



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## ELASTİK ZEMİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KARE BİR PLAĞIN STATİK YÜKLER ALTINDA DAVRANIŞI

Mesut Şimşek<sup>1</sup>, Mustafa Aydın<sup>2</sup>, Hasan Hüseyin Yurtcu<sup>3</sup><sup>1</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye<sup>2</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye<sup>3</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

### ABSTRACT

In this study, the static behavior of a functionally graded (FG) square plate resting on the elastic foundation is investigated via Ritz method within the framework of Kirchhoff-Love plate theory. In order to apply Ritz method, the trial function for the deflection of the plate is expressed in the polynomial form. Boundary conditions are satisfied by adding an auxiliary function to the trial function. The effects of various material compositions, boundary conditions and the parameter of elastic foundation on the deflection and axial normal stress of the plate are examined.

### ÖZET

Bu çalışmada, elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kare bir plağın statik davranışı Ritz yöntemi ile Kirchhoff-Love plak teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Ritz yönteminin uygulanması için plak yer değiştirme fonksiyonu kuvvet serisine açılmıştır. Sınır koşulları yer değiştirme fonksiyonuna yardımcı bir fonksiyon ilave edilmesiyle sağlatılmıştır. Çalışmada, farklı malzeme kompozisyonları, farklı sınır koşulları ve elastik zemin parametresinin plağın yer değiştirmeleri ve eksenel normal gerilmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir.

### GİRİŞ

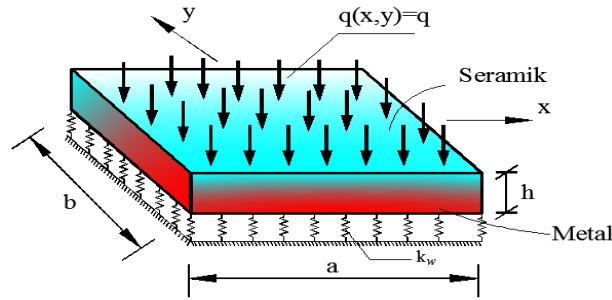
Plak elemanlar inşaat mühendisliği, makine mühendisliği, uçak mühendisliği gibi alanlarda yapısal eleman olarak sıkça kullanılmaktadır. Statik ve dinamik yükler etkisinde olan bu tip yapı elemanların davranışının bilinmesi önemli olmaktadır. Bu nedenle, plakların statik ve dinamik analiziyle alakalı pek çok çalışma yapılmış ve hala yapılmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) 1984 yılında Japonya'da bir uzay aracı projesi esnasında keşfedilmiştir. FDM klasik tabakalı kompozit malzemelere göre oldukça üstün özellikler içeren yeni nesil bir kompozit malzemedir. FDM' de elastisite modülü, kayma modülü, yoğunluk gibi malzeme özellikleri istenilen bir doğrultuda belli bir fonksiyona bağlı olarak tedricen değişmektedir. Bu sayede, klasik tabakalı kompozitlerde görülen tabakalar arası gerilme süreksizlikleri veya tabakaların birleşim yüzeyinden birbirinden ayrılması gibi olumsuzlukların önüne geçilmiş olur. FDM'ler sürekli değişen kompozisyonda genellikle iki farklı malzeme içerirler. FDM'ler sıcaklığın yüksek olduğu yüzeyi düşük yoğunluk, yüksek mukavemet, katılık ve ısı dirence sahip olan seramik ve sıcaklığın düşük olduğu yüzeyi tokluk, elektrik geçirgenliği ve işlenebilirliğe sahip olan metal olacak ve seramikten metale doğru kademeli veya devamlı derecelendirilmiş bir geçişe sahip olacak şekilde tasarlanmış

malzemelerdir. FDM'lerin potansiyel kullanım alanları arasında uzay taşıtları, endüstriyel malzemeler, termoelektrik soğutma sistemleri, biyomalzemeler ve ısı bariyer kaplamalar sayılabilir. FDM kiriş ve plakların statik ve dinamik davranışı çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir [1-11].

