0.65	-1.1928	-1.1827	0.85
-0.35	0.1461	0.1450	0.77	-1.0630	-1.0527	0.97
-0.4	0.6365	0.6321	0.69	-0.9533	-0.9452	0.85
-0.45	1.1276	1.1233	0.38	-0.8588	-0.8504	0.98
-0.5	1.6204	1.6026	1.10	-0.7768	-0.7683	1.10
-0.55	2.1156	2.0970	0.88	-0.7054	-0.7013	0.58
-0.60	2.6142	2.6051	0.35	-0.6433	-0.6398	0.55
-0.65	3.1170	3.0893	0.89	-0.5896	-0.5844	0.89
-0.70	3.6249	3.6046	0.56	-0.5436	-0.5395	0.76
-0.75	4.1390	4.0914	1.15	-0.5050	-0.4995	1.08
-0.80	4.6602	4.6239	0.78	-0.4735	-0.4703	0.68

Tablo 2. $a/h=0.0001$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.2$ ve $k=k_0/\mu_2=1$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_x/P_0 ve σ_y/P_0 boyutsuz normal gerilme değerleri

y/h	σ_x/P_0			σ_y/P_0		
	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)
0.15	-0.1707	-0.1696	0.63	-12.7330	-12.6388	0.74
0.10	-0.1551	-0.1539	0.75	-6.3665	-6.3098	0.89
0.05	-0.1347	-0.1341	0.47	-4.2445	-4.2296	0.35
0.00	-0.1214	-0.1210	0.35	-3.1834	-3.1258	1.81
0.00	-0.1206	-0.1194	0.98	-3.1834	-3.1258	1.81
-0.05	-0.0947	-0.0933	1.44	-2.5466	-2.5145	1.26
-0.1	-0.0712	-0.0703	1.27	-2.1217	-2.0820	1.87
-0.15	-0.0496	-0.0490	1.15	-1.8180	-1.7898	1.55
-0.2	-0.0295	-0.0292	1.03	-1.5901	-1.5690	1.33
-0.25	-0.0107	-0.0106	1.12	-1.4126	-1.3968	1.12
-0.3	0.0071	0.0070	0.95	-1.2706	-1.2585	0.95
-0.35	0.0243	0.0241	0.77	-1.1544	-1.1445	0.86
-0.4	0.0410	0.0406	0.86	-1.0576	-1.0500	0.72
-0.45	0.0575	0.0570	0.95	-0.9759	-0.9666	0.95
-0.5	0.0740	0.0733	1.00	-0.9061	-0.8966	1.05
-0.55	0.0907	0.0902	0.58	-0.8459	-0.8410	0.58
-0.60	0.1078	0.1072	0.55	-0.7938	-0.7892	0.58
-0.65	0.1256	0.1249	0.59	-0.7484	-0.7432	0.69
-0.70	0.1442	0.1431	0.79	-0.7088	-0.7032	0.79
-0.75	0.1640	0.1622	1.08	-0.6742	-0.6656	1.28
-0.80	0.1852	0.1840	0.67	-0.6442	-0.6386	0.87



Şekil 5. $a/h=0.0001$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$,
 $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.2$ olması
durumuna ait $x/h=0$ simetri
kesitindeki σ_x/P_0 boyutsuz normal
gerilme dağılımı



Şekil 6. $a/h=0.0001$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$,
 $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.2$ olması
durumuna ait $x/h=0$ simetri
kesitindeki σ_y/P_0 boyutsuz normal
gerilme dağılımı

Şekil 5-6 ve Tablo 1-2' de üst tabakanın tekil yüklerle yüklenmesi durumunda ($a/h=0.0001$) simetri ekseninde meydana gelen σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin çeşitli boyutsuz büyüklükler için değişimleri verilmiştir. Şekil 5'de de görüldüğü gibi, σ_x boyutsuz normal gerilme dağılımı her tabakada kesit boyunca lineerlik göstermekte olup tekil yükün altında bu lineerlik bozulmaktadır. Şekil 6' de ise σ_y boyutsuz normal gerilmesinin tekil yüke yaklaştıkça hızla büyüdüğü ve kesit boyunca derine inildikçe azaldığı görülmektedir. Benzer şekilde, Tablo 1-2 ve Şekil 5-6 incelendiğinde, elastik yay sabitinin değişiminin σ_x gerilmesine etkisinin σ_y gerilmesine etkisinden daha fazla olduğu görülmektedir. Elastik yay sabitinin büyük seçilmesi durumunda σ_x normal gerilme değerlerinin azaldığı, tersi durumda ise arttığı görülmektedir. Elastik yay sabitinin büyük seçilmesi durumu alt tabakada σ_y normal gerilme değerlerinin azda olsa büyümesine neden olmakta, üst tabakada ise hemen hemen değişiklik gözle çarpmamaktadır.

