学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______

学号：19020131152660　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

时间分数阶Black-Scholes方程的数值研究

Numerical Analysis of the Time Fractional Black-Scholes Equation

刘瑞清

指导教师姓名：许 传 炬 教授

专 业 名 称：计 算 数 学

论文提交日期：2016 年 4 月

论文答辩日期：2016 年 5 月

学位授予日期：

答辩委员会主席：________

评 阅 人：________

2016 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密　（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

中文摘要

时间分数阶Black-Scholes方程在期权定价中有着日益广泛的应用。本文旨在研究该方程的数值解法，构造和分析了两个有效算法。第一个算法结合了时间方向的有限差分和空间方向的谱方法；第二个方法则基于时空Galerkin谱方法。通过引入恰当的Sobolev空间，我们构建了时空变分问题，证明了时空弱问题的适定性。在算法分析方面，我们首先给出两种方法的最优误差估计。然后讨论算法实现技巧，通过选取适当的基函数导出离散问题的线性系统。最后给出一些数值例子验证理论结果。

关键词： 时间分数阶Black-Scholes方程；加权Sobolev空间；有限差分；时间-空间谱方法；Laguerre多项式；误差分析

Abstract

The time fractional Black-Scholes equation is playing increasingly important role in option pricing nowadays. In this paper we investigate the numerical solution of this equation, and propose and analyze two different methods for it. The first proposed method combines a finite difference scheme in time and spectral method in space; while the second one makes use of spectral approximation in both time and space directions. By establising a variational formulation in both time and space directions based on suitable Sobolev spaces, we prove the well-posedness of the associated weak problem. We carry out error analysis for the both methods, and optimal error estimates are provided. Some implementation details are also given, together with suitable basis functions for the spectral approximations. Finally, a number of numerical examples are provided to verify the theoretical claims.

Key words: time fractional Black-Scholes equation; Weighted Sobolev space; finite difference; time-space spectral method; Laguerre function; error analysis

目 录

Contents

第 一 节　引言

1.1　研究背景

期权是指买方向卖方支付期权费后拥有的在未来一段时间内或未来某一特定日期以事先规定好的价格向卖方购买或出售一定数量的特定标的物的权利，但不负有必须买进或卖出的义务。根据不同的市场目的，期权有相应的不同分类，如常规期权、障碍期权、Bermuda期权和奇异期权，看涨期权和看跌期权等[1]。常规期权中的欧式期权，是指买入期权的一方必须在期权到期日当天才能行使的期权。

Black-Scholes方程在期权定价中具有广泛的应用。经典的Black-Scholes方程是由股票价格在时间方向上是连续的维纳过程的假设导出的[2]，且可以用Fourier 积分变换法求出其闭合形式的解析解，即Black-Scholes期权定价公式。Black-Scholes 公式专门用于欧式期权的定价，虽然预测结果和市场实际价格在大部分情形下非常接近，但这种定价方式具有诸多缺点，比如无法捕捉金融市场中的波动率微笑现象 (volatility smiles, 之所以被称为“波动率微笑”，是指价外期权和价内期权的波动率高于在价期权的波动率，使得波动率曲线呈现出中间低两边高的向上的半月形，像是微笑的嘴形)，且对临近到期日的期权的估价存在较大误差等。

近年来，有关Black-Scholes模型的研究取得了很多进展。经典的Black-Scholes模型是在若干严格的假设条件下建立的，因此人们提出了一些改进的模型以减弱这些假设，如随机利率模型[3]、跳跃扩散模型[4]、随机波动率模型[5]和有交易成本的模型[6]等。随着金融市场的分形结构的发现，将传统模型中的标准Brownian运动替换成Lévy运动，再结合其他参数的泛化，就得到了一系列分数阶Black-Scholes模型。这些模型对应的方程中的分数阶导数项，可以良好地刻画市场的记忆性质。Wyss 给出了欧式看涨期权的带一个时间分数阶导数的Black-Scholes方程[7]， Cartea等人使用分数阶偏微分方程

