

Prise en compte de la rigidité de l'espace-temps dans la relativité générale - Compréhension par une analogie simple basée sur les concepts de la résistance des matériaux

David Izabel

Ingénieur et professeur

d.izabel@aliceadsl.fr

Juin 2017

Résumé

Les découvertes d'ondes gravitationnelles liées à des coalescences de trous noirs se multiplient depuis le 11 février 2016. La formation d'un trou noir résultant de cet évènement cataclysmique, concentrant au final dans un rayon très petit une masse colossale (50 masses solaires et plus), est suffisamment énergétique pour déformer l'espace-temps. Celui-ci propage alors, sans aucune atténuation pendant des milliards d'années, les ondes gravitationnelles associées. Ces ondes ont été prédites par Einstein dans sa théorie de la relativité générale il y a un siècle. Leurs mesures, qui se caractérisent par une déformation $\frac{\Delta L}{L}$ infinitésimale (10^{-21} m soit 10^{-18} m à la taille kilométrique des interféromètres) correspond au milliardième de la taille d'un atome. Cette mesure est un défi réussi par les scientifiques d'aujourd'hui. La petitesse de ces déformations est le trait de caractère d'une rigidité extraordinairement grande de l'espace-temps. Nous allons montrer dans cet article que la constante de proportionnalité κ entre le tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ est une caractérisation de cette très grande rigidité. Pour cela, nous ferons une analogie avec la rigidité des poutres en flexion définie en résistance des matériaux.

1^{ère} partie – Relation entre courbure, énergie et rigidité d'une poutre – Cas de la RDM

1.1 Cas général de la poutre sur 2 appuis

Soit une poutre de largeur b (m) et de hauteur h (m), sur deux appuis simples, de portée L (m), réalisée à partir d'un matériau de module d'élasticité E (MPa), d'une section présentant une inertie I (m⁴) et une surface S (m²), ayant une masse par unité de longueur ($m = \rho S$) en kg/m. (cf. figure 1).

La poutre présente une déformée au cours du temps $y_{(x,t)}$:

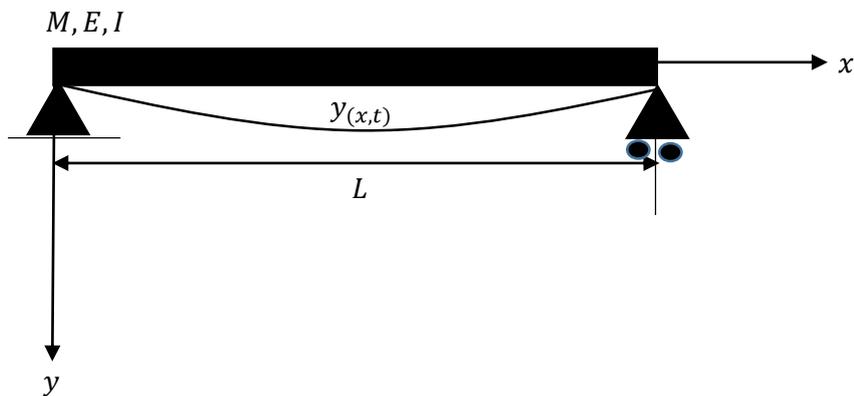


Figure 1 – Poutre sur 2 appuis fléchie sous son poids propre –

En nous plaçant en statique (flèche $y_{(x)}$ indépendante du temps), la relation fondamentale reliant la courbure ($1/R$) au moment de flexion $M_{(x)}$ et à la dérivée seconde de la flèche $y_{(x)}$ s'écrit :

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = -\frac{M_{(x)}}{EI} = -\frac{1}{R} \quad (1)$$

Dans cette expression, $M_{(x)}$ est le moment de flexion (N.m), et R le rayon de courbure en (m).

L'expression exacte de la courbure est donnée dans l'expression (2). Le terme en racine cubique est négligeable pour de faible courbure.

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right)^3} \quad (2)$$

De plus, l'énergie de flexion élastique d'une poutre s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{(x)}^2}{EI} dx \quad (3)$$

1.2 Considérons le cas simple d'une poutre sur deux appuis sollicitée par deux moments égaux C

Considérons pour simplifier une poutre subissant un moment constant C à chaque extrémité (cf. figure 2).