Bu çalışmada, farklı malzeme kompozisyonları için farklı sınır koşulları ve elastik zemin parametresinin plakta oluşan yer değiştirme ve gerilmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Problem enerji yaklaşımıyla formüle edilmiş ve sayısal olarak incelenmiştir. Bunun için probleme ait potansiyel enerji ifadesi Kirchhoff-Love plak teorisi için çıkarılmıştır. Bilindiği gibi, plak kalınlığı boyunca elastiklik özellikleri orta düzleme göre simetrik değilse, plak orta düzlemi ile tarafsız düzlem çakışmamaktadır. Burada tüm hesaplamalar önceden tespit edilen tarafsız eksenin konumuna göre yapılmıştır. Geometrik sınır koşullarını sağlaması için çökme fonksiyonu seriye açılmış ve polinom şeklinde ifade edilmiştir. Ritz metodu [12-16] kullanılarak minimum potansiyel enerji ilkesi gereğince denge denklemleri çıkarılmıştır. Formülasyonu çıkarılan problem için MATLAB programlama dilinde bir bilgisayar programı yazılmış ve FDM plağa ait yer değiştirmeler grafikler halinde verilmiştir.

### FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER

Düzensiz yayılı yük etkisinde elastik zemine oturan FD bir plak Şekil 1' de gösterilmiştir. Plağın üst malzemesi seramik ve alt malzemesi çelik olarak seçilmiştir. Plağın elastisite modülü ( $E$ ), kayma modülü ( $G$ ), kütle yoğunluğu ( $\rho$ ) ve Poisson oranı ( $\nu$ ) gibi malzeme özellikleri istenilen bir doğrultuda belli bir fonksiyona bağlı olarak tedricen değişmektedir.



Şekil 1. Düzensiz yayılı yük etkisinde elastik zemine oturan FD bir plak

Klasik karışım kuralına (rule of mixture) göre malzeme özelliklerinin değişimini veren ifade aşağıdaki gibidir;

$$P = P_U V_U + P_A V_A \quad (1)$$

Burada  $P$  sistemin etkili malzeme özelliğini ifade etmektedir.  $P_U$  ve  $P_A$  ise sırasıyla plağın üst ve alt yüzeylerindeki malzemeye ait malzeme özellikleridir.  $V_U$  ise üst yüzeydeki malzemenin hacim oranını,  $V_A$  ise alt yüzeydeki malzemenin hacim oranını göstermektedir. Bu iki hacim oranı arasında aşağıdaki gibi ilişki vardır;

$$V_U + V_A = 1 \quad (2)$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemeye sahip plakların etkili malzeme özelliklerinin değişimi için kuvvet serisi şeklinde bir ifade seçilmiştir. Üst malzemenin hacimce oranını veren ifade aşağıdaki eşitlikte verilmiştir;

$$V_U = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3)$$

Burada,  $k$  üst malzemeye ait hacim oranının plak kalınlığı boyunca değişimini belirleyen malzeme değişim katsayısıdır. Plak kalınlığı boyunca malzeme oranlarının değişimini belirleyen en önemli faktör  $k$  malzeme değişim katsayısıdır. (1) denkleminde  $V_A$  yerine  $1-V_U$  yazılırsa;

$$P = P_U V_U + P_A (1 - V_U) = P_U V_U + P_A - P_A V_U \quad (4)$$

$$P(z) = (P_U - P_A) V_U + P_A \quad (5)$$

elde edilir. (3) denkleminin dikkate alınmasıyla etkili malzeme özelliklerinin değişimi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$P(z) = (P_U - P_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_A \quad (6)$$

Burada  $P(z)$  etkili malzeme özelliklerinin plağın  $z$  eksenı boyunca değişimini veren genel bir ifadedir. Bu çalışmada plağa ait malzeme özellikleri aşağıdaki şekilde değişmektedir;