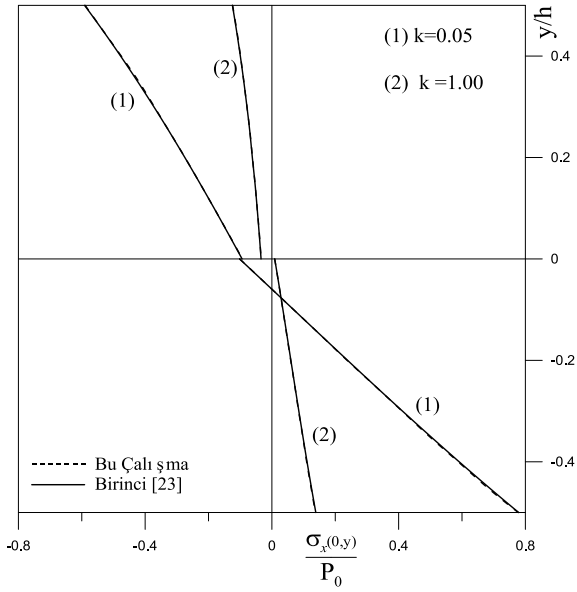
Üst tabakanın yayılı yüklerle yüklenmesi durumunda ($a/h=1$) simetri ekseninde meydana gelen σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin çeşitli boyutsuz büyüklükler için değişimleri Tablo 3-4 ve Şekil 7-8' da verilmiştir. Şekil 7 ve Tablo 3-4 incelendiğinde, σ_x boyutsuz normal gerilme dağılımı her tabakada kesit boyunca lineerlik gösterdiği, tekil yük durumuna göre aldığı değerlerin daha küçük olduğu anlaşılmaktadır. Şekil 8 ve Tablo 3-4 incelendiğinde ise σ_y normal gerilmelerinin yüzeyden derine inildikçe lineere yakın bir şekilde azaldığı görülmektedir. Tüm şekil ve tablolar birlikte analiz edildiğinde, tekil yük ve yayılı yük durumlarının her ikisinde de Elastisite modülü büyük olan tabakada σ_x normal gerilmesinin daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca elastik yay sabitinin büyük seçilmesi durumunda σ_x normal gerilmesi azaldığından σ_y normal gerilmesinin etkin olduğu da ilgili şekil ve tablolardan anlaşılabilir. Sonuç olarak sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan çözümlerden elde edilen sonuçların literatürdeki analitik sonuçlara [23] çok yakın olduğu görülmüştür.

Tablo 3. $a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.5$ ve $k=k_0/\mu_2=0.05$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_x/P_0 ve σ_y/P_0 boyutsuz normal gerilme değerleri