Par convention, le moment est positif quand il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

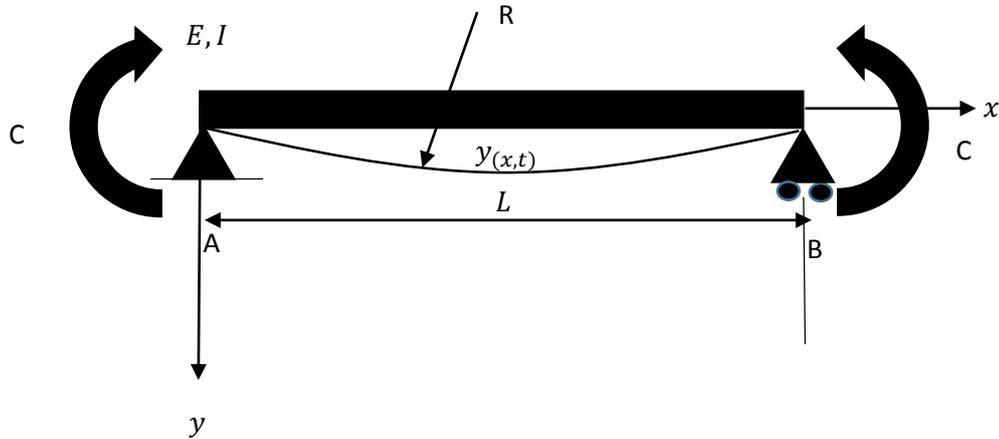


Figure 2 – Poutre sur 2 appuis sollicitée par un moment d'intensité C à chaque extrémité –

L'équation du moment fléchissant s'écrit (flexion pure), les réactions d'appuis étant nulles :

$$M_{(x)} = C \quad (4)$$

A partir de l'équation (1) nous obtenons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C}{EI} = -\frac{1}{R} \quad (5)$$

$$M_{(x)} = C = \frac{EI}{R} \quad (6)$$

En reportant l'expression (6) dans l'expression de l'énergie de flexion (3) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(EI)^2}{R^2 EI} dx \quad (7)$$

La courbure étant constante, nous obtenons :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2} \quad (8)$$

Où encore en flexion pure :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right) \quad (9)$$

Nous obtenons donc une relation reliant la courbure à l'énergie de déformation U de la poutre.

Remarque :

En intégrant deux fois par rapport à x l'expression (5) et considérant que la déformée doit être nulle sur chaque appui, on obtient l'expression de la déformée.

$$y(x) = -\frac{C}{2EI}x^2 + \frac{CL}{2EI}x \quad (10)$$

Et nous retrouvons pour la flèche un résultat bien connu de résistance des matériaux :

$$y_{(L/2)} = -\frac{CL^2}{8EI} + \frac{CL^2}{4EI} = \frac{CL^2}{8EI} \quad (11)$$

La double dérivation de l'équation (10) nous redonne bien la courbure constante :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{C}{EI} = -\frac{1}{R}$$

De plus la rotation s'écrit :

$$\frac{dy(x)}{dx} = \theta_{(x)} \quad (12)$$

En dérivant l'expression (10) par rapport à x on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{EI}x + \frac{CL}{2EI} \quad (13)$$

On obtient donc les rotations à chaque extrémité de la poutre :

$$y'_{(0)} = \frac{CL}{2EI} = \theta_A \quad (14)$$

Et :

$$y'_{(L)} = -\frac{CL}{2EI} = \theta_B \quad (15)$$

Par ailleurs, il est possible d'écrire une relation entre le moment de flexion C appliqué, les rigidités de la poutre et les rotations θ_A et θ_B (cf. calcul matriciel de structure):

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L}\theta_A + \frac{2EI}{L}\theta_B \quad (16)$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L}\theta_B + \frac{2EI}{L}\theta_A \quad (17)$$

Avec :

M_{AB} Le moment appliqué au nœud A

M_{BA} Le moment appliqué au nœud B

Avec nos conventions de signe, dans notre cas $M_{AB} = -M_{BA}$

En effet, en utilisant les expressions (14) et (15) nous obtenons :

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L}\left(\frac{CL}{2EI}\right) + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{CL}{2EI}\right) = 2C - C = C$$

Compte tenu des expressions (14) et (15) des rotations à chaque extrémité de la poutre :

$$\theta_A = -\theta_B \quad (18)$$

L'expression (16) peut s'écrire :

$$C = \frac{2EI}{L}\theta_A = k\theta_A \quad (19)$$

Ou l'on pose k comme rigidité de la poutre sollicitée par deux moments égaux C :

$$k = \frac{2EI}{L} \quad (20)$$

Nous pouvons maintenant exprimer l'énergie de déformation de la poutre U en, fonction des moments appliqués et rotations d'extrémités.