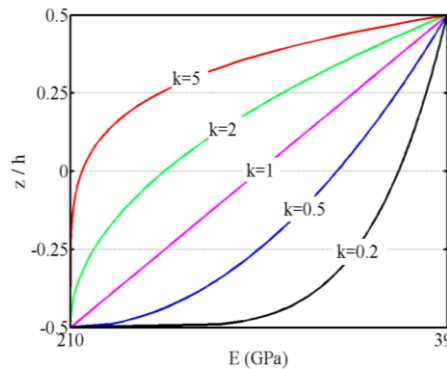
$$E(z) = (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \quad (7)$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (8)$$

$$\rho(z) = (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \quad (9)$$

$$\nu(z) = (\nu_U - \nu_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \nu_A \quad (10)$$

Burada,  $k$  parametresi  $0 \leq k \leq \infty$  sınırları arasındadır. Ayrıca denklem (7)' den  $z = -h/2$  ise  $E(z) = E_A$  ve  $z = h/2$  ise  $E(z) = E_U$  olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 2. Elastisite modülünün kalınlık boyunca değişimi

Şekil 2’ den açıkça görülmektedir ki  $k=1$  değerini aldığımda elastisite modülü doğrusal olarak değişmekte ve  $k$  ’nın diğer değerlerinde ise elastisite modülü doğrusal olmayan şekilde değişmektedir.

### ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİ VE DENGE DENKLEMLERİ

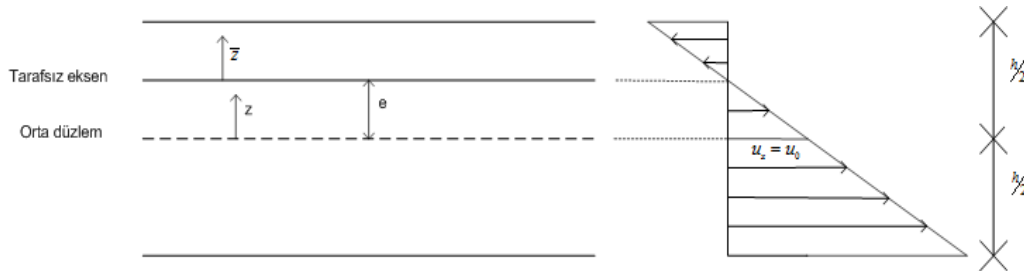
Plâğın şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dV \quad (11)$$

Burada  $\sigma$  gerilme tensörünü,  $\varepsilon$  şekil değiştirme tensörünü belirtmektedir. Gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bünye bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Burada  $\varepsilon_{xx}$  ve  $\varepsilon_{yy}$  normal şekil değiştirmeyi,  $\varepsilon_{xy}$  kayma şekil değiştirmesini ifade etmektedir. Homojen olmayan plaklarda elastisite modülü kalınlık boyunca simetrik olmadığı için tarafsız eksen ile plak orta düzlemi çakışmamaktadır. Bundan dolayı homojen olmayan plaklarda eğilme ve uzama arasında bir etkileşim meydana gelmektedir. Eğilme ve uzama arasındaki bu etkileşimi dikkate alabilmek için  $u$  ve  $v$  düzlem içi yerdeğiştirmelerini hesaplamamız gerekir.



Şekil 3. Tarafsız eksenin yerinin belirlenmesi

Ancak Şekil 3’ de görüldüğü gibi tarafsız eksenin yerini belirleyip,  $z$  eksenini buradan tanımlanırsa, eğilme ve uzama arasındaki etkileşimi dikkate alabilmek için  $u$  ve  $v$  düzlem içi yer değiştirmelerini dikkate almaya gerek kalmaz. Burada tarafsız eksenin yeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır;

$$e = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (13)$$

Tarafsız eksene göre malzeme özellikleri aşağıdaki şekilde değişmektedir;

$$E(\bar{z}) = (E_U - E_A) \left( \frac{z+e}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \quad (14)$$

$$G(\bar{z}) = \frac{E(\bar{z})}{2[1+\nu(\bar{z})]} \quad (15)$$

$$\rho(\bar{z}) = (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z+e}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \quad (16)$$

$$\nu(\bar{z}) = (\nu_U - \nu_A) \left( \frac{z+e}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \nu_A \quad (17)$$

