

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 19020131152659

UDC_____

廈門大學

硕士学位论文

基于二次均值重心坐标的图像变形

Quadratic Mean Value Barycentric Coordinates for
Image Deformation

刘见知

指导教师姓名: 曾 晓 明 教授

专业名称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2016 年 4 月

论文答辩时间: 2016 年 6 月

学位授予日期: 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2016 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ） 2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

摘要

随着计算几何这个领域的逐渐发展，重心坐标作为计算几何中的一个重要工具也在逐渐进步。最开始的重心坐标是定义在三角形上的，它具有仿射不变性、**lagrange** 性质、正性、归一性等很多很好的性质。然而在实际应用中碰到更多的是多边形，甚至是多面体，所以在此基础上，将重心坐标推广到了广义的重心坐标。根据不同的广义重心坐标的用途，广义重心坐标的种类也很多。但是，在本文之前所提出的广义重心坐标大多数都是一次的重心坐标，很少涉及到高阶的重心坐标，即使有部分文章研究了高阶的重心坐标，也没有给出明确的计算方法，这是不利于实际使用的。然而在实际应用中，相比于一次的重心坐标，高阶的重心坐标不仅可以提高自由度，加速收敛，并且可以同构高次的多项式，这是一个很大的优势，正是因为这样，本文才着重研究了二次重心坐标，并对其进行了一定的改进。本文共分为四章。

第一章主要介绍了重心坐标和广义重心坐标产生的背景和性质，并对各种广义的重心坐标的优缺点有一个简单的总结。

我们的主要工作集中在第二章的应用和第三章上。第二章发现了在实际生活之中，如果希望重心坐标有更高的精度或者是更高的收敛阶，那么则需要增加一些附加条件，但是这些附加条件往往是很难求得的。正因如此，本文使用偏微分方程中的巧凑边点元这一方法来计算凸多边形的二次重心坐标。本章前半部分介绍了二次重心坐标的算法，并描述了二次重心坐标应有的性质，这是由 **Alexander** 等人提出的。而后半部分将二次的均值重心坐标对图像进行变形，通过选取对应边任意点，我们可以对图像进行压缩或者拉伸，相比较于 **Alexander** 等人提出的二次重心坐标，将中点改为任意点使得变形结果更加丰富。

在第三章中，我们提出了凹多边形的二次重心坐标。由于二次重心坐标计算方法的问题，它是无法计算凹多边形的重心坐标的。但是在实际生活中，很多物体的形状都是凹的，所以需要将二次重心坐标推广到凹多边形上，这时便考虑到了计算机图形学里所使用到的参数化。本文将凹多边形运用参数化映射到单位圆上，此时使用映射之后多边形的比例计算二次重心坐标，使用这种方法尝试做图像变形，得到了更加多样的变形结果。

在最后一章中，我们总结了本文的主要工作，也通过数值实验发现同构性质无法保证，这也就是我们今后研究工作的一个方向。

关键词：重心坐标;巧凑边点元;参数化

厦门大学博硕士学位论文摘要库

Abstract

Barycentric coordinates is a powerful and yet simple way to interpolate data values on polyhedral domains . At first , barycentric coordinates is defined in the triangles . It has a large variety of properties like lagrange , affine invariant , positive , normalization and so on . However, in reality we often meet polygons, even polyhedrons , So we need to extend the barycentric coordinates . Before this paper , many barycentric coordinates do not study to approach high order polynomials . However in practical , high order barycentric coordinates improve the degrees of freedom , high convergence rate , and can approach high order polynomials . And this is why we study quadratic barycentric coordinates . This thesis consists of four chapters.

In Chapter 1 , we introduce the background and properties of the barycentric coordinates and generalized barycentric coordinates , and summarize the advantages and disadvantages of various barycentric coordinates .

Our major work is the applications of the second Chapter and Chapter 3 . The second chapter presents in real life , if you want to get high degrees of freedom , then you need to increase the number of additional conditions , but these additional conditions are often very hard to find . Based on this purpose , we computer quadratic barycentric coordinates using serendipity finite elements . At first , we introduce the algorithm of the quadratic coordinates and describe properties , and it is proposed by Alexander . And then ,use the quadratic barycentric coordinates to deform the image.

In Chapter 3, through numerical experiments,we found that when the deform using midpoints, deformation results like mean value coordinates. And calculation of the quadratic barycentric coordinates is more complex than mean value coordinates, so that the quadratic barycentric coordinates need to be improved. Considering choosing arbitrary points on the edges, it can be found that quadratic barycentric coordinates can compress or extend the image.