L'énergie ou plus exactement le travail d'un moment de flexion s'écrit :

$$\Delta U = \frac{1}{2} M \Delta \theta \quad (21)$$

Par ailleurs, sous l'effet des moments de flexion, la poutre fléchit et prend un rayon de courbure R comme indiqué à la figure 3 :

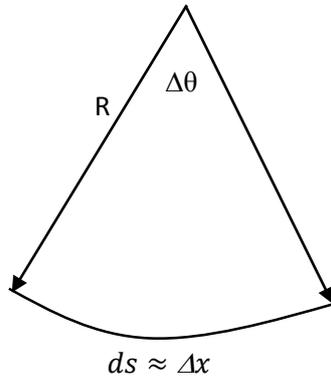


Figure 3 – Relation entre la courbure R de la plaque et sa fibre moyenne

Nous avons suivant la figure 3: $R \Delta \theta = ds \approx \Delta x$ (22)

Et nous avons une relation reliant la courbure $1/R$ à la flèche $y_{(x)}$ de la poutre :

$$\frac{1}{R} = - \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} \quad (23)$$

En reportant l'expression (23) dans l'expression (22) on obtient :

$$\Delta \theta = \frac{\Delta x}{R} = - \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} \Delta x \quad (24)$$

En reportant l'expression (24) dans l'expression (21), l'énergie de déformation élastique de flexion de la poutre s'écrit alors :

$$\Delta U = \frac{1}{2} M \frac{\Delta x}{R} \quad (25)$$

M étant constant ($M = C$) et la courbure étant constante l'expression (25) devient :

$$\Delta U = \frac{1}{2} C \frac{\Delta x}{R} \quad (26)$$

Soit en intégrant sur la longueur L de la poutre de chaque côté de l'équation (26) :

$$U = \frac{1}{2} \frac{CL}{R} \quad (26bis)$$

Et compte tenu de l'expression (5) :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2} \quad (27)$$

Nous retrouvons bien l'expression (9).

Nous pouvons donc exprimer l'énergie totale de la poutre définie à la figure 2 en fonction de k , M et θ_A :

$$U = \frac{1}{2}C\theta_A + \frac{1}{2}(-C)\theta_B \quad (28)$$

Et compte tenu des expressions des rotations (14) et (15) :

$$U = \frac{1}{2}C\theta_A + \frac{1}{2}(-C)\theta_B$$

Devient avec :

$$\theta_A = -\theta_B$$

$$U = C\theta_A \quad (29)$$

Et compte tenu de l'expression (19) :

$$C = \frac{2EI}{L}\theta_A = k\theta_A \quad (19)$$

Nous obtenons en reportant (19) dans (29) :

$U = k\theta_A^2 \quad (30)$

Nous pouvons retrouver cette expression à partir de l'équation (3) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (3)$$

Avec l'expression (19) :

$$M = C = k\theta_A$$

Devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{k^2\theta_A^2}{EI} dx \quad (31)$$

Compte tenu que dans notre cas tous ces termes sont constants :

$$U = \frac{1}{2} \frac{k^2\theta_A^2}{EI} L \quad (32)$$

En égalisant cette expression (32) avec l'autre expression de l'énergie obtenue (27) :

On obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{k^2\theta_A^2}{EI} L = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2} \quad (33)$$

Soit en simplifiant :

$$\frac{k^2\theta_A^2}{(EI)^2} = \frac{1}{R^2} \quad (34)$$

En égalisant cette expression avec l'expression (9) on obtient :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right) = \frac{k^2\theta_A^2}{(EI)^2} \quad (35)$$

Soit :

$$\frac{k^2 \theta_A^2}{(EI)^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right)$$

$$k^2 \theta_A^2 = \frac{2(EI)^2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right)$$

$$k^2 \theta_A^2 = \frac{2EI}{L} U \quad (36)$$

Avec l'expression (20) :

$$k = \frac{2EI}{L} \quad (20)$$

L'expression (36) devient :

$$k^2 \theta_A^2 = kU$$

Soit :

$$k \theta_A^2 = U$$

Qui est l'expression (30) déjà démontrée.