Burada,  $z$  eksenini tarafsız eksenden tanımlanırsa Kirchhoff-Love plak teorisine göre plağın yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$u_x(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad u_y(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (18)$$

Şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki kinematik ilişkiler aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (19)$$

(11), (12) ve (19) denklemleri kullanılarak tarafsız eksene göre plağın şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-b/2-a/2}^{b/2} \int_{-b/2-a/2}^{a/2} D_{xx} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-b/2-a/2}^{b/2} \int_{-b/2-a/2}^{a/2} \bar{D}_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{1}{2} \int_{-b/2-a/2}^{b/2} \int_{-b/2-a/2}^{a/2} D_{xx} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \int_{-b/2-a/2}^{b/2} \int_{-b/2-a/2}^{a/2} (D_{xx} - \bar{D}_{xx}) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (20)$$

Burada,  $D_{xx}$  ve  $\bar{D}_{xx}$  kesit rijitlikleridir ve aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$D_{xx} = \int_{-h/2-e}^{h/2-e} \frac{E(\bar{z})}{1-\nu(\bar{z})^2} \bar{z}^2 d\bar{z} \quad \bar{D}_{xx} = \int_{-h/2-e}^{h/2-e} \frac{E(\bar{z})\nu(\bar{z})}{1-\nu(\bar{z})^2} \bar{z}^2 d\bar{z} \quad (21)$$

Elastik zeminden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$U_z = \frac{1}{2} \iint k_w w^2(x, y) dx dy \quad (22)$$

Dış kuvvetin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibidir;

$$U_d = -\iint q w(x, y) dx dy \quad (23)$$

Problemin toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\Pi = U_i + U_d + U_z \quad (24)$$

$w(x, y)$  çökme fonksiyonu, kinematik sınır koşullarını sağlayacak şekilde aşağıdaki seriye açılmıştır;

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{mn} G_m(x, y) x^{m-1} y^{n-1} \quad (25)$$

Burada  $A_{mn}$  belirlenmesi gereken bilinmeyen katsayılar ve  $G_m(x, y)$  yardımcı fonksiyondur.  $G_m(x, y)$  yardımcı fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$G_m(x, y) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^p \left(x - \frac{a}{2}\right)^q \left(y + \frac{b}{2}\right)^r \left(y - \frac{b}{2}\right)^s \quad (26)$$

Burada,  $p, q, r, s$  sınır koşullarıyla ilgili üslerdir. Dört kenarı basit mesnetli kare bir plak için  $p, q, r, s = 1$  ve dört kenarı ankastre mesnetli kare bir plak için  $p, q, r, s = 2$  olmaktadır. Denge konumunda toplam potansiyel enerjinin minimum olması ilkesi gereğince aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{kl}} = 0 \quad k, l = 1, 2, 3, \dots, N \quad (27)$$

Bu eşitlik kullanılarak problemin denge denklemi aşağıdaki gibi çıkarılır;

$$[K]\{A\} = \{F\} \quad (28)$$

Burada  $[K]$  rijitlik matrisi ve  $\{F\}$  ise yük vektörüdür.

