

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

MÉTODOS E MODELOS  
DE DISCRIMINAÇÃO NA  
METODOLOGIA DEA

---

Vivian Correia Gameiro

Lisboa, outubro de 2016



INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E  
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

MÉTODOS E MODELOS  
DE DISCRIMINAÇÃO NA  
METODOLOGIA DEA

Vivian Correia Gameiro (20140159)

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica de Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Ana Maria Sotomayor

Vogal: Doutora Ana Maria Alves Paias

Vogal: Doutor José Manuel de Oliveira Pires

Lisboa, outubro de 2016

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência ao seu autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

*O maior desafio que enfrentamos hoje, e que existe em cada organização, é a necessidade de novas maneiras de pensar. (Leland Russel)*

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, o Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, por todo o apoio, orientação e disponibilidade demonstrada ao longo deste ano. O apoio e a contínua ajuda foram essenciais para o desenvolvimento e conclusão da presente dissertação.

Em segundo lugar, quero agradecer aos meus amigos e colegas de mestrado pelo companheirismo e apoio transmitido durante este ano.

Seguidamente, agradeço à minha família, em especial ao meu pai por toda a motivação, disponibilidade, paciência e apoio incondicional que demonstrou no decorrer deste ano. Quero agradecer a minha mãe e irmã por todas as palavras de apoio e força transmitida ao longo deste percurso académico.

Agradeço ao meu namorado Vítor Aires por todo o carinho, apoio, coragem e incentivo que manifestou ao longo deste ano.

Por fim, quero agradecer a todos os que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração desta dissertação.

Muito obrigada a todos!

## Resumo

Neste trabalho procura-se apresentar um estudo sobre a metodologia *Data Envelopment Analysis* (DEA), mais precisamente sobre os métodos/modelos de discriminação. Numa primeira fase, começa-se por fazer uma referência à avaliação de desempenho organizacional e à sua evolução, identificar os métodos tradicionais de avaliação e as suas limitações. Posteriormente, referem-se os modelos clássicos da metodologia DEA, o modelo CCR (Charnes, Cooper & Rhodes, 1978) e o modelo BCC (Banker, Charnes & Cooper, 1984). Porém, a aplicabilidade destes modelos apresenta algumas limitações que condicionam a utilização desta metodologia, nomeadamente a distribuição irrealista dos pesos e a falta de poder discriminativo entre as unidades eficientes.

De forma a minimizar estas limitações vários métodos/modelos de discriminação têm surgido, designadamente o método das restrições sobre os pesos, o método de ajuste dos níveis de *input/output* para captação de juízos de valor, o método das restrições aos *inputs/outputs* virtuais e, por fim, os modelos multiobjectivo, alguns dos quais serão apresentados neste trabalho.

No sentido de demonstrar a relevância que a aplicação desta metodologia pode ter numa organização, o modelo CCR e alguns dos métodos/modelos de discriminação são aplicados a vinte instituições bancárias, que operavam em Portugal no ano de 2014, de forma a avaliar a eficiência de cada instituição. Serão apresentados os resultados obtidos desta aplicação prática, bem como uma análise a esses resultados.

**Palavras-chave:** metodologia DEA, eficiência, métodos, modelos, discriminação, restrições, multiobjectivo.

## **Abstract**

This work aims to present a study on the methodology Data Envelopment Analysis (DEA), more precisely the methods/models of discrimination. In a initial it begins to make reference to the evaluation of organizational performance and to their development, identify the traditional methods of evaluation and its limitations. Later it refers to the classical models of DEA methodology, the CCR model (Charnes, Cooper & Rhodes, 1978) and BCC model (Banker, Charnes & Cooper, 1984). However, the applicability of these models present some limitations which affect the use of this methodology, particularly the unrealistic weight distribution and the lack of discriminatory power between efficient units.

In order to mitigate these limitations various methods/models of discrimination have emerged, namely the method of restrictions about the weights, the method of adjusting levels of input/output for capture of value judgments, the method of the inputs/outputs virtual constraints and, finally, multi-objective models, some of which will be presented in this work.