En reprenant l'expression (35) et en tenant compte de l'expression (30) nous avons donc :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right) = \frac{k^2 \theta_A^2}{(EI)^2} \quad (35)$$

Qui devient :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right) = \frac{k}{(EI)^2} U \quad (36)$$

Avec pour la rigidité k :

$$k = \frac{2EI}{L} \quad (20)$$

Nous démontrons donc que le facteur de proportionnalité entre l'énergie et la courbure est relié à la rigidité k de la poutre :

$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EIL} U = \frac{k}{(EI)^2} U \quad (37)$

L'équation aux dimensions de (on note U l'énergie) s'écrit :

$$\frac{U}{\frac{N}{m^2} \times m^4 \times m} = \frac{U}{N \cdot m^3} = \frac{U}{\frac{kgm}{s^2} \times m^3} = \frac{2}{EIL} U = \frac{k}{(EI)^2} U \quad (37)$$

$$\frac{U}{\frac{N}{m^2} \times m^4 \times m} = \frac{U}{N \cdot m^3} = \frac{U}{\frac{kgm}{s^2} \times m^3} = \boxed{\frac{s^2}{kg \times m} \times \frac{U}{m^3}} = N \cdot m \times \frac{U}{(N \cdot m^2)^2} = \frac{U}{Nm^3} = \frac{U}{\frac{kgm}{s^2} \times m^3} \quad (38)$$

2^{ème} partie rigidité de l'espace-temps - Cas de la relativité générale

2.1 Expression de l'Equation d'Einstein

L'équation d'Einstein s'écrit:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (39)$$

L'équation d'Einstein sous forme développée devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (40)$$

Nous rappelons que les composantes du tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ ont la dimension de densité d'énergie :

$$\begin{array}{c}
 G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \qquad 1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \qquad \text{kg} \\
 \swarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \\
 \text{Curvature} = \frac{8\pi G}{c^4} \times \frac{\text{Energy}}{\text{Volume}} = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} \quad (41) \\
 \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 1/\text{m}^2 \qquad (\text{m/s})^4 \qquad (\text{m}^3)
 \end{array}$$

Dans cette équation, la courbure et l'énergie de l'espace-temps sont reliées (cf. figure 3).

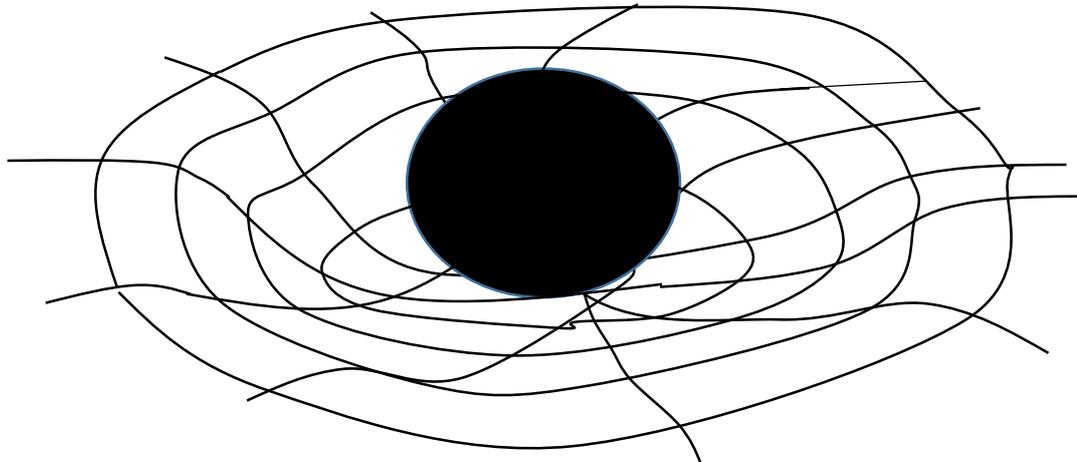


Figure 3 – Visualisation symbolique de la courbure de l'espace-temps en le ramenant à un espace plan

$G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein.

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion.

2.2 Facteur de proportionnalité entre courbure et énergie – rigidité de l'espace temps

Le facteur de proportionnalité entre la courbure et l'énergie s'écrit :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (42)$$

Par ailleurs, l'équation aux dimensions de κ est la suivante:

$$\kappa = \frac{L^3 T^4}{M T^2 L^4} = \frac{T^2}{M L} = \frac{s^2}{kgm} \quad (43)$$

Et l'énergie est en fait une densité d'énergie dans l'équation d'Einstein soit :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

On note : $T_{\mu\nu} = \frac{U_{\mu\nu}}{V}$

Nous obtenons donc pour l'équation aux dimensions :

$$\kappa \times \frac{U_{\mu\nu}}{V} \Rightarrow \frac{L^3 T^4}{M T^2 L^4} \times \frac{U_{\mu\nu}}{m^3} = \frac{T^2}{M L} \times \frac{U_{\mu\nu}}{m^3} = \frac{s^2}{kgm} \times \frac{U_{\mu\nu}}{m^3} \quad (44)$$

Nous retrouvons donc bien l'équation aux dimensions (38) associée à l'équation (37) dans le cas d'une poutre en flexion sollicitée par deux moments égaux à chaque extrémité.