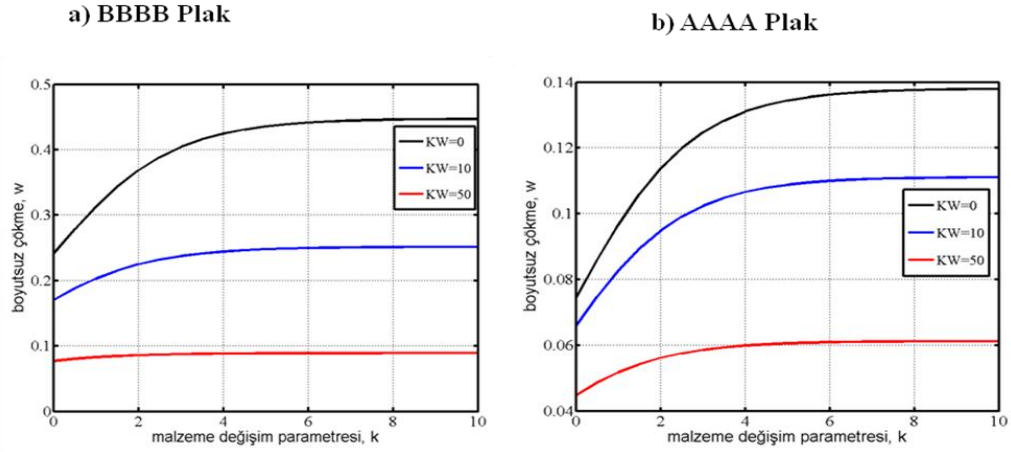
### SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş kare bir plağın statik davranışı Kirchhoff-Love plak teorisi kullanılarak incelenmiştir. Malzemenin üst yüzeyi seramik ( $E_U = 390$  GPa  $\nu_U = 0.3177$ ) ve alt yüzeyi çelik ( $E_A = 210$  GPa  $\nu_A = 0.3$ ) olacak şekilde seçilmiştir. FDM plağa ait yerdeğiştirme grafikleri dört kenarı basit mesnetli kare bir plak ve dört kenarı ankastre mesnetli kare bir plak için çizdirilmiştir. Sayısal sonuçlar için takip eden geometrik değerler kullanılmıştır,  $a = 5$  m,  $b = 5$  m,  $h = 0.1$  m. Fonksiyonel derecelendirilmiş kare plak Winkler elastik zeminine oturmaktadır. Yer değiştirme fonksiyonunda  $N = 8$  olarak alınmış ve tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumda seride 64 adet bilinmeyen terim olmaktadır. Daha genel sonuçlar elde edebilmek için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır:

$$\text{Boyutsuz zemin parametresi:} \quad K_w = \frac{k_w a^4}{D}, \quad D = \frac{E_A h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (29)$$

$$\text{Boyutsuz çökme:} \quad W = 10 \frac{E_U h^3}{q a^4} w \quad (30)$$

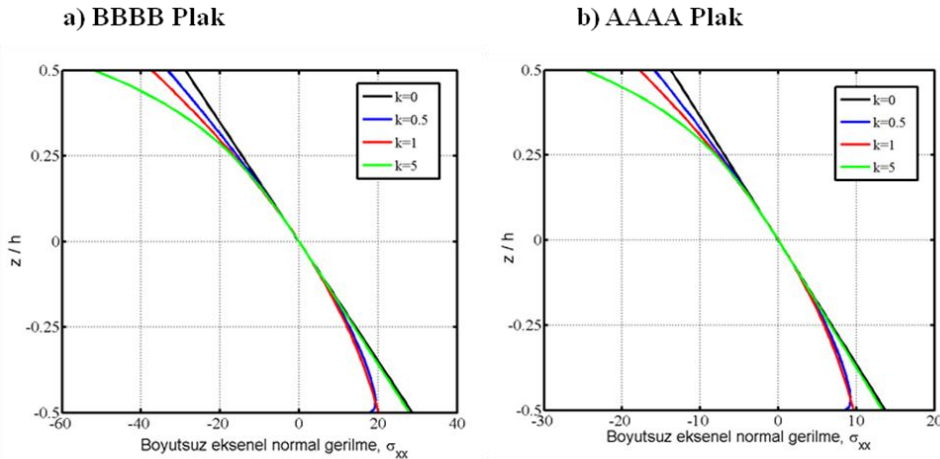
$$\text{Boyutsuz eksenel normal gerilmeler:} \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx} h}{q a}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy} h}{q a} \quad (31)$$