给出了跳跃市场中的期权定价的分数阶扩散模型[8]， Jumarie在不可导函数类的基础上分别导出了时间分数阶和时间-空间分数阶Black-Scholes模型并给出了最优Merton投资组合[9]， Liang、Chen等人在以上基础上提出了Hurst指数在1/2和1之间的时空分数阶Black-Merton-Scholes模型和其特殊情形时间分数阶Black-Scholes方程[10,11]。需要特别说明的是，Black-Scholes方程中的自变量是股票价格S，虽然它并不是真正意义上的空间变量，但基于数学模型描述的方便，通常将其称为空间变量。本文也将采用该习惯称谓。

对于整数阶Black-Scholes方程，已经有较多研究，涉及解析解的构造和数值方法的设计。Black-Scholes方程是一个变系数方程，其系数中包含股票价格变量，该变量定义在半无穷区间 $(0,+\infty)$上。算法设计时通常使用变换将方程化为常系数，但这种变换也将导致空间求解区域成为$(-\infty,+\infty)$，给数值求解带来了新的难度[1,2]；也有的算法选择不做变量代换直接求解变系数方程。另外，有些方法直接针对半无界区域进行设计，如基于Laguerre多项式 / 函数的谱元法[12]。有些选择将空间区域截断成有界域，通过构造人工边界进行求解[13,14]。

对于分数阶情形，研究还只处于初步的阶段。主要的成果有：Kumar等人使用同伦扰动法得出欧式期权的时间分数阶Black-Scholes方程的数值算法，给出了数值解的级数表达式[15]；Chen等人[11]推导了显式的闭合形式的级数解。文献检索尚未发现高阶数值方法研究，甚至未见任何算法（包括低阶方法）的误差分析。对分数阶Black-Scholes方程进行数值分析的难度除了在于对变系数的处理，还在于对分数阶导数项的离散。但是对常规的分数阶扩散方程，已有一些成熟的离散分数阶导数项的方法及其分析，如文献[16,17]等的$L1$差分法和[18]的Jacobi-Galerkin谱方法。我们希望借助这些方法，通过移植把它们应用到Black-Scholes方程的求解中。

1.2　本文主要工作

本文旨在研究分数阶Black-Scholes方程的高效计算方法，构造并分析了一类时间

差分 / 空间谱方法和时间-空间谱方法，从理论分析和算法实现两方面对算法的有效性进行研究。本文余下章节结构如下。第二节先导出变分弱形式，并证明了弱问题的适定性，为后面的数值离散奠定基础。考虑到Black-Scholes方程是变系数的，其系数是空间变量S(即潜在资产价格) 的函数，我们考虑[19]中引入的加权Sobolev空间，利用权函数吸收方程变系数带来的困难，大大简化了问题的分析。第三节首先在时间方向上作$L1$有限差分离散，并给出了稳定性和收敛性的分析；其次构造了空间方向的谱离散，使用了适合逼近半无界区域问题的Laguerre多项式和Laguerre函数。本节还分析了基于Laguerre函数空间的投影算子的逼近性质，并借此推导了数值解的误差估计。结尾部分给出了数值试验，以验证理论分析的正确性。第四节讨论时间-空间谱方法离散，给出了算法的构造细节，导出了数值解收敛于真解的误差阶数。最后提供数值算例验证了分析结果。第五节给出本文的结论以及后续的研究设想。

