



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## DEĞİŞKEN KALINLIKLI DÖNEL SİMETRİK DAİRESEL PLAKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN ANALİZİ

Murat Altekin<sup>1</sup>, Ali Mercan<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

### Simge Listesi

a	plak yarıçapı
q	yayıllı yük
r	radyal koordinat
t	plak kalınlığı
u	radyal yer değiştirme
w	çökme
D	eğilme rijitliği
E	Elastisite modülü
$\alpha$	yük parametresi
$\beta$	dönme
$\eta$	kalınlık parametresi
$\nu$	Poisson oranı
$m_r$	eğilme momenti
$n_r$	mambran kuvvet
$q_r$	kesme kuvveti
$W_0$	plağın merkezindeki boyutsuz çökme
$( )'$	$\frac{d( )}{dr}$

## ABSTRACT

Geometrically nonlinear analysis of axisymmetric circular plates of variable thickness was made numerically. Clamped circular plate under uniform transverse pressure was investigated. The material of the plate was assumed to be homogeneous and isotropic. Finite difference and Newton-Raphson methods were used to solve the system of ordinary differential equations. The central deflection of the plate was compared with the solutions in the literature for both uniform and varying thickness.

## ÖZET

Değişken kalınlıklı dönel simetrik dairesel plakların geometrik doğrusal olmayan eğilme analizi sayısal olarak yapıldı. Çevresi boyunca ankastre dairesel plağın düzgün yayılı transvers yük altındaki davranışı incelendi. Plak malzemesinin homojen ve izotrop olduğu kabul edildi. Sayısal hesaplarda kullanılan sıradan (adi) diferansiyel denklem takımının çözümü için sonlu farklar ve Newton-Raphson yöntemleri kullanıldı. Plak kalınlığının sabit ve değişken olması durumları incelenerek orta noktadaki çökme değeri için literatürdeki değerlerle karşılaştırma yapıldı.

## GİRİŞ

Dairesel plakların analizi mekaniğin en çok çalışılan alanlarından biri olma özelliğini korumaya devam etmektedir [1-11]. Malzeme tasarrufu ve hafiflik gibi nedenlerden veya tasarım amaçlarından dolayı değişken kalınlıklı dairesel plaklar yaygın biçimde çeşitli mühendislik yapılarında ve makinalarda yapısal eleman olarak kullanılmaktadır [4]. Konuyla ilgili çalışmalar eğilme ve titreşim analizleri üzerine yoğunlaşmış olup, ilgili alanda ilk çalışmalara yirminci yüzyılın başlarında rastlanmaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki gelişime paralel olarak zamanla doğrusal analizden doğrusal olmayan analize doğru bir yöneliş gözlemlenmiştir. Plak problemlerinde analitik çözümün yapılabilmesi (i) sınır koşullarına, (ii) malzeme özelliklerine, (iii) yükleme durumuna ve (iv) kullanılan teoriye bağlı olduğundan çalışmaların büyük çoğunluğunda çeşitli sayısal yöntemlere başvurulmuştur. Ritz, sonlu elemanlar, sonlu farklar, pertürbasyon, kollokasyon gibi yöntemlerden farklı plak teorilerinin uygulandığı analizlerde yararlanılmıştır (bu konudaki başlıca çalışmalara [1-15] numaralı kaynaklarda yer verilmiştir).

Çalışmalarda genellikle homojen ve izotrop malzeme özellikleri göz önüne alınmış ve çoğunlukla ince plaklar çalışılmıştır. Plak kalınlığı radyal koordinatın bir fonksiyonu olarak tanımlanmış olup kalınlık değişiminin doğrusal ve doğrusal olmayan durumları incelenmiştir. Araştırmaların çoğunda dönel simetrik hale odaklanılmıştır. Yüzeysel taşıyıcı sistemlerin araştırıldığı engin literatürün büyük bölümünde olduğu gibi değişken kalınlıklı dairesel plakların üzerine yapılmış araştırmalarda da sıklıkla plak çevresi basit mesnetli veya ankastre olarak modellenmiştir.