In order to demonstrate the relevance to the application of this methodology in an organization, the CCR model and some of the methods/models of discrimination are applied to twenty banks, operating in Portugal in the year 2014, in order to assess the efficiency of each institution. The results will be presented in this practical application, as well as an analysis of these results.

**Keywords:** DEA methodology, efficiency, methods, models, discrimination, restrictions, multi-objective.



# Índice

<b>1. Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Avaliação de desempenho organizacional .....</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução .....	4
2.2 Medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional .....	4
2.3 Limitações das medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional .....	6
2.4 Evolução da avaliação de desempenho organizacional .....	7
2.5 Novos métodos de avaliação de desempenho organizacional.....	9
2.6 Metodologia DEA.....	12
<b>3. Modelos clássicos da metodologia DEA.....</b>	<b>14</b>
3.1 Introdução .....	14
3.2 Modelo CCR .....	14
3.2.1 Modelo CCR orientado para <i>inputs</i> .....	15
3.2.2 Modelo CCR orientado para <i>outputs</i> .....	18
3.3 Modelo BCC .....	20
3.3.1 Modelo BCC orientado para <i>inputs</i> .....	21
3.3.2 Modelo BCC orientado para <i>outputs</i> .....	22
3.4 Modelo CCR <i>versus</i> Modelo BCC.....	24
3.5 Vantagens e limitações da metodologia DEA.....	25
<b>4. Métodos e modelos de discriminação na metodologia DEA .....</b>	<b>27</b>
4.1 Introdução .....	27
4.2 Métodos das restrições aos pesos .....	27
4.2.1 Método de restrições aos pesos absolutos.....	28
4.2.2 Método das regiões de segurança .....	28
4.3 Métodos de ajuste dos níveis de <i>input/output</i> para capturar juízos de valor.....	30
4.3.1 Método do <i>cone ratio</i> .....	30
4.3.2 Método de Golany .....	34
4.4 Método das restrições aos <i>inputs/outputs</i> virtuais.....	34
4.5 Modelos multiobjectivo.....	35
4.5.1 Modelo multiobjectivo de Li & Reeves .....	36
4.5.2 Modelo bi-objectivo.....	40
<b>5. Estudo Empírico: Análise de desempenho de instituições bancárias.....</b>	<b>42</b>
5.1 Introdução .....	42

5.2 Seleção de dados e modelos.....	42
5.3 Resultados e respetiva análise.....	45
<b>6. Conclusões.....</b>	<b>54</b>
Referências Bibliográficas.....	56
Apêndice 1: Matriz de <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do método do <i>cone ratio</i> .....	59
Apêndice 2: Resultados obtidos pelo método do <i>cone ratio</i> (Pesos).....	60
Apêndice 3: Resultados obtidos pelo modelo <i>minimax</i> (Pesos).....	61
Apêndice 4: Resultados obtidos pelo modelo <i>minisoma</i> (Pesos).....	62
Apêndice 5: Resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA (Pesos).....	63

## Índice de tabelas

<b>Tabela 5.1</b> <i>Inputs</i> e <i>Outputs</i> relativos às vinte instituições bancárias.....	43
<b>Tabela 5.2</b> Resultados relativos ao modelo CCR orientado para <i>inputs</i> .....	46
<b>Tabela 5.3</b> Resultados relativos à eficiência dos modelos CCR, <i>cone ratio</i> , <i>minimax</i> , <i>minisoma</i> e BiO-MCDEA. ....	48

## Índice de figuras

<b>Figura 4.1</b> Representação gráfica do cone convexo gerado por dois vetores.....	31
<b>Figura 5.1</b> Resultados relativos à eficiência dos modelos CCR, <i>cone ratio</i> , <i>minimax</i> , <i>minisoma</i> e <i>BiO-MCDEA</i> . .....	51
<b>Figura 5.2</b> Média dos índices dos métodos/modelos utilizados. ....	53