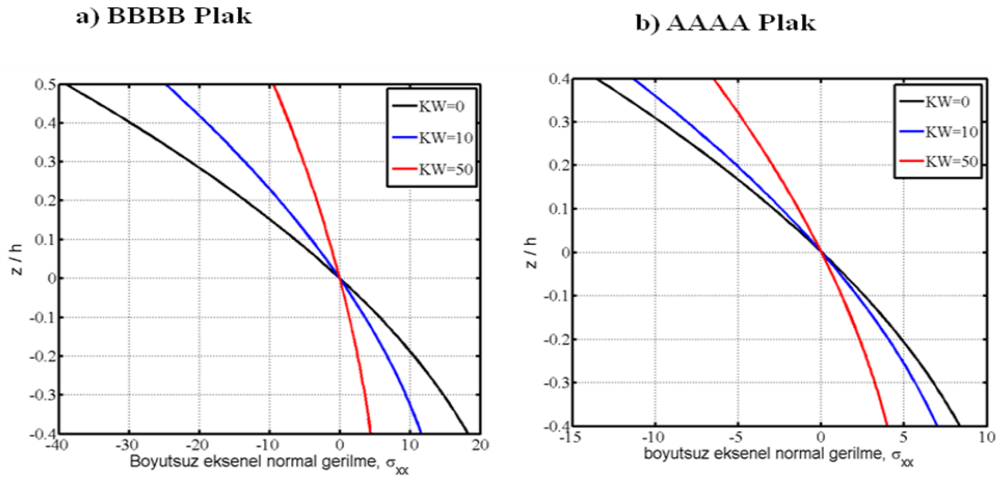
Şekil 4. Zemin parametresinin farklı değerleri için boyutsuz çökme dağılımı

Şekil 4’de zemin parametresinin farklı değerleri için ( $K_w = 0, 10, 50$ ) boyutsuz çökme dağılımı görülmektedir. Dört kenarı basit mesnetli (BBBB plağı) ve dört kenarı ankastre mesnetli (AAAA plağı) plaklar için sonuç verilmiştir. Grafiklerden açıkça görülmektedir ki; zemin parametresi arttıkça boyutsuz çökmeler azalmaktadır. Bunun sebebi zemin parametresini artırdığımız da sistemin rijitliğinin artması dolayısıyla çökmelerin azalmasıdır. Aynı zamanda grafiklerden görülmektedir ki malzeme değişim parametresi arttıkça boyutsuz çökmeler de artmaktadır. Bunun sebebi malzeme değişim parametresi arttığında sistemin elastisite modülünün alt malzemenin elastisite modülüne yaklaşması ve dolayısıyla azalmasıdır. Buna bağlı olarak plak rijitliği azaldığı için çökmeler artmaktadır.

Şekil 5’de malzeme değişim parametresinin farklı değerleri için ( $k = 0, 0.5, 1, 5$ ) boyutsuz eksenel normal gerilme dağılımının kalınlık boyunca değişimi görülmektedir. Grafiklerden açıkça görülmektedir ki; malzeme değişim parametresi sıfır değerini aldığı anda eksenel normal gerilme dağılımı kalınlık boyunca doğrusal olarak değişmekte ve malzeme değişim parametresinin sıfırdan farklı değerleri için ise eksenel normal gerilme dağılımı kalınlık boyunca doğrusal olmayan şekilde değişmektedir.