Bu çalışmada, değişken kalınlıklı dönel simetrik dairesel plakların geometrik doğrusal olmayan eğilme analizi sayısal olarak yapılmıştır. Çevresi boyunca ankastre plağın düzgün yayılı transvers yük altındaki davranışı incelenmiştir. Sıradan diferansiyel denklem takımının çözümü için sonlu farklar ve Newton-Raphson yöntemleri kullanılmıştır. Bu çalışmada hesaplanan değerlerle literatürde mevcut olan sonuçlar karşılaştırılmış ve birbirine çok yakın

değerler elde edildiği görülmüştür. Farklı kalınlık parametreleri dikkate alınarak çökme ve eğilme momenti için duyarlık analizi yapılmıştır.

## 2. FORMÜLASYON

Radyal doğrultuda değişken kalınlıklı dairesel plakların geometrik doğrusal olmayan eğilmesinin inceleneceği bu çalışmada kullanılacak denklemlerin elde edilmesinde [7-11] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Belirtilen kaynaklardan alınan (i) denge denklemleri, (ii) kesit tesiri-yer değiştirme bağıntıları, (iii) şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları düzenlenerek (1-6) denklemleri elde edilmiştir.

$$(m_r r)' - m_\theta - r q_r = 0 \quad (1)$$

$$(n_r r)' - n_\theta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r}(q_r r)' + q + n_r w'' + n_\theta \left(\frac{1}{r} w'\right) = 0 \quad (3)$$

$$m_r = D \left( -w'' - \frac{v}{r} w' \right) \quad (4)$$

$$\frac{1}{Et} (n_r - v n_\theta) = u' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (5)$$

$$w' = \beta \quad (6)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7)$$

Bu diferansiyel denklemler boyutsuzlaştırılarak sonlu farklar yöntemiyle cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Radyal doğrultuda ileri ve geri fark formülleri kullanılmıştır. Plak çevresindeki sınır koşulları ve plağın merkezindeki düzenlilik koşulları tam olarak sağlanmıştır.

## 3. SAYISAL SONUÇLAR

Çalışmada aşağıda belirtilen sayısal değerler ve parametreler kullanılmıştır.

$$a = 1\text{m}, \quad t_0 = 0.01\text{m}, \quad \nu = 0.3, \quad E = 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (8)$$

$$q = \frac{\alpha}{c^4} E, \quad c = \frac{a}{t_0}, \quad \alpha = 3, \quad t = t_0 e^{\eta r^2} = t_0 \exp(\eta r^2) \quad (9)$$

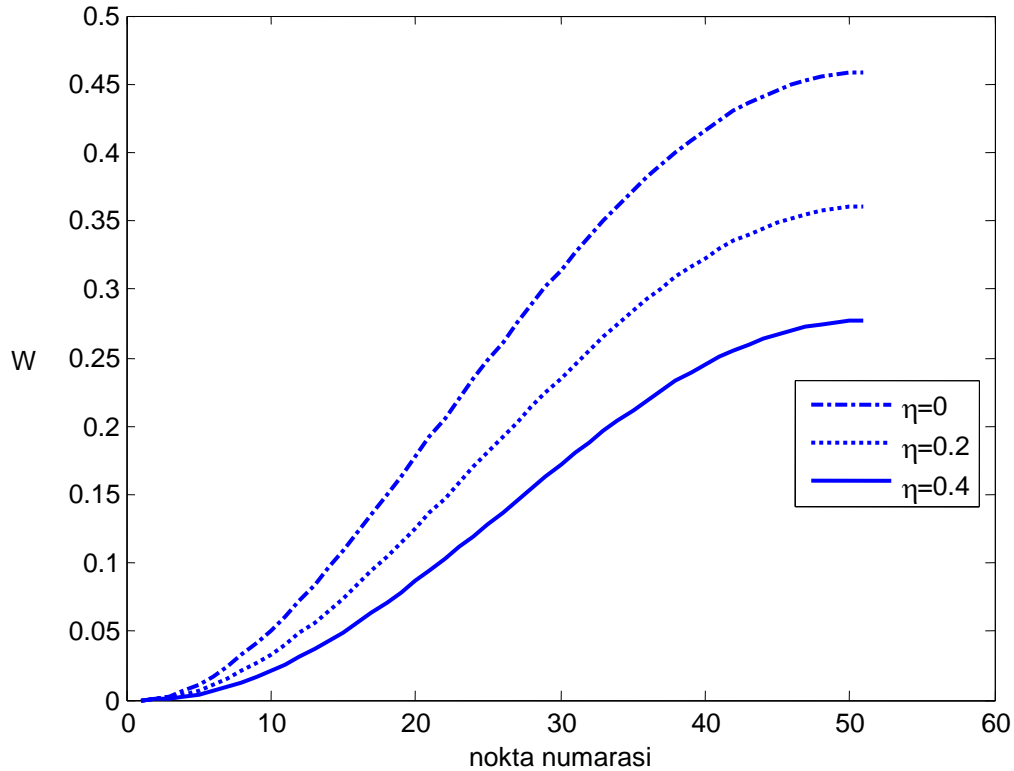
Sonlu farkların uygulandığı ızgara sisteminde nokta sayısının belirlenmesi için yakınsama çalışması yapılmış ve 51 nokta ile yeterli hassasiyette çözüme ulaşıldığı gözlenmiştir. Sonlu fark ızgarası 1 numaralı nokta plağın kenarına, 51 numaralı nokta ise plağın orta noktasına karşı gelecek şekilde oluşturulmuştur. Plağın merkezinde oluşan boyutsuz çökme büyüklükleri literatürdeki değerlerle karşılaştırılmış ve mukayese sonucunda çok uyumlu