## Lista de abreviaturas

BCC – Banker Charles Cooper

CCR – Charnes Cooper Rhodes

CRS – *Constant Returns to Scale*

DEA – *Data Envelopment Analysis*

DMU – *Decision Making Unit*

EC – Estrutura Conceptual

GPDEA – *Goal Programming Data Envelopment Analysis*

IASB – *International Accounting Standards Board*

MCDEA – *Multicriteria Data Envelopment Analysis*

OPL – *Optimization Programming Language*

PLMO – Programação Linear Multiobjectivo

PL – Programação Linear

ROE – *Return on Equity*

ROI – *Return on Investment*

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

SNC – Sistema de Normalização Contabilística

VRS – *Variable Returns to Scale*

## 1. Introdução

Numa economia em constantes transformações, as organizações mais preparadas para enfrentar o ambiente competitivo atual são as que possuem ferramentas para avaliar convenientemente a *performance*. Deste modo, a avaliação de desempenho organizacional é uma ferramenta essencial em qualquer organização, pois permite fornecer informações necessárias e contribuir para o crescimento, desenvolvimento e, inevitavelmente, conduzir ao êxito da mesma.

A avaliação de desempenho organizacional era, inicialmente, realizada com apoio em indicadores puramente financeiros, através da análise de mapas contabilísticos e rácios ou índices financeiros. No entanto, a insuficiência da informação recolhida através das medidas tradicionais, leva a que os gestores apresentem alguma dificuldade em obter respostas às novas exigências de mercado. Atualmente, com a evolução dos sistemas organizacionais, o aumento da concorrência e a entrada de novos meios tecnológicos, a avaliação de desempenho organizacional deixa de ser uma simples análise de indicadores somente financeiros e passa a ser uma análise mais ampla, onde indicadores não financeiros estão também presentes.

No sentido de ultrapassar as limitações das medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional surgiram novas metodologias, entre as quais a *Data Envelopment Analysis* (DEA). Esta metodologia baseia-se em métodos não paramétricos, nomeadamente na programação matemática e foi formalmente iniciada com o trabalho de Charnes, Cooper & Rhodes (1978).

Nesse trabalho foi apresentado o primeiro modelo da metodologia DEA, o modelo CCR (Charnes, Cooper & Rhodes), que, conjuntamente com o modelo BCC (Banker, Charnes & Cooper, 1984), constituem os modelos clássicos da metodologia DEA. Estes modelos apresentam duas limitações intimamente relacionadas, uma distribuição irrealista dos pesos e um fraco poder de discriminação entre as unidades consideradas eficientes. De modo a minimizar essas limitações várias abordagens têm surgido, nomeadamente o método das restrições sobre os pesos, o método de ajuste dos níveis de *input/output* para captação de juízos de valor, o método das restrições aos *inputs/outputs* virtuais e os modelos multiobjectivo.

Assim, a presente dissertação tem como tema principal o estudo dos diferentes métodos/modelos de discriminação mencionados anteriormente e, conseqüentemente, a motivação para este estudo incide, essencialmente, em saber quais destes métodos/modelos tem maior poder de discriminação, recorrendo para isso a um caso prático.

Desta forma, os objetivos gerais do presente trabalho centram-se, fundamentalmente, em demonstrar a importância da metodologia DEA no processo de avaliação de desempenho das organizações, e realçar o contributo que os modelos e as técnicas matemáticas dão neste processo, através da explicação desses modelos e das suas principais características, e recorrendo a um caso prático para demonstrar a sua aplicabilidade nas organizações, tal como foi mencionado anteriormente.

No sentido de alcançar os objetivos propostos, a metodologia utilizada concentrou-se, inicialmente, no desenvolvimento das seguintes atividades: levantamento de bibliografia para identificação de trabalhos relacionados com o tema e revisão do estado da arte. Realizou-se uma pesquisa sobre o conceito de avaliação de desempenho organizacional, demonstrando a sua relevância junto das organizações no momento de medir o desempenho e quais os métodos tradicionais existentes para tal. Realizou-se, também, uma pesquisa mais aprofundada sobre a metodologia DEA, nomeadamente na identificação das suas limitações e de métodos/modelos que permitam minimizar essas limitações. Posteriormente, alguns desses métodos/modelos foram aplicados a uma situação real, mais concretamente à avaliação de desempenho organizacional do sector bancário.

O presente trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. Assim, no capítulo 2, é feita uma referência à avaliação de desempenho organizacional e à evolução da mesma, onde são também mencionadas as medidas tradicionais da avaliação de desempenho, bem como algumas das suas limitações. Posteriormente, são referidas as novas medidas de avaliação de desempenho, designadamente a metodologia DEA, que é objeto de estudo desta dissertação.