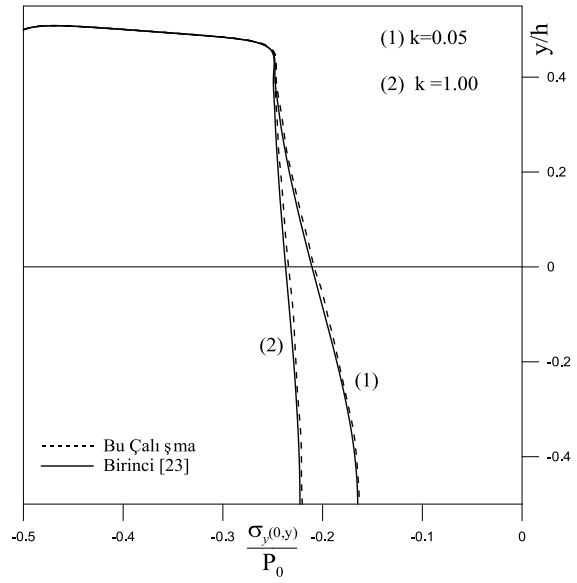
y/h	σ_x/P_0			σ_y/P_0		
	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)
0.4	-0.4774	-0.4754	0.41	-0.2478	-0.2466	0.48
0.35	-0.4240	-0.4204	0.86	-0.2453	-0.2435	0.73
0.3	-0.3725	-0.3709	0.42	-0.2420	-0.2397	0.95
0.25	-0.3228	-0.3224	0.11	-0.2380	-0.2365	0.63
0.2	-0.2747	-0.2742	0.17	-0.2334	-0.2314	0.86
0.15	-0.2280	-0.2279	0.03	-0.2282	-0.2259	1.01
0.1	-0.1824	-0.1823	0.07	-0.2227	-0.2201	1.17
0.05	-0.1379	-0.1373	0.47	-0.2168	-0.2140	1.29
0.00	-0.0941	-0.0931	1.09	-0.2107	-0.2085	1.04
0.00	-0.1020	-0.1016	0.40	-0.2107	-0.2085	1.04
-0.05	-0.0166	-0.0165	0.51	-0.2044	-0.2008	1.76
-0.1	0.0685	0.0685	0.01	-0.1981	-0.1952	1.46
-0.15	0.1535	0.1534	0.06	-0.1918	-0.1893	1.30
-0.25	0.3250	0.3246	0.13	-0.1802	-0.1787	0.83
-0.3	0.4121	0.4107	0.33	-0.1752	-0.1735	0.97
-0.35	0.5007	0.4969	0.76	-0.1709	-0.1687	1.29
-0.4	0.5910	0.5880	0.50	-0.1677	-0.1661	0.95
-0.45	0.6836	0.6784	0.76	-0.1656	-0.1642	0.85
-0.5	0.7788	0.7777	0.14	-0.1648	-0.1630	1.09

Tablo 4. $a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.5$ ve $k=k_0/\mu_2=1$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_x/P_0 ve σ_y/P_0 normal gerilme değerleri

y/h	σ_x/P_0			σ_y/P_0		
	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)	Birinci [23]	Bu çalışma	Hata (%)
0.50	-0.1246	-0.1240	0.45	-0.5000	-0.5000	0.00
0.4	-0.0996	-0.0991	0.46	-0.2493	-0.2471	0.87
0.35	-0.0887	-0.0886	0.12	-0.2485	-0.2469	0.65
0.3	-0.0787	-0.0786	0.17	-0.2474	-0.2453	0.85
0.25	-0.0695	-0.0691	0.64	-0.2461	-0.2443	0.75
0.2	-0.0617	-0.0613	0.57	-0.2445	-0.2421	0.98
0.15	-0.0535	-0.0534	0.18	-0.2429	-0.2401	1.15
0.1	-0.0465	-0.0464	0.15	-0.2410	-0.2384	1.10
0.05	-0.0401	-0.0396	1.29	-0.2391	-0.2365	1.07
0.00	-0.0342	-0.0340	0.65	-0.2371	-0.2341	1.26
0.00	0.0089	0.0088	0.57	-0.2371	-0.2341	1.26
-0.05	0.0220	0.0219	0.67	-0.2350	-0.2316	1.45
-0.1	0.0348	0.0346	0.48	-0.2329	-0.2293	1.53
-0.15	0.0474	0.0469	1.10	-0.2309	-0.2281	1.23
-0.2	0.0599	0.0594	0.88	-0.2290	-0.2268	0.97
-0.25	0.0724	0.0721	0.45	-0.2273	-0.2256	0.73
-0.3	0.0850	0.0843	0.79	-0.2258	-0.2239	0.85
-0.35	0.0978	0.0973	0.56	-0.2245	-0.2220	1.12
-0.4	0.1109	0.1097	1.05	-0.2235	-0.2212	1.02
-0.45	0.1245	0.1234	0.88	-0.2229	-0.2212	0.79
-0.5	0.1386	0.1372	1.03	-0.2227	-0.2204	1.06



Şekil 7. $a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.5$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_x/P_0 boyutsuz normal gerilme dağılımı