In addition to the above, quadratic barycentric coordinates is unable to calculate concave polygon. But in real life, we can see concave polygon everywhere. Then considering the parameterization of the computer graphics used. Then mapping to the unit circle, we can calculate the quadratic barycentric coordinates. Using this method to deform image, the results are reasonable.

We summarize our main results and future studies in the last Chapter.

Key Words: barycentric coordinates; serendipity finite elements; parameterization.

厦门大学博硕士学位论文摘要库

目 录

摘要	I
Abstract	III
第一章 绪论	1
1.1 问题的提出以及发展	1
1.2 重心坐标	3
1.2.1 重心坐标的定义	3
1.2.2 重心坐标的性质	4
1.3 广义重心坐标问题的定义及性质	5
第二章 凸多边形上的二次重心坐标及其应用	7
2.1 凸多边形二次重心坐标的定义	7
2.2 凸多边形二次重心坐标的构造	8
2.2.1 巧凑边点元	8
2.2.2 Lagrange化	14
2.3 凸多边形上二次重心坐标的性质	16
2.4 二次均值重心坐标在图像变形中的应用	17
2.4.1 映射方向	17
2.4.2 应用	18
第三章 凹多边形的二次重心坐标	25
3.1 参数化	25
3.2 凹多边形的二次均值重心坐标的计算及应用	27
第四章 本文总结和展望	31
参考文献	33
致谢	37

CONTENTS

Abstract (in Chinese)	I
Abstract (in English)	III
Chapter 1 Preface	1
1.1 The problem and development	1
1.2 barycentric coordinates	3
1.2.1 The definition of barycentric coordinates	3
1.2.2 The property of barycentric coordinates	4
1.3 The definition and property of generalized barycentric coordinates ..	5
Chapter 2 Quadratic barycentric coordinates and applications	7
2.1 The definition of Quadratic barycentric coordinates	7
2.2 The construction of Properties of quadratic barycentric coordinates .8	
2.2.1 Serendipity finite elements	8
2.2.2 Lagrange	14
2.3 The property of Quadratic barycentric coordinates	16
2.4 Applications	17
2.4.1 The mapping	17
2.4.2 Applications	18
Chapter 3 Quadratic barycentric coordinates using in concave ...25	
3.1 parameterization	25
3.2 construction and applications	27
Chapter 4 Summaries	31
References	33
Acknowledgements	37

第一章 绪论

1.1 问题的提出以及发展

重心坐标最开始是被 Möbius 在 1827 年首次提出的，至今已有近 200 年的历史了，最初提出的这个重心坐标也就是现在所称的面积坐标，因为它具有齐次性，所以被广泛地应用。近年来，各种各样的广义的重心坐标被定义出来，它具有不同的性质，比如可以保持特征形状不变，可以在凹多边形上使用等等，从而可以有多种多样的应用。广义的重心坐标主要使用在计算机图形学、计算几何等领域。

在 1975 年的时候，Wachspress 提出了一种广义的重心坐标^[1]，也就是 wachspress 重心坐标。这个重心坐标延续了面积坐标的本来定义，具体求法是用面积来计算的。但是在实际使用过程中，面积并不是一个容易计算的数据，正因如此，在 2002 年，Meyer, Barr 和 Lee^[2] 利用角度的等价性来代替计算面积，降低计算量，使得 Wachspress 重心坐标更加实用。在 1996 年的时候，Warren 将 Wachspress 重心坐标的理论进行了一个拓展^[3]，提出了在凸多面体上的计算方法，实现了从二维到三维的过渡。虽然 Wachspress 重心坐标在凸多边形上可以很好的定义，但是当遇到控制多边形是凹多边形时，则重心坐标会产生负数，大大限制了这种重心坐标的使用。

在 2003 年的时候，Floater 根据调和函数的本身的性质提出了均值重心坐标^[4]，并且证明了这种重心坐标在凸多边形上有很好的定义。与 Wachspress 重心坐标相比，它在凹多边形内部依然有很好的光滑性，使得它的性质优于了 Wachspress 重心坐标，随后 Jutao^[5] 和 Floater^[6] 分别将这种重心坐标推广到了三维空间，使得对于空间图形也有了一定的应用。在 2006 年的时候，Hormann 和 Floater 对于均值重心坐标^[7] 做了一个系统的理论的证明，证明了这个重心坐标对于任意多边形都是适用的。同一时期，Langer 将均值重心坐标推广到了球面^[8]。即使这时候的均值重心坐标已经被证明可以用于计算凹多边形，但是在变形过程中因为负值的产生，使得变形结果不够自然，故在此基础上，Langer 和 Seidel 于 2008 年提出了高阶均值坐标^[9] 来解决这一问题。