No capítulo 3, apresentam-se os dois modelos clássicos da metodologia DEA, o modelo CCR proposto por Charnes, Cooper & Rhodes (1978) e o modelo BCC proposto por Banker, Charnes & Cooper (1984). O primeiro contempla retornos constantes de escala, enquanto o segundo contempla retornos variáveis de escala. Por fim, são expostas as vantagens e limitações destes modelos.

No capítulo 4, apresentam-se alguns dos métodos/modelos de discriminação da metodologia DEA, nomeadamente o método das restrições sobre os pesos, o método de ajuste dos níveis de *input/output* para captação de juízos de valor, o método das restrições aos *inputs/outputs* virtuais e, por fim, modelos multiobjectivo.

No capítulo 5, é feita uma aplicação prática de alguns métodos/modelos descritos nos capítulos 3 e 4, a uma situação real, mais concretamente à avaliação de vinte instituições bancárias, que operavam em Portugal, durante o ano de 2014.

Finalmente, no capítulo 6, expõem-se as principais conclusões retiradas com a execução desta dissertação.



## **2. Avaliação de desempenho organizacional**

### **2.1 Introdução**

A avaliação de desempenho organizacional representa uma ferramenta essencial de gestão, que fornece elementos de análise e recursos fundamentais aos gestores, aumentando a sua capacidade de observação e facilitando, assim, a sempre difícil tomada de decisões. Desta forma, a avaliação de desempenho permite a construção de um sistema integrado apoiado na formulação, planeamento e execução de estratégias, na medição de desempenho em todas as fases de implementação das mesmas e, ainda, funciona como um sistema de controlo capaz de detetar e analisar rapidamente os desvios e, conseqüentemente, corrigir o rumo da organização.

Neste capítulo é abordada a avaliação de desempenho organizacional. Assim, na secção 2.2, são apresentadas as medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional. Em seguida, na secção 2.3, são referidas as principais limitações das medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional, apresentadas na secção anterior. Posteriormente, na secção 2.4, expõe-se a evolução da avaliação de desempenho organizacional. Na secção 2.5, são apresentados os mais recentes métodos de avaliação de desempenho organizacional. Por fim, na secção 2.6, é desenvolvida em maior detalhe um desses novos métodos – metodologia DEA – referindo-se os aspetos mais relevantes da mesma.

### **2.2 Medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional**

Numa fase inicial, entre 1880 e 1980, caracterizada pela estabilidade económica, o principal e praticamente único objetivo das empresas, passava pela maximização dos resultados sem considerar qualquer outro tipo de fatores (Ghalayini & Noble, 1996). Desta forma, a avaliação de desempenho organizacional apoiava-se essencialmente nas diversas demonstrações financeiras, bem como em rácios financeiros.

A avaliação de desempenho organizacional apoiada nas demonstrações financeiras recorre à análise de informação fornecida através das diversas demonstrações financeiras (balanço, demonstração de resultados, demonstração das alterações do capital próprio, demonstração dos fluxos de caixa, e notas/anexos), utilizando-as como fonte de dados e proporcionando informações relevantes acerca do estado da organização, num determinado momento. Esta

medida compila a informação recolhida nos diferentes mapas contabilísticos, permitindo aos gestores analisar a evolução do desempenho financeiro da empresa.

O objetivo das demonstrações financeiras, de acordo com a Estrutura Conceptual (EC) do Sistema de Normalização Contabilístico (SNC), apoiada na estrutura conceptual do *International Accounting Standards Board* (IASB), é o de proporcionar informação acerca da posição financeira, do desempenho e das alterações na posição financeira de uma organização, de forma a ter interesse para diversos utilizadores, na tomada de decisões económicas.

Cada demonstração financeira fornece informações relevantes aos utilizadores interessados na organização. Sendo assim, o balanço, uma das demonstrações financeiras mais relevantes, representa o património da organização e informa qual a posição financeira da mesma num determinado momento, sendo possível analisar os recursos (ativos), as fontes de financiamento interno (capital próprio) e externo (passivo) da organização.