Conclusion

Nous avons donc une parfaite analogie entre les deux expressions (37) et (44), l'une issue de la théorie des poutres en RDM et l'autre issue de la relativité générale en 4 dimensions d'espace-temps [24]. La courbure de l'espace-temps est donc bien proportionnelle à l'énergie qui est présente et à la rigidité de la trame de l'espace temps.

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EIL} U = \frac{k}{(EI)^2} U \quad (R. D. M)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (R. G)$$

Le terme $k = \frac{2EI}{L}$ est la rigidité d'une poutre soumise à deux moments de flexion égaux à ces extrémités.

Le terme $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ est relié à la rigidité de l'espace-temps.

Application numérique :

$$G = 6.6740831 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2$$

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

$$\kappa = 2.0765799 E^{-43} \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Ce nombre extrêmement petit traduit l'extrême rigidité de l'espace-temps, en effet, pour une énergie unitaire la courbure infligée à l'espace-temps est infinitésimale.

Références Bibliographiques

Pour la mécanique des structures

- [1] S. Timoshenko,(1949) « Résistance des matériaux Traduit de l'anglais sur la 2e édition par Ch. Laffitte »
- [2] D. Izabel (2007) « Formulaire de résistance des matériaux tome 1 à 5 » Sebtp
- [3] S. Timoshenko, (1951) « Théorie des plaques et des coques, Traduit de l'anglais par L. Vial Reliure inconnue » (1951) p 46 chap 12 and p37 chap 10
- [4] Ménad CHENAF Jean-Vivien HECKCSTB Guide PPRT (2007)
Compléments technique relatif a l'effet de surpression
Recommandations et précautions en vue de réduire les risques – rapport d'étude

Pour la relativité générale

- [5] T.G. Tenev M.F. Horstemeyer (2016) « The Mechanics of Spacetime { A Solid Mechanics Perspective on the Theory of General» Foundations of Physics manuscript arXiv:1603.07655v3 » p 24
- [6] M. R. Beau (2014) « Théorie des champs des contraintes et des déformations en relativité générale et expansion cosmologique ». - Foundations of Physics manuscript arXiv:1209.0611v2 p4 and Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 40, 2015
- [7] T. Damour (2006) – « La Relativité Générale aujourd'hui » Institut des Hautes Etudes Scientifiques Bures-sur-Yvette, France - Séminaire Poincaré 1-40 p
- [8] T. Damour (2005) « Einstein et la physique du vingtième siècle » Membre de l'Académie des sciences p 4
- [9] M. R. Beau (2014) « Sur l'hypothèse concernant l'existence d'un champ de gravité de type vectoriel couplant avec l'accélération des masses » Hal archive ouvertes 00683021v2 point c p13
- [10] Collective (2016) Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger physical review letter
- [11] Cours de physique « tenseur energie impulsion »
<http://physique.coursgratuits.net/relativite-generale/tenseur-d-energie-impulsion.php>
- [12] Cours en ligne de richard Taillet univ grenoble– initiation à la relativité générale et restreinte

Pour la mécanique quantique

- [13] C. De Beule (2016) “Graphical interpretation of the Schrodinger equation” university antwerpen

[14] Michael Fowler (2007) "Schrödinger's Equation in 1-D: Some Examples Curvature of Wave Functions"

[15] Steven Errede (2016) UIUC Physics 406 Acoustical Physics of Music, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, IL,

[16] Xinzhong Wu (2015) Probability and Curvature in Physics School of History and Culture of Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China Journal of Modern Physics, 2015, 6, 2191-2197

[17] Dalibard : Cour en ligne de mécanique quantique X polytechnique

[18] Cours en ligne : calcul variationnel et relativité restreinte X polytechnique

Pour l'ensemble des sujets

[19] Feynman (1963) The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley 1963, vol.II, p.38-10.

[20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, W.H. Freeman 1973; x17.5, pp.426-428

[21] Paty Michel (2005) HAL L'espace-temps de la théorie de la relativité

[22] Bernard Guy (2016) Relier la mécanique et la relativité générale ? Réflexions et propositions

[23] Calculs matriciels des structures. Cours INSA Rennes JL Aribert

Pour les publications Hal

[24] hal-01535955v1 David Izabel. Peut-on comprendre les fondamentaux de la relativité générale et de la mécanique quantique à partir des concepts de la résistance des matériaux ? Juin 2017