学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　　分类号______密级____

学号：25320131151816　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC____

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

# 伽辽金无网格法的高效二阶嵌套子域积分方法

# An efficient nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm for Galerkin meshfree methods

吴俊超

指导教师姓名：王 东 东 教 授

专 业 名 称：建筑与土木工程

论文提交日期：2016 年 4 月

论文答辩时间：2016 年 5 月

学位授予日期：2016 年 6 月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2016 年 6 月

# 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行)》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 摘 要

无网格法直接通过节点信息建立形函数，不依赖于节点之间的有序拓扑连接，能够建立任意高阶连续的整体协调形函数和位移场。在过去的二十多年里，无网格法得到了快速发展，在许多领域得到了成功应用，例如，裂纹扩展模拟，板壳分析，大变形模拟和断裂破坏模拟等。然而，由于无网格形函数一般不是多项式，且各个形函数的支撑域与背景积分子域通常不重合，因而伽辽金无网格法为了保证计算精度，需要在每个背景积分子域内采用高阶的高斯积分方法进行数值积分。但高阶高斯积分会明显降低无网格法的计算效率，不利于无网格法的大规模工程应用。因此，如何在保证精度的前提下提高计算效率是无网格法研究领域的一个核心问题，具有重要的理论研究和工程应用价值。目前常用的稳定节点积分方法明显提高了伽辽金无网格法的计算效率，但仅具有线性准确性。

本文提出了伽辽金无网格法的一种稳定、高效和精确的二阶嵌套子域数值积分方法。文中首先提出了目前广泛采用的稳定节点积分无网格法的内能积分误差表达式，并对一次和二次无网格基函数的稳定节点积分方法的内能积分误差进行了详细分析，证明稳定节点积分方法具有线性准确特性。然后，针对三角形积分子域，将其进一步划分为全等的四个嵌套三角形积分子域，通过优化组合嵌套积分子域刚度矩阵方式来建立整体刚度矩阵，以消除稳定节点积分法的高阶误差项，达到二次准确性，进而建立了伽辽金无网格法的二阶嵌套子域数值积分方法。此外，根据嵌套式子域积分无网格法的二次准确性条件，建立了对应的一致外力项积分方法。二阶嵌套子域数值积分方法与稳定节点积分方法类似，数值积分中采用形函数的光滑梯度，不需要进行繁琐的形函数求导计算，因而具有计算高效的特点。同时，通过合理的嵌套子域组合积分方法，该方法具有二次积分准确性。最后，将基于嵌套式子域积分的无网格法用于求解势问题、弹性力学问题等典型问题，全面验证了其精度、收敛性和计算效率。

**关键词：** 无网格法；形函数光滑梯度；二次准确性条件；嵌套子域积分方法；计算效率

# Abstract

Meshfree methods are capable of constructing arbitrary order smoothing and compatible shape functions only through unstructured nodes and do not reply on elements with specific connectivity. During the past two decades, meshfree methods have experienced rapid developments and evolutions with many successful applications, i.e., crack propagation modeling, plate and shell analysis, large deformation simulation, and impact and fragmentation simulation, etc. Although the meshfree shape functions do not depend on any element, the rational nature and overlapping supports of shape functions pose severe difficulty on the accurate domain integration for Galerkin meshfree methods, as necessitates higher order Gauss quadrature rules to achieve satisfactory numerical results. A direct consequence induced by higher order Gauss integration is the low computational efficiency that prevents the applications of Galerkin meshfree methods to large scale practical problems. Thus the development of efficient integration algorithms has been a major concern for Galerkin meshfree methods. It is noted that the currently widely used stabilized conforming nodal integration approach has gained significant acceleration of computational efficiency, while this method only meets the linear exactness condition.