反观已有的重心坐标，很多不自然的扭曲都是由于不能保证重心坐标的正则性所引起的，为了解决这一问题，在 2007 年的时候 Joshi 等人提出了调和重心坐标^[10]，这种重心坐标的求法是用 Laplacian 方程来代替调和映射，此时 Laplacian 方程的解也就是调和重心坐标，但是 Laplacian 方程的解并没有一个具体的形式。同样有正

则性这个性质的还有在 2008 年由 Hormann 和 Sukumar 提出的最大熵重心坐标^[11]、在 2011 年由 Manson 等人提出的正 G-X 重心坐标^[12] 等等，与调和重心坐标一样，这几种重心坐标也是没有具体表达的，这是十分不利于计算的。

为了解决这一问题，在 2008 年的时候 Lipman, Levin 和 Cohen 联合提出了 Green 重心坐标^[13]。这种坐标是通过格林第三公式来计算 Laplacian 方程，从而使得方程的解有了一个具体的表达形式，与调和重心坐标相比，格林重心坐标具有保角性，也就是 Green 重心坐标对于形状的保持有很好的效果。有相同效果的重心坐标有 2009 年由 Weber 等人提出的柯西重心坐标^[14] 和 2010 年由 Weber 和 Gotsman 提出的 Hilbert 重心坐标^[15]，而 Hilbert 重心坐标导数均不为 0，也就是可以很好地进行共形映射。但是这里所提到的几种不同的重心坐标均有缺乏精确的边界插值的缺陷，而这个缺陷于 2011 年被 Weber 等人的复重心坐标^[16] 合理解决。

对于之前所提到的重心坐标，它们均只是对边界值进行了插值，比如在 1980 年的时候，Sibson 提出的自然邻接内的插值^[17] 和 1990 年 Farin 提出的坐标^[18]，它们均达不到 C^1 阶的连续。但是在实际应用中导数的插值是很有必要的。于是在 2008 年的时候，Floater 和 Schulz 提出了埃尔米特插值^[19]，也是基于这种思想，李先颖博士提出了三次重心坐标^[20]，它对应了调和函数的均值属性，三次重心坐标有明确的计算方式，这是它的优点，但是三次重心坐标并没有被推广到三维空间中。除了这一种插值导数的重心坐标，在 2004 年由 Botsch 和 Kobbelt 提出的高阶拉普拉斯重心坐标^[21]，于 2007 年由 Baran 和 Popović 提出的热扩散重心坐标^[22]，于 2011 年由 Jacobson 等人提出的有界双调和重心坐标^[23] 都对导数有了一定要求，但这些重心坐标的缺点也是没有具体的表达。

除了以上所提到的重心坐标，还有一些拥有较好性质的重心坐标也被广泛应用。如在 2014 年由张举勇副教授等人提出的局部重心坐标^[24]，它将平常使用的欧几里德距离替换成了测地距离，使得当改变控制多边形的几个控制顶点时，只会影响改变的控制顶点附近的图像，从而使得变形的结果更有局部性，不会牵一发而动全身。

而以上所提到的这些广义的重心坐标大多数都是一次的重心坐标，很少涉及到高阶的重心坐标，也就是很少有重心坐标可以同构二次函数、三次函数甚至是更高次函数，即使有部分文章研究了高阶的重心坐标，也没有给出明确的计算方法，这是不利于实际使用的。然而在实际应用中，相比于一次的重心坐标，高阶的重心坐标不仅可以提高自由度，并且可以加速收敛，这是一个很好的性质，因此，在 2011 年的时候，Alexander 等人提出了二次重心坐标^[25]，这也是本文主要参考并且进行改进的广义的重心坐标。

1.2 重心坐标

1.2.1 重心坐标的定义

在实际生活中，我们希望寻找到一种坐标，当某一点处于不同的坐标系的时候，它的坐标可以保持不变。正是基于这个原因，提出了重心坐标^[26]，而这一性质，也就是仿射不变性。