değerler bulunduğu görülmüştür (Tablo 1). Çalışmada aşağıda belirtilen boyutsuz büyüklükler için duyarlılık analizi yapılmıştır (Şekil 1-2).

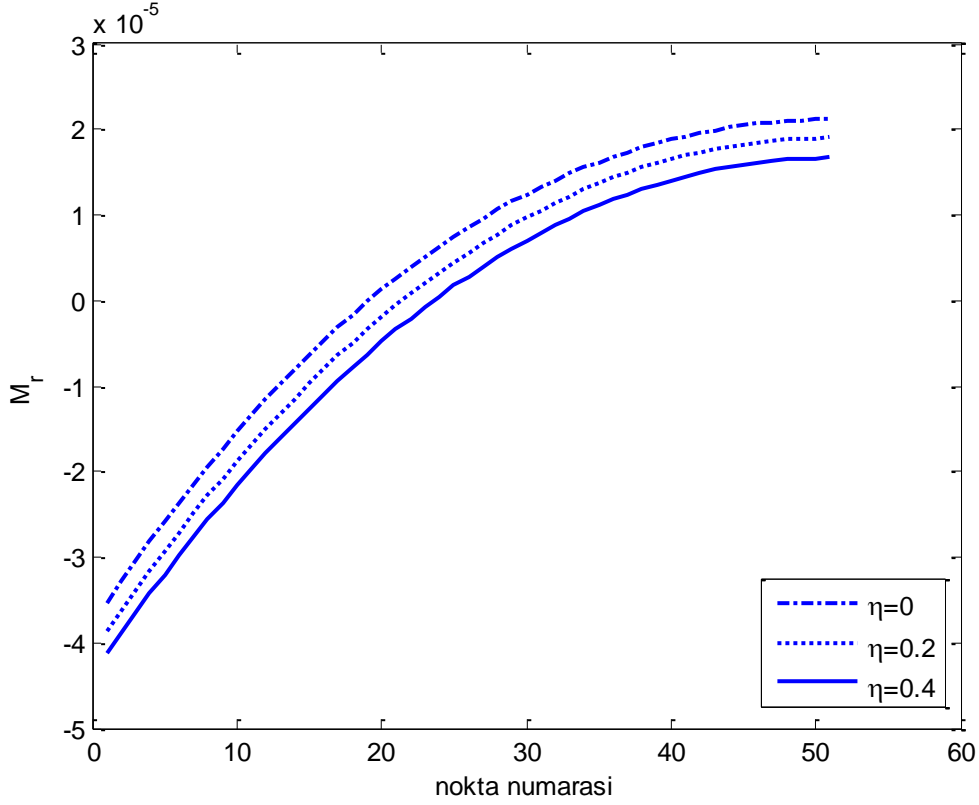
$$W = \frac{w}{t_0}, \quad M_r = \frac{m_r}{Et_0^2} \quad (10)$$

Tablo 1: Transvers düzgün yayılı yük etkisindeki ankastre dairesel plağın merkezindeki boyutsuz çökme parametresi

Problem no	$\eta$	Acıklama	(doğrusal hesap)	(doğrusal olmayan hesap)
			$W_0$	$W_0$
1	0	Sabit kalınlıklı	0.5112	0.4583 0.4588 [8]
2	0.2	Değişken kalınlıklı	0.3815	0.3602 0.3581 [8]
3	0.4	Değişken kalınlıklı	0.2852	0.2770 0.2768 [8]