第 二 节　弱解的存在唯一性

2.1　时间分数阶Black-Scholes方程

本文中研究的时间分数阶Black-Scholes方程是将整数阶Black-Scholes方程和分形传输理论结合推广得到的[11]。下面简述建模过程。

令$P(S,t)$为欧式看跌期权的价格，S为潜在资产的价格，一般指股票的价格，t为当前时间，则经典的Black-Scholes模型为[1]，

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0, \tag{2-1}$$

其中r为无风险利率，σ为股票价格波动率。

假设期权价格随时间的变化是一个分形传输系统，此时记期权价格的流通量$-\frac{\partial P}{\partial t}$为$Y(S,t)$。从当前时刻$t$ 到期权到期日T，由输出等于传输函数与输入的卷积，有如下守恒率方程[11]：

$$\int_t^T Y(S,t')dt'=S^{d_f-1}\int_t^T H(t'-t)[P(S,t')-P(S,T)]dt', \tag{2-2}$$

其中d_f为分形介质的Hausdorff维数，$H(t)=\dfrac{A_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$，$A_\alpha$为常数，$\alpha$为传输指数。

将(2-2)两端关于t求导得，

$$-Y(S,t)=S^{d_f-1}\frac{d}{dt}\int_t^T H(t'-t)[P(S,t')-P(S,T)]dt'. \tag{2-3}$$

结合Black-Scholes方程(2-1)得，

$$A_\alpha S^{d_f-1}\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0, \tag{2-4}$$

其中的分数阶导数$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha}$定义为

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha}:=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T\frac{P(S,t')-P(S,T)}{(t'-t)^\alpha}dt',\quad 0<\alpha<1, \tag{2-5}$$

取$A_\alpha = d_f = 1$，得到分数阶Black-Scholes方程

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0. \tag{2-6}$$

下面的引理给出(2-6)中的分数阶导数$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha}$与Caputo分数阶导数之间的关系。Caputo分数阶导数${}_0^C D_t^\alpha u(t)$和${}_t^C D_T^\alpha u(t)$以及Riemann-Liouville分数阶导数${}_0^R D_t^\alpha u(t)$和${}_t^R D_T^\alpha u(t)$的定义见文献[20]。

引理 2.1:　$0 < \alpha < 1$时，$\dfrac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = -{}_t^C D_T^\alpha P.$

证明:

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \frac{P(S,t') - P(S,T)}{(t'-t)^\alpha}dt' = -{}_t^R D_T^\alpha P(S,t) + {}_t^R D_T^\alpha P(S,T), \tag{2-7}$$

其中，

$$\begin{aligned} {}_t^R D_T^\alpha P(S,T) &= P(S,T){}_t^R D_T^\alpha 1 = P(S,T)\cdot \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^T \frac{1}{(t'-t)^\alpha}dt' \\ &= \frac{P(S,T)(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

上式代回(2-7)，并由Caputo导数和Riemann-Liouville导数之间的关系[20]可知，

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = -{}_t^R D_T^\alpha P(S,t) + \frac{P(S,T)(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = -{}_t^C D_T^\alpha P.$$

□

从而$\lim\limits_{\alpha\to 1}\dfrac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 1} -{}_t^C D_T^\alpha P = \dfrac{\partial P}{\partial t}$[20]，对(2-6)关于$\alpha \to 1$取极限,则(2-6)退化成整数阶Black-Scholes方程(2-1)。

记$R_+ = (0, +\infty), I = (0, T)$分别是空间自变量和时间自变量的取值区间，并记$Q := R_+ \times I$。对于$0 < \alpha < 1$，结合(2-6) 和引理2.1，得到由Caputo分数阶导数定义的时间分数阶Black-Scholes方程

$$-{}_t^C D_T^\alpha P(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 P(S,t) + rS\partial_S P(S,t) - rP(S,t) = 0, \quad \forall (S,t) \in Q. \tag{2-8}$$