A demonstração de resultados, por sua vez, informa sobre o desempenho da organização, através da análise dos rendimentos, dos gastos e dos lucros apresentados ao longo de um período de tempo, geralmente de um ano. A demonstração das alterações do capital próprio tem como objetivo indicar as alterações existentes no capital próprio durante o ano económico. A demonstração dos fluxos de caixa, por seu lado, indica as entradas e saídas de dinheiro durante a atividade corrente da organização e o resultado desse fluxo, assim como destacar as aplicações feitas por parte da empresa em investimentos e obtenção de recursos monetários. Por fim, as notas/anexos têm um papel essencial na divulgação de informação financeira e devem, de modo resumido, apresentar informações referentes ao regime de preparação das demonstrações e das políticas contabilísticas aplicadas para as transações, bem como divulgar informações adicionais que não estejam presentes nas outras demonstrações financeiras, mas que sejam obrigatórias para uma análise adequada.

A avaliação de desempenho organizacional realizada através de rácios financeiros implica o cálculo de quocientes, recorrendo aos valores presentes nas demonstrações financeiras. Este tipo de avaliação requer a existência de relações entre as contas do balanço, da demonstração de resultados e da demonstração dos fluxos de caixa ou de outras grandezas económico-financeiras (Neves, 2005).

Neste contexto, existem diversos rácios que os gestores podem utilizar na avaliação de desempenho de uma empresa. Entre esses, os mais usados são o *Return on Investment* (ROI) e o *Return on Equity* (ROE). O ROI representa uma taxa de rendibilidade do investimento onde se

pondera os resultados com o valor contabilístico dos ativos, sendo a medida mais utilizada para avaliar unidades de negócio ou divisões nas empresas. O ROE representa uma taxa de retorno do investimento dos acionistas na empresa, sendo por isso a medida mais utilizada na avaliação da *performance* da empresa, na perspetiva do acionista.

No entanto, a avaliação de desempenho de uma empresa não passa só pela análise de documentos contabilístico e rácios financeiros, mas também pelo estudo e identificação de fatores não financeiros, tal como a satisfação dos clientes e dos colaboradores. Sendo assim, a insuficiência da informação recolhida através das medidas tradicionais, leva a que os gestores se deparem com diversas limitações e sintam alguma dificuldade em obter respostas aos desafios de uma gestão moderna, num contexto económico cada vez mais exigente.

### **2.3 Limitações das medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional**

Uma das principais limitações das medidas tradicionais da avaliação de desempenho organizacional reside no facto dos indicadores financeiros, utilizados para avaliação de desempenho, não serem os mais adequados, uma vez que foram unicamente desenvolvidos para cumprir requisitos de relato financeiro e não no auxílio da definição de uma estratégia adequada à organização (Kennerley & Neely, 2002).

Uma outra limitação refere-se ao carácter sintético que os documentos contabilísticos apresentam, ou seja, o gestor tem acesso a informação diversa, tendo ainda a liberdade de a completar ou até mesmo corrigir no sentido de adaptar a informação ao seu objetivo específico. No entanto, os utilizadores externos, nomeadamente investidores, Estado, instituições financeiras, fornecedores, clientes, empregados, ou simplesmente o público em geral, têm de se contentar com a informação que lhes é apresentada, que muitas vezes carece de algum rigor (Neves, 2005).

A utilização de critérios valorimétricos distintos e a ocorrência da omissão de valores nos mapas financeiros, por parte das empresas, cria um problema acrescido, já que se torna difícil realizar comparações justas e credíveis, como se refere em Neves (2005). Os mapas contabilísticos seguem o princípio do custo histórico, isto é, os movimentos contabilísticos são registados com o custo de aquisição ou de produção, o que acaba por não refletir os valores atuais e, desta forma, perde a utilidade desejada.