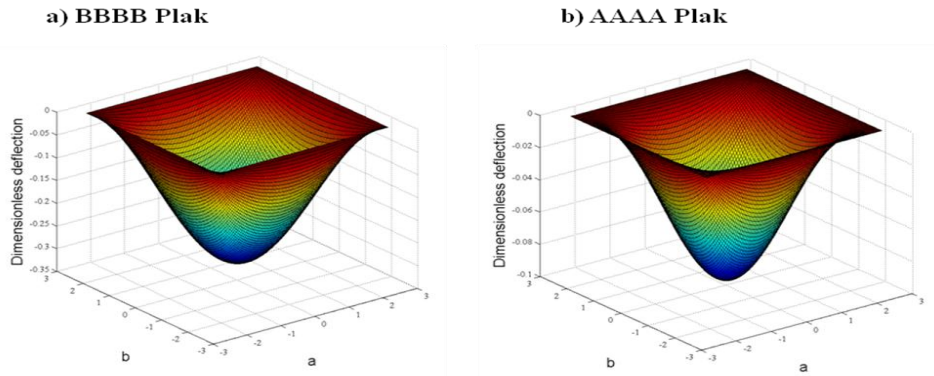


Şekil 5. Malzeme değişim parametresinin farklı değerleri için boyutsuz eksenel normal gerilme dağılımı



Şekil 6. Zemin parametresinin farklı değerleri için boyutsuz aksel gerilme dağılımı

Şekil 6'da zemin parametresinin farklı değerleri için ( $K_w = 0, 10, 50$ ) boyutsuz aksel normal gerilme dağılımının kalınlık boyunca değişimi görülmektedir. Sınır koşulları BBBB ve AAAA kare plak için seçilmiştir. Burada malzeme değişim parametresi  $k = 1$  olarak sabit değerde alınmıştır. Grafiklerden açıkça görülmektedir ki zemin parametresi arttığında boyutsuz aksel normal gerilmeler kalınlık boyunca artmaktadır.



Şekil 7. Boyutsuz çökme dağılımı (plağın şekil değiştirmesi)

Şekil 7' de plağın deforme olmuş hali gösterilmiştir. Burada, zemin yay parametresi  $K_w = 0$  ve malzeme değişim parametresi  $k = 1$  kabul edilmiştir. Sınır koşulları BBBB ve AAAA kare plak için seçilmiştir.

## SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş kare bir plağın statik davranışı Kirchhoff-Love plak teorisi kullanılarak incelenmiştir. Sayısal analizler sonucunda zemin yay parametresinin ( $K_w$ ) ve malzeme değişim parametresinin ( $k$ ) plağın statik davranışı üzerinde oldukça etkili olduğu görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] A. Chakraborty, S.Gopalakrishnan S, J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45 (2003) 519–39.
- [2] A.Fallah, M.M. Aghdam, Nonlinear free vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 30 (2011) 571–83.



- [3] L.L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Y. Xiang, Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 16 (2009) 488–502.
- [4] S. Kitipornchai, L.L. Ke, J. Yang, Y. Xiang, Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 962–82.
- [5] M. Simsek, Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 1 (2009) 11.
- [6] M. Simsek, Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design* 240 (2010) 697–705.
- [7] M. Simsek, Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Composite Structures* 92 (2010) 904–17.
- [8] M. Simsek, S Cansiz, Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load. *Composite Structures* 94 (2012) 861–78.
- [9] S.A. Sina, H.M. Navazi, H. Haddadpour, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials & Design* 30 (2009) 741–7.
- [10] J.Ying, C.F. Lü, W.Q. Chen, Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. *Composite Structures* 84 (2008) 209–19.
- [11] H.J. Xiang, J. Yang, Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction. *Composites Part B: Engineering* 39 (2008) 292–303
- [12] Y. Narita, Effect of point constraints on transverse vibration of cantilever plates, *Journal of Sound and Vibration* 102 (1985) 305–313.
- [13] R. B. Bhat, Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh–Ritz method, *Journal of Sound and Vibration* 102 (1985) 493–499.
- [14] C. S. Kim, P. G. Young, S. M. Dickinson, On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh–Ritz method, *Journal of Sound and Vibration* 143 (1990) 379–394.
- [15] C. S. Kim, S. M. Dickinson, The flexural vibration of rectangular plates with position supports, *Journal of Sound and Vibration* 117 (1987) 249–261.
- [16] R. B. Bhat, Vibration of rectangular plates on point and line supports using characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz Method, *Journal of Sound and Vibration* 149 (1991) 170–172.