学校编码：10384　　　　　　　　分类号______密级______
学号：19020130154147　　　　　　　　UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

复 Landsberg 度量及复 Finsler 度量的双扭曲积

Complex Landsberg metric and doubly warped product of complex Finsler metrics

何　勇

指导教师姓名：　钟 春 平 教授
专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2016 年 5 月
论文答辩时间：　2016 年 5 月
学位授予日期：　2016 年　月

答辩委员会主席：__________
评　阅　人：__________

2016 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下, 独立完成的研究成果。 本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果, 均在文中以适当方式明确标明, 并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

该学位论文得到国家自然科学基金（项目资助号：11271304, 11171277, 11571288, 11461064）、福建省自然科学基金- 杰出青年科学基金（项目资助号：2013J06001）的资助。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

本文主要研究复 Landsberg 度量以及复 Finsler 度量的双扭曲积. 我们研究了复 Landsberg 度量、实 Landsberg 度量、实 Berwald 度量、复 Berwald 度量以及弱的复 Berwald 度量之间的关系, 考虑了这些特殊度量的构造问题, 并尝试寻找复 Finsler 几何中的“独角兽”度量, 即非 Kähler-Berwald 的复 Landsberg 度量. 扭曲积是 Riemann 几何和实 Finsler 几何中构造特殊度量的一个重要手段, 本文将它推广到了复 Finsler 几何中, 研究了复 Finsler 度量的双扭曲积及其相关性质.

在第三章, 我们研究一些特殊的实和复 Finsler 度量之间的关系. 我们主要证明了：如果 F 是复流形 M 上的强凸的弱 Kähler Finsler 度量, 则下列论述等价：

(i) F 是一个实 Berwald 度量;

(ii) F 是一个实 Landsberg 度量;

(iii) F 是一个复 Berwald 度量;

(iv) F 是一个弱的复 Berwald 度量.

我们证明了: 如果 F 是复流形 M 上的强凸的弱 Kähler Finsler 度量, 同时又是一个实 Landsberg 度量, 那么 F 一定是一个复 Landsberg 度量. 我们还构造了一些特殊的复 Finsler 度量, 如强凸的复 Berwald 度量、强凸的复 Landsberg 度量等.

在第四章, 我们主要研究复 Finsler 度量的双扭曲积. 首先, 我们导出了复 Finsler 度量的双扭曲积诱导的 Chern-Finsler 联络、复 Rund 联络、复 Berwald 联络、复 Hashiguchi 联络的表达式, 这些复 Finsler 联络分别由双扭曲积流形的分量流形上的相应复 Finsler 联络表示. 其次, 我们给出了复 Finsler 度量的双扭曲积的全纯曲率、Ricci 数量曲率和实测地线的计算公式, 这些几何量分别由双扭曲积流形的分量流形上的相应量表示. 我们得到了复 Finsler 度量的双扭曲积为 Kähler Finsler 度量 (或弱 Kähler Finsler 度量、复 Berwald 度量、Kähler-Berwald 度量、弱的复 Berwald 度量、复 Landsberg 度量、复局部 Minkowski 度量) 的充要条件. 作为应用, 我们给出了构造复 Berwald 度量、弱的复 Berwald 度量、复局部 Minkowski 度量的一个有效方法. 最后, 我们研究了复 Finsler 度量的双扭曲积的局部射影平坦性、局部对偶平坦性以及局部共形平坦性.

在第五章, 我们主要证明：一个酉不变的强拟凸的复 Finsler 度量是一个复 Landsberg 度量当且仅当它是一个酉不变的 Hermite 度量, 这表明, 在酉不变的强拟凸的复 Finsler 度量中, 不存在复 Finsler 几何中的“独角兽”度量.

关键词： 复 Landsberg 度量; 双扭曲积; 强凸的复 Finsler 度量; 弱 Kähler Finsler 度量; 复 Berwald 度量; 弱的复 Berwald 度量; 实 Berwald 度量; 实 Landsberg 度量.

Abstract

In this thesis, we mainly study complex Landsberg metric and doubly warped product (DWP) of complex Finsler metrics. We study the relationships among complex Landsberg metric, real Landsberg metric, real Berwald metric, complex Berwald metric and weakly complex Berwald metric, and consider the construction of some special complex Finsler metrics. We also try to find the "unicorn" metric in complex Finsler geometry, i.e., finding the complex Landsberg metric which does not come from a Kähler-Berwald metric. Warped product is an important method used to construct new and special metrics both in Riemannian and real Finsler geometry. In this thesis, we generalize the warped product method to complex Finsler geometry, and study some properties of the DWP-complex Finsler metrics.

