学校编码：10384　　　　　　　　分类号_______密级______
学号：19020130154154　　　　　　　　UDC_______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

几类 Schrödinger–Kirchhoff 型椭圆方程解的存在性研究

Studies on the existence of solutions for some Schrödinger–Kirchhoff-type elliptic equations

吴　越

指导教师姓名：刘轼波　教授
专　业　名　称：基　础　数　学
论文提交日期：2016 年 4 月
论文答辩时间：2016 年 5 月
学位授予日期：2016 年 6 月

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2016 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文得到国家自然科学基金 (项目资助号: 11171204) 与福建省自然科学基金–杰出青年科学基金 (项目资助号: 2014J06002) 的资助。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

这篇论文分为五个部分.

第一章绪论, 简要介绍了论文的选题背景、研究现状以及本文主要研究内容. 并且给出了论文中所涉及的相关概念、定理等预备知识.

第二章, 讨论了一类带周期位势的 Schrödinger–Kirchhoff 方程正解的存在性问题. 利用山路引理、问题的 $\mathbb{Z}^3$– 平移不变性以及 Lions 集中紧致原理, 该章证明了问题至少存在一个正基态解.

第三章, 讨论了带势阱的 Schrödinger–Kirchhoff 方程正解的存在性问题. 利用山路引理并通过比较原泛函与极限泛函的能量, 该章证明了此问题至少存在一个正基态解.

第四章, 研究了一类 4 次超线性的 Schrödinger–Kirchhoff 方程. 此处的位势是可变号的, 因此 Schrödinger 算子具有有限维负空间. 该章首先证明 Palais-Smale 条件成立, 进而利用 Morse 理论得出了非平凡解的存在性结果.

最后一章, 研究了一类非线性项为幂次函数 u^p 的 Schrödinger–Kirchhoff 方程. 该章构造了一个新的流形, 通过对能量泛函在该流形上取约束极小, 证明了当 $1 < p < 5$ 时, 问题存在正径向对称解.

关键词: Schrödinger–Kirchhoff 型方程; 变分法; 4 次超线性

ABSTRACT

This dissertation consists of five parts.

In chapter 1, we briefly introduce the research background, present status and the overview of this work. Moreover, we give some preliminaries involved in this dissertation.

In chapter 2, we discuss a class of Schrödinger–Kirchhoff equations with periodic potentials. By using the mountain pass lemma, the $\mathbb{Z}^3$-translation invariance of this problem and the Lions' concentration-compactness principle, the existence of positive ground state is proved.

Chapter 3 is devoted to a class of Schrödinger–Kirchhoff equations with potential well. We obtain a positive ground state solution by using the mountain pass lemma and comparing the energy between functionals.

In chapter 4, we consider a class of 4-superlinear Schrödinger–Kirchhoff equations. The potentials are indefinite of sign so that the Schrödinger operator possesses a finite dimensional negative space. By proving the Palais-Smale condition hold and making use of the Morse theory, we get nontrivial solutions for this type of problems.

The last chapter is concerned with a class of Schrödinger–Kirchhoff equations with pure power nonlinearities u^p. In this chapter, we construct a new manifold and then minimize the energy functional on this manifold. We get the existence of positive radial solutions for this problem whenever $1 < p < 5$.

Key Words: Schrödinger–Kirchhoff-type equations; variational methods; 4-superlinear

目　录

摘　要 I

ABSTRACT III

第一章　绪 论 1

1.1 研究背景 1

1.2 本文概述 6

1.3 预备知识 8

第二章　带周期位势的 Schrödinger–Kirchhoff 型问题 13

2.1 引言及结论 13

2.2 山路几何 14

2.3 结论的证明 18

第三章　带势阱的 Schrödinger–Kirchhoff 型问题 21

3.1 引言及结论 21

3.2 结论的证明 22

第四章　带不定位势的 Schrödinger–Kirchhoff 型问题 27

4.1 引言及结论 27

4.2 Palais-Smale 条件 29

4.3 临界群及定理 4.1 的证明 33

4.4 定理 4.2 的证明 36

第五章　带幂次非线性项的 Schrödinger–Kirchhoff 问题 39

5.1 引言及结论 39

5.2 结论的证明 40

参考文献 47

攻读博士学位期间的研究成果 55

致谢 57

CONTENTS

Abstract (in Chinese) I
Abstract (in English) III
Chapter 1 Introduction 1
2.1 Research Background 1
2.2 Overview of this work 6
2.3 Preliminaries 8
Chapter 2 The Schrödinger–Kirchhoff-type problems with periodic potentials 13
2.1 Introduction and main results 13
2.2 The mountain pass geometry 14
2.3 Proof of main results 17
Chapter 3 The Schrödinger–Kirchhoff-type problems with potential well 21
3.1 Introduction and main results 21
3.2 Proof of main results 22
Chapter 4 The Schrödinger–Kirchhoff-type problems with indefinite potentials 27
4.1 Introduction and main results 27
4.2 The Palais-Smale condition 29
4.3 Critical groups and proof of Theorem 4.1 33
4.4 Proof of Theorem 4.2 36
Chapter 5 The Schrödinger–Kirchhoff-type problems with pure power nonlinearities 39
3.1 Introduction and main results 39
3.2 Proof of main results 40
References 47
Academic achievements 55
Acknowledgements 57

第一章　绪 论

1.1 研究背景

变分原理是自然界中的一条普遍原理, 它将自然界中的很多问题转化为讨论某个泛函在特定条件下临界点的存在问题. 例如微分几何中的等周问题、测地线问题以及极小曲面问题都可以看成变分问题. 又如在物理、工程、经济、管理等许多学科也有着丰富的应用.