Como foi referido anteriormente, uma medida tradicional que permite estudar a evolução da situação económica e financeira da organização consiste na utilização de rácios. No entanto, segundo Nabais & Nabais (2011), estes rácios apresentam as seguintes limitações:

- A interpretação dos rácios acaba por ser sujeita ao setor de atividade e à situação económica existente, e a análise de um rácio, individualmente, apresenta pouco interesse;
- Relacionam dados quantitativos e não têm em conta fatores qualitativos, como a motivação, a cultura organizacional, o estilo de liderança dos gestores, a ética, a responsabilidade social, entre outros;
- Falta de uma definição normalizada de cada rácio, acabando por variar conforme o analista;
- Podem falsear comparações, quer com rácios de empresas semelhantes, quer com rácios sectoriais, quando têm por base diferentes práticas contabilísticas;
- Pode existir uma alteração nos resultados finais, devido à sazonalidade existente na atividade praticada pela empresa.

Como consequência das limitações apresentadas anteriormente começaram a surgir, por volta de 1983, novos métodos de avaliação de desempenho organizacional, permitindo uma avaliação mais completa da organização, considerando aspetos financeiros, mas também aspetos não financeiros. A principal vantagem na utilização destes novos métodos reside na qualidade da informação obtida, ou seja, as conclusões retiradas pelos gestores quanto à eficiência da organização são mais fidedignas e completas. Alguns desses novos métodos de avaliação de desempenho organizacional são apresentados na secção 2.5. Antes, na secção 2.4, é feita uma referência à evolução da avaliação de desempenho organizacional até esses novos métodos.

## **2.4 Evolução da avaliação de desempenho organizacional**

A análise histórica do desempenho empresarial permite-nos concluir que as organizações são recompensadas por gerarem valor e não só por controlarem os seus custos (Drucker, 1995). Os indicadores de desempenho essenciais não podem fundamentar-se somente em dados financeiros, devendo ser também utilizadas outras métricas como o crescimento esperado, o nível de qualidade, a satisfação dos consumidores, a quota de mercado, a inovação e as condições económicas da organização. Desta forma, a avaliação de desempenho

organizacional está associada a um sistema de avaliação que forneça informação credível, relativamente ao grau de sucesso de uma determinada estratégia.

Assim, os sistemas de avaliação de desempenho organizacional evoluíram de um suporte de mensuração e controlo dos custos para um suporte de mensuração de criação de valor, ou seja, para um desempenho organizacional não baseado exclusivamente nos custos. Segundo Toni & Tonchia (2001), esta mudança existe devido ao aumento da complexidade da gestão, isto é, a passagem de estratégias baseadas na liderança pelos custos para estratégias baseadas na diferenciação, as quais fomentam a competição entre as empresas e necessitam de estruturas organizacionais mais complexas.

Portanto, um sistema de avaliação de desempenho não deve ser um simples conjunto de indicadores, pois devem ser estabelecidas ligações entre eles, através de modelos matemáticos, como ocorre com a metodologia DEA ou em termos de descrição de relações causa-efeito, como é o caso do *Balanced Scorecard* (BSC).

Segundo Toni & Tonchia (2001), face à evolução histórica da avaliação de desempenho organizacional, é possível agrupar os principais sistemas de avaliação de desempenho em cinco tipologias:

- Modelos estritamente hierárquicos que apresentam indicadores do desempenho de custos (produção, produtividade) e de não custos (qualidade, tempo) com diversos graus de agregação, que são fundamentalmente modelos económicos e financeiros;
- Modelos «equilibrados» que apresentam indicadores de desempenho separados por diferentes áreas, as quais correspondem as várias perspetivas (financeiras, processos do negócio interno, clientes, aprendizagem e crescimento) e cujas ligações entre elas são definidas genericamente (Kaplan & Norton, 1992);
- Modelos em tronco/pirâmide que apresentam um resumo dos indicadores de desempenho, desde o nível operacional até níveis mais agregados de indicadores, começando em áreas de não custos até áreas de dimensão económico e financeiro. Estes indicadores são apresentados isoladamente, sendo depois agregados;
- Modelos «mistos» que apresentam indicadores de desempenho internos e externos à organização;

- Modelos relacionados com a cadeia de valor que consideram uma série de atividades relacionadas e desenvolvidas pela organização, de forma a satisfazer as necessidades dos clientes e as relações com os fornecedores.