Şekil 8. $a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=1.7778$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.3$, $h_1/h=0.5$ olması durumuna ait $x/h=0$ simetri kesitindeki σ_y/P_0 boyutsuz normal gerilme dağılımı

KAYNAKLAR

- [1] Y. Weitsman, On the unbonded contact between plates and an elastic half space, *Journal of Applied Mechanics-ASME*. 36:2 (1969) 198–202.
- [2] L.M. Keer, J. Dundurs, K.C. Tsai, Problems involving a receding contact between a layer and a half space, *Journal of Applied Mechanics-ASME*. 39:4 (1972) 1115–1120.
- [3] M. Ratwani, F. Erdogan, On the plane contact problem for a frictionless elastic layer, *International Journal of Solids and Structures*. 9:8 (1973) 921–936.
- [4] M.R. Geçit, Axisymmetric contact problem for an elastic layer and elastic foundation, *International Journal of Engineering Science*. 19:6 (1981) 747–755.
- [5] D. Nowell, D.A. Hills, Contact problems incorporating elastic layers, *International Journal of Solids and Structures*. 24 (1988) 105-115.
- [6] S.K. Chan, I.S. Tuba, A finite element method for contact problems of solid bodies -part I: theory and validation, *International Journal of Mechanical Sciences*. 13:7 (1971) 615–625.
- [7] A. Francavilla, O.C. Zienkiewicz, A note on numerical computation of elastic contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 9 (1975) 913–924.
- [8] H.-S. Jing, M.-L. Liao, An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction, *Computers & Structures*. 35:5 (1990) 571–578.
- [9] J.A. Garrido, A. Foces, F. Paris, BEM applied to receding contact problems with friction, *Mathematical and Computer Modelling*. 15 (1991) 143–154.
- [10] J.A. Garrido, A. Lorenzana, Receding contact problem involving large displacements using the BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 21:4 (1998) 295–303.
- [11] G.G. Adams, D.B. Bogy, The plane symmetric contact problem for dissimilar elastic semi-infinite strips of different widths, *Journal of Applied Mechanics- ASME*. 44 (1977) 604-610.
- [12] J.P. Dempsey, Z.G. Zhao, L. Minnetyan, H. Li, Plane contact of an elastic layer supported by a Winkler foundation, *Journal of Applied Mechanics-ASME*. 57 (1990) 974-980.
- [13] A. Blázquez, F. París, V. Mantic, BEM solution of two-dimensional contact problems by weak application of contact conditions with non-conforming discretizations, *International Journal of Solids and Structures*. 35:24 (1998) 3259–3278.
- [14] N. Guyot, F. Kosior, G. Maurice, Coupling of finite elements and boundary elements methods for study of the frictional contact problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 181:1–3 (2000) 147–159.
- [15] S. El-Borgi, R. Abdelmoula, L. Keer, A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate, *International Journal of Solids and Structures*. 43:3–4 (2006) 658–674.
- [16] C. Oysu, Finite element and boundary element contact stress analysis with remeshing technique, *Applied Mathematical Modelling*. 31 (2007) 2744–2753.
- [17] E. Çakıroğlu, *İki elastik çeyrek düzleme oturan ve rijit bir paç ile bastırılan elastik tabaka probleminin çözümü ve yapay sınır ağı uygulaması*, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011.
- [18] Y.Z. Chen, X.Y. Lin, Z.X. Wang, Singular integral equation method for contact problem for rigidly connected punches on elastic half-plane, *Applied Mathematics and Computation*. 217 (2011) 5680–5694.

- [19] M. Yaylacı, *İki elastik çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın temas problemi*, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.
- [20] İ. Çömez, Contact problem of a functionally graded layer resting on a Winkler foundation, *Acta Mechanica*. 224 (2013) 2833-2843.
- [21] E. Oner, M. Yaylacı, A. Birinci, Solution of a receding contact problem using an analytical method and a finite element method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 9 (2014) 333-345.
- [22] H. Gun, X.W. Gao, Analysis of frictional contact problems for functionally graded materials using BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 38 (2014) 1–7.
- [23] A. Birinci, *Elastik mesnete oturan çift şerit problemi*, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
- [24] ANSYS, Swanson Analysis Systems Inc., Houston PA, USA (2007).
- [25] M. Yaylacı, *İki elastik çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın temas problemi*, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.