In the third chapter, we study the relationships among some special real and complex Finsler metrics. We proved that if F is a strongly convex weakly Kähler Finsler metric on a complex manifold M, then the following assertions are equivalent:

(i) F is a real Berwald metric;

(ii) F is a complex Berwald metric;

(iii) F is a weakly complex Berwald metric;

(iv) F is a real Landsberg metric.

We prove that if F is both a strongly convex weakly Kähler Finsler metric and a real Landsberg metric on a complex manifold M, then F is a complex Landsberg metric. We also construct some special complex Finsler metrics, such as strongly convex complex Berwald metric, strongly convex complex Landsberg metric, etc.

In the fourth chapter, we study the DWP-complex Finsler metrics. We firstly derive the most often used complex Finsler connections (the Chern-Finsler connection, the complex Rund connection, the complex Berwald connection, and the complex Hashiguchi connection, etc.) associated to the DWP-complex Finsler metrics, which are expressed in terms of the corresponding complex Finsler connections associated to the complex Finsler metrics of its components, respectively. Secondly, we obtain the formulae of the holomorphic curvature, Ricci scalar curvature and real geodesic of the DWP-complex Finsler metrics in terms of the corresponding objects associated to its components. We obtain a necessary and sufficient condition for the DWP-complex Finsler metrics to be a Kähler Finsler (resp. weakly Kähler Finsler, complex Berwald, Kähler-Berwald metric, weakly complex Berwald, complex Landsberg, complex locally Minkowski) metric. As an application, we give an effective method of constructing complex Berwald metrics, weakly complex Berwald metrics and complex locally Minkowski metrics. Finally, we study the flatness of locally projective, locally dual, and the flatness of locally conformal of the DWP-complex Finsler metrics.

In the fifth chapter, we prove that a unitary invariant strongly pseudoconvex complex Finsler metric is a complex Landsberg metric if and if only if it comes from a unitary invariant Hermitian metric. This implies that there is no “unicorn” complex Finsler metric among unitary invariant strongly pseudoconvex complex Finsler metrics.

Key Words: Complex Landsberg metric; Doubly warped product; Strongly convex complex Finsler metric; Weakly Kähler Finsler metric; Complex Berwald metric; Weakly complex Berwald metric; Real Berwald metric; Real Landsberg metric.

目 录

CONTENTS

第一章 引言*

1.1 研究背景和课题意义

著名数学家陈省身指出: “实 Finsler 几何是没有二次型限制的 Riemann 几何” [1]. Finsler 几何在自然学科领域应用极其广泛, 尤其在物理学、生物学、工程技术、信息几何、控制论和广义相对论等方面 [2], [3], [4], [5].

复 Finsler 几何是没有 Hermite 二次型限制的 Hermite 几何. 复 Finsler 度量已成为研究全纯映射几何函数理论的重要工具 [6]. 其中最重要的两个全纯不变度量是 Kobayashi 度量和 Carathéodory 度量. 每一个有边或无边的复流形都存在 Kobayashi 度量和 Carathéodory 度量, 在适当条件下, 它们是 C^2 的复 Finsler 度量 [1]. 所以, 研究复 Finsler 流形上的度量结构成为几何学家和分析学家共同关心的课题.

下面先对复 Finsler 度量理论的形成和发展作一简短的介绍.

1962 年, Prakashi N [7] 首次在复流形上研究 Finsler 几何. 但是, 1965 年, Heil E [8] 证明了复流形上满足 Prakashi N 所给定条件的 Finsler 度量实际上是一个 Riemann 度量. 1964 年, Rizza G B [9] 提出了复 Finsler 度量的正确记号.

1967 年, Rund H [10] 在研究了复 Finsler 度量所满足的强齐次条件 (也称为绝对齐次条件), 并在局部坐标系下利用张量分析的方法导出了复 Finsler 度量的联络系数和实测地线方程. 1967 年, Kobayashi S [11] 提出 Kobayashi 度量.

1972 年, Rund H [12] 研究了复流形上依赖切方向的复联络以及依赖切方向的 Hermite 张量关于该复联络的共变微分等问题. 后来研究者称该联络为复 Rund 联络 [13], [14], [15], [16].

1975 年, Kobayashi S [17] 研究复向量丛和复流形上的距离时, 也提到了复 Finsler 度量的绝对齐性条件, 他证明了全纯向量丛是 Negative 的充分必要条件是该向量丛上存在一个曲率为负的强拟凸的复 Finsler 度量.