In this thesis, a stable and efficient nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm is proposed for Galerkin meshfree methods with particular reference to the quadratic exactness. The proposed algorithm is consistently built upon the smoothed gradients of meshfree shape functions defined on two-level nesting triangular sub-domains, where each integration cell consists of four equal-area nesting sub-domains. Firstly, a rational measure is devised to evaluate the error of the gradient smoothing integration for the stiffness matrix. It is shown that the stabilized conforming nodal integration is exact for a linear field and has a second order error for a quadratic field. Thereafter through a detailed analysis of the gradient smoothing integration errors associated with the two-level nesting triangular sub-domains, a quadratically exact algorithm for the stiffness matrix integration is established through optimally combining the contributions from the two-level nesting sub-domains. Moreover, the integration of force terms consistent with the stiffness integration is presented in order to ensure exact quadratic solutions in the context of Galerkin formulation. The present

approach with quadratic exactness shares the same foundation as the well-established stabilized conforming nodal integration method with linear exactness, i.e., the smoothed derivatives of meshfree shape functions are directly built upon the values of meshfree shape functions on the boundary of the integration cells and the time consuming derivative computations are completely avoided. Thus both accuracy and efficiency are achieved by the proposed methodology. The efficacy of the present nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm is thoroughly demonstrated by a series of benchmark potential and elasticity problems.

**Key Words:** Meshfree methods; Smoothed gradient of shape function; Quadratic exactness; Nesting sub-domain gradient smoothing integration; Computational efficiency