Şekil 1: Ankastre plakta kalınlık parametresine göre boyutsuz çökme grafiği



Şekil 2: Ankastre plakta boyutsuz  $M_r$  eğilme momenti grafiği

#### 4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Literatürdeki çalışmaların çoğundan farklı olarak bazı kesit tesirlerinin de doğrudan belirlendiği bu çalışmada radyal doğrultuda değişken kalınlıklı ankastre dairesel plakların düzgün yayılı yük altında geometrik doğrusal olmayan eğilme analizi yapılmıştır. Dnel simetrik durum incelenmiştir. Plâğın merkezindeki çökme değerleri [8] numaralı kaynaktaki bulunan değerlerle karşılaştırılmış ve birbirine yakın değerler bulunduğu gözlenmiştir (Tablo 1).

Doğrusal olmayan hesapla bulunan çökme değerleri doğrusal hesapla bulunan sonuçlara göre daha küçük bulunmuştur.

Sabit kalınlıklı plağa kıyasla göz önüne alınan kalınlık fonksiyonuna göre değişken kalınlıklı dairesel plaktaki merkezi çökme en az %20 küçük bulunmuştur.

$\eta$  arttıkça plâğın merkezindeki  $M_r$  değeri azalmaktadır (Şekil 2).

#### TEŞEKKÜR

Bu araştırma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nce desteklenmiştir. Proje No: 2014-05-01-YL03

**KAYNAKLAR**

- [1] J. G. Chakravorty, *Bending of symmetrically loaded circular plate of variable thickness*, Indian J. Pure appl. Math., 11(2): 258-267, February 1980.
- [2] Huang Jiayin, Qin Shengli ve Xu Xiaoping, *The problem of the non-linear unsymmetrical bending for cylindrically orthotropic circular thin plate with variable thickness*, Applied Mathematics and Mechanics, China, Shanghai, 1997: English Edition, Vol. 18, No. 3
- [3] Francesco Vivio, Vincenzo Vullo. *Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness*, International Journal of Mechanical Science. 52 (2010) 1234-1252.
- [4] U.S Gupta, R. Lal, Seema Sharma. *Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness*. Journal of Sound and Vibration. 302 (2007) 1 - 17.
- [5] Ye Zhiming, *Application of Maple V to the nonlinear vibration analysis of circular plate with variable thickness*, Computers and Structures. 71 (1999) 481-488.
- [6] Dian-Yun Chen, Bao-Sheng Ren, *Finite element analysis of the lateral vibration of thin annular and circular plates with variable thickness*, Transactions of ASME. Vol. 120, July 1998.
- [7] B Banerjee. *Large deflections of circular plates of variable thickness*. Journal of Applied Mechanics 49, 1982, 243-245.
- [8] Jianqiao Ye. *Large deflection analysis of axisymmetric circular plates with variable thickness by the boundary element method*. Applied Mathematical Modelling 15, 1991, 325-328.
- [9] Wang Xin-zhi. *The large deflection problem of circular thin plate with variable thickness under uniformly distributed loads*. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) 4 (1), 1983, 107-116.
- [10] Huang Jiayin, Qin Shengli, Xu Xiaoping. *The problem of the non-linear unsymmetrical bending of cylindrically orthotropic circular thin plate with variable thickness*. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) 18 (3), 1997, 279-295.
- [11] Nai-Chien Huang. *Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells*. Journal of Applied Mechanics 31 (3), 1964, 447-457.
- [12] Wang Ying-jian. *Large deflection problem of thin orthotropic circular plate with variable thickness under uniform pressure*. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) 11 (4), 1990, 343-353.
- [13] Xin Zhu Zhou, Jian Jun Zheng. *A Simple Spline Integral Equation Method for Circular Plates with Variable Thickness*. Key Engineering Materials, Vols. 353-358, pp. 2687-2690, 2007.
- [14] S.K. Jalali , M.H. Naei. *Elastic buckling and moderately thick homogeneous circular plates of variable thickness*. Journal of solid mechanics vol. 2 No. 1 (2010) pp. 19-27
- [15] PK Sarker. *On the large deflection analysis of circular plates of variable thickness with edges elastically restrained against rotation*. Indian J. pure appl. Math., 12(12): 1477-1485, december 1981.