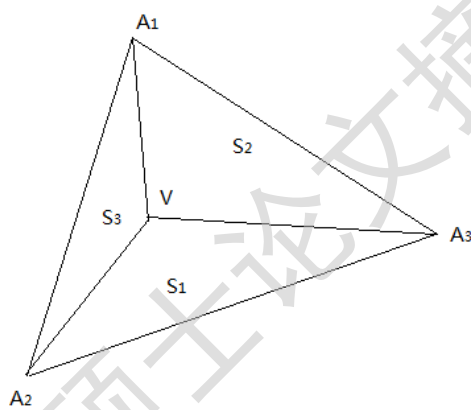


图 1.1 面积坐标示意图

在图 1.1 中，任意给定一个三角形 T ，其 3 个顶点逆时针排列分别为 A_1 ， A_2 和 A_3 ，对于 T 内的任意一点 v ，记这些点在直角坐标系中的坐标分别为： $A_1 = (x_1, y_1)$ ， $A_2 = (x_2, y_2)$ ， $A_3 = (x_3, y_3)$ 和 $v = (x, y)$ ，同时设 $\triangle A_1A_2A_3$ ， $\triangle vA_2A_3$ ， $\triangle vA_3A_1$ ， $\triangle vA_1A_2$ 的有向面积为 S ， S_1 ， S_2 和 S_3 。此时定义点 v 的重心坐标 (w_1, w_2, w_3) 为

$$w_1 = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2S}(a_1 + b_1x + c_1y);$$

$$w_2 = \frac{S_2}{S} = \frac{1}{2S}(a_2 + b_2x + c_2y);$$

$$w_3 = \frac{S_3}{S} = \frac{1}{2S}(a_3 + b_3x + c_3y)。$$

其中 a_i, b_i, c_i 为关于 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3 的系数， $i = 1, 2, 3$ 。

$$\begin{cases} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2, b_1 = y_2 - y_3, c_1 = x_3 - x_2, \\ a_2 = x_3y_1 - x_1y_3, b_2 = y_3 - y_1, c_2 = x_1 - x_3, \\ a_3 = x_1y_2 - x_2y_1, b_3 = y_1 - y_2, c_3 = x_2 - x_1. \end{cases}$$

因为定义中的面积采取的是有向面积，所以重心坐标是可以扩充到三角形之外的区域的，换句话说，也就是平面上的任意点，相对于这个给定的三角形，都是有重心坐标的^[27]。

1.2.2 重心坐标的性质

重心坐标有很多很好的性质，主要有：

- (1) 归一性： $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ ；
- (2) 线性精度： $x = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$ 且 $y = w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3$ ；
- (3) 唯一性：重心坐标表示是唯一的；
- (4) 拉格朗日性质： $w_i(A_j) = \delta_{ij}$ ；
- (5) 正则性：对于三角形内部的所有点，重心坐标均是非负数；
- (6) 仿射不变性：在仿射变换下，重心坐标保持不变。

在这些性质中，有一些性质是很容易证明的，对于性质 (1) (2) (3) 可以通过简单的计算得到；当 v 点落在了三角形的三个顶点上时，有两个有向面积都变为了 0，另外一个有向面积便是整个三角形的面积，此时性质 (4) 也便得到了证明；又因为考虑的点是在三角形内部的点，所有有向面积均是正数，即对应的重心坐标也是正的，则性质 (5) 是成立的；对于性质 (6)，即为假设存在一个仿射变换 $\phi: x = w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \rightarrow \hat{w}_1\phi(A_1) + \hat{w}_2\phi(A_2) + \hat{w}_3\phi(A_3)$ ，则有 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3) = (w_1, w_2, w_3)$ 。

事实上，设 $\phi: v \rightarrow Mv + c$ ，则有

$$\phi(v) = Mv + c = M \sum_{i=1}^3 w_i A_i + c = \sum_{i=1}^3 w_i (MA_i + c),$$

这也就说明了重心坐标是一个以三角形为参照系的局部重心坐标表示，它表示的是某一点关于三角形三个顶点 A_1, A_2 和 A_3 的相对位置，与外部坐标无关，这也就是重心坐标的一个最突出的优点。

1.3 广义重心坐标问题的定义及性质

因为重心坐标描述的是点与三角形的关系，但是在现实的生活中存在着的形状成千上万，我们希望发现一种类似于重心坐标的坐标，使得这种坐标拥有类似于重心坐标的性质，描述了点与多边形甚至是多面体的顶点的关系，正是基于这个目的，提出了广义的重心坐标^[28]。