极值点是一类特殊形式的临界点. 古典变分理论的核心内容便是寻找泛函的极值. 我们知道, 在有限维空间中, 函数是连续且强制的便可以推出函数可达极小值. 但是由于缺乏紧性, 这一结论在无穷维空间并不成立. 为了将之推广到无穷维空间, 可以将泛函限制在一个列紧集上, 然而在实际应用中这个条件过强. 19 世纪, Poincaré (1887) 和 Hilbert(1898) 的工作证明了 Dirichlet 原理, 而且由此产生了极小化序列方法. 20 世纪初, 意大利数学家 Tonelli 引进了泛函下半连续的概念. 这样, 当泛函是强制且弱下半连续的, 只要无穷维空间具有弱紧性, 便可以保证极小化序列存在且极小值可达. 而为了保证泛函的弱下半连续性, 常需要加上凸性条件. 这种方法直到今天都是研究泛函极值问题的重要手段. R. S. Palais 和 S. Smale 于 1964 年在他们的工作 [1] 中将流形和函数本身结合起来考虑, 提出了 Palais-Smale 条件. 该条件是添加在函数自身上的一种紧性条件, 取代了空间的紧性以及函数自身的强制性与凸性. 该条件结合 Ekeland 变分原理 [2] 得出了一个极值存在性定理, 具有较大的优越性.

Euler-Lagrange 方程的解一般情况下并不是其对应泛函的极值点, 而是对应泛函的临界点. 此时, 古典变分方法显然不能处理此类问题, 我们需要完全不同的理论. 由于主要依靠的是拓扑工具, 所以这部分临界点理论常被称作大范围变分法. 它的主要任务是研究泛函的临界点的存在性与多重性, 以及临界点附近的拓扑性质, 主要内容有极小极大原理, Morse 理论, Ljusternik-Schnirelmann 理论以及指标理论. 这些理论的主要思想基础是形变引理, 即若函数在两个不同水平集之间没有临界点, 那么在一定条件下, 其中一个水平集必然可以形变收缩到另一个水平集. 因此, 当两个水平集的拓扑性质不同时, 它们之间必然存在临界点. 形变引理的思想最早可追溯到二十世纪二三十年代 A. P. Morse 和 L. Ljusternik, L. Schnirelmann 各自以不同的角度建立起来的理论, 现在分别称为 Morse 理论和 Ljusternik-Schnirelmann 理论. 这两个理论的共同特点是通过研究水平集的拓扑性质来研究临界点的存在性, 因此它们与代数拓扑, 微分拓扑以及几何学之间有紧密的联系. 六十年代, R. S. Palais 和 S. Smale 又将这两个

理论推广到无穷维流形上, 使之可以得到更广泛的应用.

极小极大理论是由 G.D. Birkhoff 于 1917 年首先引入的. 该理论的一个突破性进展是 Ambrosetti 和 Rabinowitz 于 1973 年在工作 [3] 中提出的山路引理以及此后涌现出的一系列新的极小极大定理. 山路引理及其推广是临界点理论的重要组成部分, Rabinowitz 在 [4] 中总结了山路引理及其各种变体, 并且将其应用于微分方程的研究中. Willem 也在 [5] 中讨论了各种最小最大定理及其在微分方程中的应用. 近 30 年来，有关临界点存在性和多重性方面的工作方兴未艾, 涌现出诸如鞍点定理, 环绕定理, 局部环绕定理, 喷泉定理等等具有广泛应用意义的结果 (如 [6–12]). 这些定理可以处理既无上界又无下界的泛函的变分问题, 在椭圆边值问题, 弦振动的周期问题以及 Hamilton 系统的周期轨道问题等研究中, 取得了很有意义的新结果 (如 [13–28] 等及其所列参考文献).

本文主要研究临界点理论在所谓的 Schrödinger–Kirchhoff 型方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{SK}$$

中的应用, 其中 $a>0, b\geq 0$ 为常数. 该方程与 1883 年 Kirchhoff 在文献 [29] 中提出的物理模型有关. 具体来说, Kirchhoff 在研究横向震动引起的弦长改变的问题时, 曾给出以下方程:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1.1}$$

其中 ρ, h, P, L 是正常数, $u=u(x,t)$ 表示弦的位置. 该方程某种意义上说是 D'Alembert 波动方程的延伸. 该方程的一个突出特点是它含有一个非局部项 $\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x$, 该项依赖于平均值 $\frac{1}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x$, 所以该方程不再是逐点定义的, 因此被称作非局部问题. 直到 1978 年 J.L. Lions 在他的工作 [30] 中对方程

$$u_{tt}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u), \tag{1.2}$$

引进抽象的泛函分析框架后, 方程 (1.1) 得到了人们大量的关注和研究. 此外, 这种非局部方程在其他领域, 如生态系统, 也有涉及, 其中 u 一般用来描述一个依赖于自身平均值的动态过程. 例如参考文献 [31, 32] 中, u 曾用来描述人口密度. 关于类似于 (1.1) 的方程的更多的介绍, 可参见 [33] 及其所列参考文献.

下面的方程

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{1.3}$$