Por sua vez, Neely *et al.* (2003) sugerem uma nova forma de agrupar os sistemas de avaliação de desempenho, baseada no conceito de geração. Assim:

- A primeira geração, relativa aos sistemas de mensuração de desempenho baseados em pressupostos financeiros, procura complementar os indicadores financeiros tradicionais com indicadores não financeiros, estimulando os gestores a selecionarem, de entre este tipo de indicadores, aqueles queensem ser os mais apropriados. O principal problema nestes sistemas prende-se com o facto de os indicadores serem estáticos, dificultando assim a compreensão que se estabelece entre os diferentes tipos de indicadores;
- A segunda geração, relativa aos sistemas de gestão de desempenho baseados na criação de valor, procura auxiliar a tomada de decisão, através da pesquisa de como são alterados os recursos ou os *stocks* desses recursos, em valores. A mais-valia destes sistemas foca-se na visualização que oferece a ligação entre os ativos intangíveis e o valor do negócio. O destaque dos seus procedimentos está mais em perceber o processo da transformação efetuada, do que analisar o valor apresentado individualmente pelos indicadores;
- A terceira geração, relativa aos sistemas de gestão estratégica do desempenho, revela a necessidade de uma maior clareza sobre as ligações entre as áreas de âmbito não financeiro e as dimensões intangíveis do desempenho organizacional, nomeadamente a cultura organizacional e a postura do líder perante a organização.

Em suma, é indispensável conhecer e elaborar novos conceitos sobre o significado de desempenho organizacional, com novos métodos de avaliação e não apenas sob a forma financeira, e ficar especialmente atento à notória evolução que a avaliação de desempenho das organizações têm sofrido nos últimos tempos.

## **2.5 Novos métodos de avaliação de desempenho organizacional**

O sistema de avaliação de desempenho surge como uma ferramenta capaz de gerar instrumentos lógicos, padronizados e sistémicos para racionalizar o processo de gestão (Schmidt, Santos & Martins, 2006).

Assim, tal como Kennerley & Neely (2003) notaram, um sistema de avaliação de desempenho deve ser composto pelo seguinte conjunto de subsistemas por forma a permitir uma tomada de decisões e ações fundamentadas:

- Indicadores individuais que calculem a eficiência e a eficácia das situações;
- Conjunto de indicadores relacionados entre si que avaliem, como um todo, o desempenho das empresas;
- Infraestruturas de apoio que facilitem a recolha, a compilação, a ordenação, a análise, a interpretação e a disseminação de dados.

Portanto, um modelo de avaliação de desempenho organizacional deve considerar a formulação de indicadores, as formas de controlo empregadas na organização, assim como a interação dessas com o planeamento estratégico, o estilo de liderança dos gestores e, ainda, a cultura organizacional, como se refere em Cláudio, Cortimiglia, Gabrielli & Kappel (2003).

No entanto, um dos maiores desafios na implementação de um sistema de avaliação de desempenho é a definição de quais indicadores melhor atendem às necessidades de informação dos gestores.

Em resposta às limitações anteriormente mencionadas, no que respeita às medidas tradicionais de avaliação de desempenho organizacional, surgiram novos métodos de avaliação da *performance* organizacional.

Assim sendo, vários métodos de avaliação de desempenho organizacional mais abrangentes têm surgido na literatura. De seguida, referem-se os que têm sido objeto de maior estudo e que são utilizados nas organizações, de acordo com Schmidt *et al.* (2006):

- *Economic Value Added* – EVA (1980), é a medida mais divulgada e utilizada pelas empresas na avaliação do valor económico, uma vez que se concentra na verdadeira criação de valor, conduzindo a melhores decisões de gestão;
- *Tableaux de Bord* – TB (Ardoin *et al.*, 1983), é um instrumento de gestão com vista à ação, que utiliza informações rápidas para orientar o gestor para os fatores-chave e para atuar no curto prazo;
- *Total Quality Management* – TQM (1988), é uma estratégia de administração orientada para a criação de consciência de qualidade em todos os processos organizacionais,

sendo que para atingir esse objetivo é importante envolver tanto distribuidores, como parceiros de negócios;