# 目 录

**摘 要** ........ i

**Abstract** ........ iii

**第一章 绪论** ........ 1

**1.1 引言** ........ 1

**1.2 无网格法研究历史及现状** ........ 2

**1.3 本文选题背景** ........ 3

**1.4 本文主要内容** ........ 5

**第二章 无网格近似理论** ........ 7

**2.1 无网格形函数** ........ 7

**2.2 无网格形函数的一致性** ........ 12

**2.3 无网格形函数与有限元形函数的联系** ........ 13

**2.4 固定基函数与移动基函数对矩量矩阵条件数的影响** ........ 14

**2.5 矩量矩阵的可逆性** ........ 16

**2.6 小结** ........ 17

**第三章 伽辽金无网格法** ........ 19

**3.1 伽辽金无网格离散方程** ........ 19

3.1.1 势问题的控制方程及无网格离散 ........ 19

3.1.2 弹性力学问题的控制方程及无网格离散 ........ 20

**3.2 强制边界条件的施加方法** ........ 22

3.2.1 拉格朗日乘子法 ........ 22

3.2.2 修正变分原理方法 ........ 24

3.2.3 罚函数法 ........ 24

3.2.4 节点系数变换法 ........ 25

3.2.5 Nitsche 变分方法 ........ 26

**3.3 任意阶积分一致性条件** ........ 27

**3.4 伽辽金无网格离散方程的数值积分方法** ........ 29

3.4.1 高斯积分法 …… 29

3.4.2 直接节点积分法 …… 31

3.4.3 残值稳定节点积分法 …… 32

3.4.4 稳定节点积分法 …… 34

3.4.5 一致性积分法 …… 37

3.4.6 变分一致积分法 …… 39

**3.5 小结 …… 41**

**第四章 一维嵌套子域积分法 …… 43**

**4.1 一维形函数光滑梯度 …… 43**

**4.2 一维稳定节点积分法误差分析 …… 45**

**4.3 一维刚度矩阵嵌套子域积分法 …… 47**

**4.4 体力项一致积分方法 …… 49**

**4.5 一维嵌套子域积分法的计算效率分析 …… 52**

**4.6 算例 …… 53**

4.6.1 积分一致性条件验证 …… 53

4.6.2 分片试验 …… 54

4.6.3 一维拉压杆问题 …… 56

**4.7 小结 …… 58**

**第五章 二维嵌套子域积分法 …… 59**

**5.1 光滑梯度一致性条件 …… 59**

**5.2 多边形积分域的特征高阶矩和特征高阶中心矩 …… 60**

**5.3 稳定节点积分法误差分析 …… 63**

**5.4 二维刚度矩阵嵌套子域积分法 …… 67**

5.4.1 势问题刚度矩阵 …… 67

5.4.2 弹性力学问题刚度矩阵 …… 73

**5.5 外力项一致积分法 …… 77**

**5.6 二维嵌套子域积分法的计算效率分析 …… 81**

**5.7 算例 …… 82**

5.7.1 势问题分片试验 …… 82
5.7.2 弹性力学问题分片试验 …… 88
5.7.3 平面势问题 …… 91
5.7.4 悬臂梁问题 …… 93
5.7.5 厚壁圆筒问题 …… 98
**5.8 小结 …… 102**
**第六章 结论与展望 …… 103**
**6.1 小结 …… 103**
**6.2 展望 …… 104**
**参考文献 …… 105**
**致 谢 …… 111**
**作者攻读硕士学位期间撰写的论文 …… 113**

# Table of Contents


**Abstract in Chinese** ........................................................ i

**Abstract in English** ........................................................ iii

**Chapter 1 Introduction** ........................................................ 1

**1.1 Introduction** ........................................................ 1

**1.2 Overview of meshfree methods** ........................................................ 2

**1.3 Motivation** ........................................................ 3

**1.4 Objective and scope** ........................................................ 5

**Chapter 2 Meshfree approximation** ........................................................ 7

**2.1 Meshfree shape functions** ........................................................ 7

**2.2 Consistent conditions** ........................................................ 12

**2.3 Meshfree and FEM shape functions** ........................................................ 13

**2.4 Fixed basis and shifted basis vectors** ........................................................ 14

**2.5 Inversion stability of moment matrix** ........................................................ 16

**2.6 Concluding remarks** ........................................................ 17

**Chapter 3 Galerkin meshfree methods** ........................................................ 19

**3.1 Meshfree discretization** ........................................................ 19

3.1.1 Meshfree discretization of potential problems ········· 19

3.1.2 Meshfree discretization of elasticity problems ········· 20

**3.2 Enforcement of essential boundary conditions** ........................................................ 22

3.2.1 Lagrange multiplier method ········· 22

3.2.2 Modified variational principle method ········· 24

3.2.3 Penalty method ········· 24

3.2.4 Transformation method ········· 25

3.2.5 Nitsche's method ········· 26

**3.3 Integration constraint** ........................................................ 27

**3.4 Numerical integration for Galerkin meshfree methods ............................29**

3.4.1 Gauss integration ...................................................... 29

3.4.2 Direct nodal integration ................................................ 31

3.4.3 Residual stabilized nodal integration .................................... 32

3.4.4 Stabilized conforming nodal integration ................................ 34

3.4.5 Quadratically consistent integration ..................................... 37

3.4.6 Variationally consistent integration ..................................... 39

**3.5 Concluding remarks ..............................................................................41**

**Chapter 4 1D nesting sub-domain gradient smoothing integration (NSGSI) method ..................................................................................43**

**4.1 1D gradient smoothing ..........................................................................43**

**4.2 Error analysis of 1D stabilized conforming nodal integration ................45**

**4.3 Stiffness formulation of 1D NSGSI ........................................................47**

**4.4 Consistent body force integration...........................................................49**

**4.5 Efficiency analysis of 1D NSGSI............................................................52**

**4.6 Results and discussions...........................................................................53**

4.6.1 Test for integration constraint ........................................... 53

4.6.2 Patch test ...................................................................... 54

4.6.3 1D rod problem ............................................................. 56

**4.7 Concluding remarks ..............................................................................58**

**Chapter 5 2D nesting sub-domain gradient smoothing integration (NSGSI) method ..................................................................................59**

**5.1 Consistency of smoothed gradients of meshfree shape functions ............59**

**5.2 Normalized moments and normalized central moments for polygons ...60**

**5.3 Error analysis of 2D stabilized conforming nodal integration ................63**

**5.4 2D nesting sub-domain gradient smoothing integration method ............67**

5.4.1 Stiffness formulation for potential problems ........................... 67

5.4.2 Stiffness formulation for elasticity problems........................... 73