1981 年, Lempert L [18] 证明了在 $\mathbb{C}^n$ 中的光滑有界强凸域上, Kobayashi 度量和 Carathéodory 度量一致, 它们在全纯切丛的零截面外光滑, 并且都是弱 Kähler-Finsler 度量, 甚至在每一点都有强凸的标形.

1990 年, Faran J [19] 利用 Cartan 的活动标架法研究了复 Finsler 度量的局部等价性问题, 并在 Kobayashi 度量光滑的情形下给出了它的一个刻画.

Pang M Y [20], Abate M 和 Patrizio G [21], [22] 从微分几何的角度对 $\mathbb{C}^n$ 中的有

*本文得到国家自然科学基金 (项目资助号：11271304, 11171277, 11571288, 11461064)、福建省自然科学基金 - 杰出青年科学基金 (项目资助号：2013J06001) 的资助.

界、强凸的区域上的 Kobayashi 度量的几何性质进行了一系列研究, 给出了常曲率 Riemann 曲面完全测地全纯嵌入复 Finsler 流形的充要条件, 并自然导致对具有常全纯曲率的 Kähler Finsler 流形的分类问题的研究.

Royden H L [23], Fukui M [24], Aikou T [25], Abate M 和 Patrizio G [26] 前后以几乎相同的题目撰文: “复 Finsler 度量 (或流形)”, 从不同角度系统研究了复 Finsler 度量 (流形), 得到系列成果.

本文主要研究复 Landsberg 度量以及复 Finsler 度量的双扭曲积. 下面就这方面的研究背景作一简单介绍.

1.1.1 特殊 Finsler 度量

在实 Finsler 几何中, Berwald 度量和 Landsberg 度量是两类重要的特殊 Finsler 度量 [27]. 1926 年起, Berwald L [28], [29] 系统研究了一类特殊的实 Finsler 度量, 这类度量的 Cartan 张量 A_{ijk} 关于 Berwald 联络的水平协变微分 $A_{ijk|l}$ 恒为零. 这类度量称为实 Berwald 度量, 具有实 Berwald 度量的实流形称为实 Berwald 流形. 1976 年, Ichijyō Y [30] 对连通的实 Berwald 流形 M 给出了一个几何刻画: M 上每一点处的赋有 Minkowski 范数的切空间 (T_xM, F_x) 通过平行移动相互线性等距, 即: 连通的实 Berwald 流形模于一个实 Minkowski 空间. 在局部坐标系下, Berwald 度量诱导的 Berwald 联络或 Chern-Rund 联络或 Cartan 联络的联络系数仅与底流形坐标有关 [27], [31], [32]. 很明显, Riemann 流形和局部 Minkowski 流形都是特殊的实 Berwald 流形. 1981 年, Szabó Z I 给出了非 Riemann 流形的实 Berwald 流形的例子 [33].

1928 年, Berwald L [34] 利用 Berwald 联络刻划了 Landsberg 曲率, 该曲率为零的度量称为实 Landsberg 度量, 具有实 Landsberg 度量的实流形称为实 Landsberg 流形. 一个 Landsberg 度量满足: $\dot{A}_{ijk} := A_{ijk|l}u^l = 0$. 1978 年, Ichijyō Y [35] 对连通的实 Landsberg 流形 M 给出了一个几何刻画: M 上每一点处的赋有 Minkowski 范数的切空间 (T_xM, F_x) 通过平行移动相互等距, 这个自然等距不再像实 Berwald 流形那样要求是线性的了. 很明显, 实 Landsberg 流形包括 Riemann 流形、实局部 Minkowski 流形和实 Berwald 流形.

在实 Finsler 几何中, 任何一个实 Berwald 度量一定是实 Landsberg 度量, 然而, 是否存在非实 Berwald 的实 Landsberg 度量依然是一个公开问题 [31]. 这个问题被 Bao D [36] 称为“独角兽”问题.

很长一段时间, 研究者都没有找到非实 Berwald 的实 Landsberg 度量. Matsumoto M [37] 也曾猜测不存在非实 Berwald 的实 Landsberg 度量. 2008 年, Szabó Z I 宣称所有正则实 Landsberg 度量均为实 Berwald 度量 [38], 然而紧接着, 他自己发现证明中存在一个小瑕疵 [39], 这使得“独角兽”问题依然是个公开问题.

另一方面, Asnov G S 在 (α, β)- 度量中构造了一类几乎正则的“独角兽”度量