给方程(2-8)赋予终值条件和边界条件

$$P(S,T) = max\{K-S,0\},\quad \forall S\in R_+, \tag{2-9}$$

$$P(+\infty,t) = 0,\quad \forall t\in I \tag{2-10}$$

便得到完整的分数阶Black-Scholes模型，其中K为期权在到期日的价格。

问题(2-8)-(2-10)是一个倒向定解问题，数值计算难以处理。作变换$\tau = T-t$，令$u(\tau)=P(t)=P(T-\tau)$，则方程(2-8)-(2-10)化为

$${}_0^CD_\tau^\alpha u(S,\tau)-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\partial_S^2u(S,\tau)-rS\partial_Su(S,\tau)+ru(S,\tau)=0,\quad \forall(S,\tau)\in Q, \tag{2-11}$$

$$u(S,0)=max\{K-S,0\},\quad \forall S\in R_+, \tag{2-12}$$

$$u(+\infty,\tau)=0,\quad \forall\tau\in I. \tag{2-13}$$

下文针对正向微分方程(2-11)-(2-13)进行分析和算法设计。

2.2　弱解问题及其适定性

本节讨论(2-11)-(2-13)的弱解问题。为此考虑[19]中引入的空间

$$V=\left\{v\in L^2(R_+):S\frac{dv}{dS}\in L^2(R_+)\right\}$$

作为S方向上的弱解空间。

对空间V赋予内积$(u,v)_V=(u,v)+\left(S\frac{du}{dS},S\frac{dv}{dS}\right)$，其中$(\cdot,\cdot)$为标准的$L^2(R_+)$ 空间中的内积；赋予范数$\|v\|_V=\sqrt{(v,v)_V}$和半范数$|v|_V=\sqrt{\left(S\frac{dv}{dS},S\frac{dv}{dS}\right)}$。

引理 2.2:[19] 空间$D(R_+)$在V中是稠密的。

引理 2.3:[19] 若$v\in V$，则$\|v\|_{L^2(R_+)}\leqslant 2\left\|S\frac{dv}{dS}\right\|_{L^2(R_+)}$。

下面对方程(2-11)在S方向上作变分。由于$S^2\partial_S^2u=(S^2\partial_Su)_S-2S\partial_Su$，原方程化为

$${}_0^CD_\tau^\alpha u-\frac{1}{2}\sigma^2(S^2\partial_Su)_S+(\sigma^2-r)S\partial_Su+ru=0. \tag{2-14}$$

对任意的$v \in D(R_+)$，两边同乘以v并在R_+上做分部积分化简得，

$$\left({}_0^C D_\tau^\alpha u(\tau), v\right) + a_\tau(u(\tau), v) = 0, \tag{2-15}$$

其中$a_\tau(u(\tau), v) = \dfrac{1}{2}\sigma^2(S\partial_S u(\tau), S\partial_S v) + (\sigma^2 - r)(S\partial_S u(\tau), v) + r(u(\tau), v)$。由引理2.2知，(2-15)对$V$中的任意函数也成立。

为了记号的方便，下文中将$\|\cdot\|_{L^2(R_+)}$简记为$\|\cdot\|_0$。

引理 2.4: 当$4r > \sigma^2$时，双线性形式$a_\tau(\cdot,\cdot)$在V上具有连续性和强制性，即

$$\exists \gamma > 0,\ \forall u, v \in V,\ |a_\tau(u, v)| \leqslant \gamma \|u\|_V \|v\|_V, \tag{2-16}$$

$$\exists \alpha_1 > 0,\ \forall v \in V,\ a_\tau(v, v) \geqslant \alpha_1 \|v\|_V^2. \tag{2-17}$$

证明: 先证明连续性。借助引理2.3，对任意的$u, v \in V$，

$$\begin{aligned} |a_\tau(u,v)| &\leqslant |\frac{1}{2}\sigma^2(S\partial_S u, S\partial_S v)| + |(\sigma^2 - r)(S\partial_S u, v)| + |r(u,v)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 |u|_V |v|_V + |\sigma^2 - r| |u|_V \|v\|_0 + r\|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 |u|_V |v|_V + 2|\sigma^2 - r| |u|_V |v|_V + 4r|u|_V |v|_V. \end{aligned}$$