给定 \mathbb{R}^N 空间中的任意一个多边形（多面体） $C = \{V, E\}$ ，其中 V 为 C 的顶点的集合，即为 $V = \{v_i\}_{i=1}^n$ ， $v_i \in \mathbb{R}^N$ ， E 为 C 的边的集合，即为 $E = \{e_j\}_{j=1}^m$ 。对于任意一点 $v \in \mathbb{R}^N$ 都存在一组坐标函数 $\{\lambda_1(v), \lambda_2(v) \cdots, \lambda_n(v)\}$ 且 $\lambda_i(v) \in \mathbb{R}$ 使得如下等式

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) v_i = v \quad (1.1)$$

和

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1 \quad (1.2)$$

成立。此时的 $\lambda_i(v)$ 便被定义成了广义的重心坐标。

广义的重心坐标作为一种工具，它有很广泛的应用，常见的应用有图像变形，三角形网格的参数化，计算机仿真等等。根据不同的情况，它也会有不同的性质，不同的性质保证了不同的变形效果，比如拉格朗日性质就保持了图像很好的插值性，这些常常使用的性质^[29]具有如下表述：

(1) 线性性质： $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) f(v_i)$ ，其中 $f(v_i)$ 为 v_i 点的附加值函数；

(2) 仿射不变性：根据以上定义知广义坐标是齐次坐标，所以也就满足仿射不变性，也就是可以找到一组权重 $w_i(v)$ 使得 $\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0$ ，此时 $\lambda_i(v) = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ ；

(3) 拉格朗日性质： $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ ；

(4) 光滑性： $\lambda_i(v)$ 在多边形的内部最少是 C^1 光滑的；

(5) 非负性： $\lambda_i(v) \geq 0$ ；

(6) 非退化性：当多面体退化为单纯形时，点 v 的坐标函数退化为重心坐标。

广义的重心坐标相对于重心坐标来说已经改进很多了，它可以在任意的多边形甚至是多面体上使用，并且有些广义的重心坐标对于导数也有一些很好的性质，但是在实际使用上，依然是有一定的局限性。通过定义可以观察到，大部分广义重心坐标的精度只要求一次就可以了，这个在有些情况下是不足以解决问题或者解决问

题的效果并不是太理想，为了弥补这一遗憾，本文主要探讨二次均值重心坐标及其应用。

厦门大学博硕士学位论文摘要库

第二章 凸多边形上的二次重心坐标及其应用

2.1 凸多边形二次重心坐标的定义

根据不同的重心坐标的计算方法以及可以解决问题的不同，我们会得到不同种类的重心坐标。在众多的重心坐标中，均值重心坐标因为其明确的计算公式、简单的形式、比较好的性质以及对于任意多边形都可计算等优点，成为了一种被广泛运用的重心坐标。在本文中，主要用于计算的也是均值重心坐标。多边形 C 的均值重心坐标的计算形式^[30] 为：

$$\begin{cases} \frac{w_i(v)}{\sum_{i=1}^n w_j(v)} & v \in C; \\ (1-\mu)\delta_{ij} + \mu\delta_{i(j+1)} & v = (1-\mu)v_j + \mu v_{j+1}; \\ \delta_{ij} & v = v_j. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中

$$w_i = 2 \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{r_i}.$$

考虑到重心坐标由于具有仿射不变性这个性质，常常被用于图像渲染、图像变形等。但是在目前所有的方法中，大部分的重心坐标都只有一阶精度，比如均值重心坐标、wachspress 重心坐标等。在此基础上，有一些重心坐标的计算方法通过增加考虑到的因素，如原图的导数或者二阶导数，使得变形的精度可以有一定程度的增加。但是，这样的做法需要更多的条件，而且导数的计算也比较麻烦，所以本文立志去探索一种方法，在不增加条件的基础上，可以使得变形的效果更好且更加多样化。

基于这个目的，所以本文通过组合重心坐标 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 来得到一组坐标 $\{\mu_{ab}\} = \{\lambda_a \lambda_b\}_{a,b=1}^n$ ，使得它可以满足常数、线性和二次精度^[25]，也就是：

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \mu_{ab} = 1, \quad \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v_a \mu_{ab} = x, \quad \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v_a v_b^T \mu_{ab} = x x^T. \quad (2.2)$$

Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”.

Fulltexts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.