因为$|u|_V \leqslant \|u\|_V$，所以

$$|a_\tau(u,v)| \leqslant \gamma \|u\|_V \|v\|_V,\ \ \gamma = \frac{1}{2}\sigma^2 + 2|\sigma^2 - r| + 4r. \tag{2-18}$$

再证明强制性。

由分部积分，对任意的$v \in D(R_+)$，$2(S\partial_S v, v) = -\|v\|_0^2$成立。再由引理2.2中的稠密性知，

$$2(S\partial_S v, v) = -\|v\|_0^2,\ \ \forall v \in V. \tag{2-19}$$

因此，对任意的$v \in V$，

$$\begin{aligned} a_\tau(v,v) &= \frac{1}{2}\sigma^2(S\partial_S v, S\partial_S v) + (\sigma^2 - r)(S\partial_S v, v) + r(v,v) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 |v|_V^2 - \frac{1}{2}(\sigma^2 - r)\|v\|_0^2 + r\|v\|_0^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2|v|_V^2 + (\frac{3}{2}r - \frac{\sigma^2}{2})\|v\|_0^2. \tag{2-20}$$

当$\frac{3}{2}r - \frac{\sigma^2}{2} \geqslant 0$时，即$3r \geqslant \sigma^2$时，$a_\tau(v,v) \gtrsim |v|_V^2$。当$3r < \sigma^2$时，由引理2.3，

$$\begin{aligned} a_\tau(v,v) &\geqslant \frac{1}{2}\sigma^2|v|_V^2 + 4(\frac{3}{2}r - \frac{\sigma^2}{2})|v|_V^2 \\ &= (6r - \frac{3}{2}\sigma^2)|v|_V^2. \end{aligned}$$

当$4r > \sigma^2$时，有$6r - \frac{3}{2}\sigma^2 > 0$，从而$a_\tau(v,v) \gtrsim |v|_V^2$。

综上所述，当$4r > \sigma^2$时，

$$a_\tau(v,v) \geqslant \alpha'|v|_V^2,\ \ \alpha' = min\left\{\frac{\sigma^2}{2}, 6r - \frac{3}{2}\sigma^2\right\}. \tag{2-21}$$

由引理2.3，$\|v\|_0^2 + |v|_V^2 \leqslant 5|v|_V^2$成立，即$\|v\|_V^2 \leqslant 5|v|_V^2$。代入 (2-21)得，

$$a_\tau(v,v) \geqslant \alpha_1\|v\|_V^2,\ \ \alpha_1 = \frac{1}{5}min\left\{\frac{\sigma^2}{2}, 6r - \frac{3}{2}\sigma^2\right\}. \tag{2-22}$$

□

下面给出一些(2-11)-(2-13)在时间方向的变分中可能用到的Sobolev空间。这些空间的性质也将用于时空弱解问题的适定性证明中。

用$H^m(I)$来表示通常的Sobolev空间[21]，

$$H^m(I) \ := \ \left\{v \in L^2(I) \middle| \frac{d^k v}{dx^k} \in L^2(I), k \leqslant m\right\},$$

这里的m为正整数。相应的范数记为$\|v\|_{m,I}$，

$$\|v\|_{m,I} \ := \ \left(\sum_{k=0}^{m}\|D^k v\|_0^2\right)^{1/2},\ \ \forall v \in H^m(I).$$

用$H^s(R)$来表示R上的分数阶Sobolev空间[18]，

$$H^s(R) \ := \ \left\{v \in L^2(R) \middle| \left(1+|\omega|^2\right)^{s/2}\hat{v}(\omega) \in L^2(R)\right\},$$

其中$\hat{v}$表示v的傅里叶变换，s为任意正实数。相应的范数记为$\|v\|_{s,R}$，

$$\|v\|_{s,R} \ := \ \left\|\left(1+|\omega|^2\right)^{s/2}\hat{v}(\omega)\right\|_{0,R}.$$