- Matriz de Avaliação de *Performance* (Keegan, Eiler & Jones, 1989), baseada em inter-relações entre o ambiente interno e externo, e os custos financeiros e não financeiros;
- Modelo de *Benchmarking* (1990), é um processo de pesquisa que permite aos gestores realizarem uma comparação de práticas empresariais, para identificar os principais concorrentes e alcançar um nível de superioridade ou de vantagem competitiva;
- *Strategic Measurement and Reporting Technique* – SMART (Lynch & Cross, 1991), é um método que vê as empresas como pirâmides de desempenho, e tem a capacidade de ligar a estratégia da empresa às operações do dia-a-dia, tanto operações internas como externas;
- *Balanced Scorecard* – BSC (Kaplan & Norton, 1992), é uma ferramenta de planejamento estratégico, onde a organização tem as metas e as estratégias definidas, pretendendo medir a *performance* empresarial. O método consiste em determinar as ligações de causa/efeito entre quatro perspectivas, nomeadamente: financeira, clientes, processos internos e, aprendizagem e desenvolvimento;
- *Business Excellence Model, European Foundation for Quality Management* (1992), considera nove critérios para uma organização entrar no *ranking* de melhor gestão, onde é possível destacar os seguintes critérios: a liderança; a estratégia; as parcerias e os recursos; os processos, os produtos e os serviços; a satisfação dos clientes e os resultados obtidos com o negócio da organização;
- Prisma de Desempenho (Neely & Adams, 2002), é um método de avaliação de gestão da organização, que considera as necessidades da mesma e os seus *stakeholders* (clientes, colaboradores, investidores, fornecedores, comunidade, entre outros);
- Capital Intelectual – CI (Edvinsson, 2002), é constituído por material intelectual (conhecimento, informação, competências organizacionais) que pode ser gerado para criar valor à organização.

Para o desenvolvimento de alguns dos métodos anteriormente mencionados é essencial a satisfação dos três fatores seguintes (Kennerley & Neely, 2003):

- Adequação e suficiência que devem demonstrar as partes estáticas e dinâmicas da empresa e, em simultâneo, não perderem a sua adequação como ferramenta de gestão;



- Fiabilidade da informação que deve facultar informação rigorosa, que possibilite um acompanhamento igualmente rigoroso na implementação das estratégias da empresa;
- Praticabilidade e convergência organizacional cuja aplicação deve ser simples, e devem estar de acordo com outros processos organizacionais, de forma a permitirem a tomada de ações corretivas.

Porém, existem ainda outros métodos baseados em técnicas matemáticas. Estes métodos classificam-se em modelos paramétricos, que têm como base modelos estatísticos (técnicas de regressão e correlação estatística), e não paramétricos, baseados em técnicas de investigação operacional.

Na próxima secção, introduz-se uma metodologia não paramétrica, conhecida por *Data Envelopment Analysis* (DEA), que tem sido muito utilizada na avaliação de desempenho organizacional.

## 2.6 Metodologia DEA

A metodologia DEA iniciou-se formalmente com o trabalho de Charnes, Cooper & Rhodes (1978), realizado no âmbito da tese de doutoramento de Edward Rhodes, supervisionada por Cooper e posteriormente apresentada à Carnegie Mellon University no ano de 1978, tendo por base o trabalho de Farrell (1957). Essa tese de doutoramento tinha como objetivo avaliar os resultados de programas de acompanhamento a estudantes desfavorecidos, instituído em escolas públicas americanas. O estudo destinava-se a comparar o desempenho dos alunos de escolas que aderiram ao programa com alunos de outras escolas não aderentes (Cooper, Seiford & Zhu, 2011).

Esta metodologia constitui um método não paramétrico, baseado em investigação operacional, mais especificamente a programação linear, que permite medir a eficiência relativa de um conjunto de unidades produtivas homogéneas, ou seja, unidades que realizem atividades semelhantes. Essas unidades que utilizam recursos transformando-os em produtos designam-se usualmente por DMUs (*Decision Making Units*). Genericamente, uma DMU é uma entidade responsável por converter múltiplos recursos (*inputs*) em múltiplos resultados (*outputs*), cuja *performance* se deseja avaliar (Cooper, 2005).

Desde que surgiu em 1978, a metodologia DEA tem sido amplamente utilizada em diferentes setores de atividade, tais como: saúde, educação, finanças, transporte, produção, entre muitos

outros. Esta metodologia tem-se, assim, tornado uma importante ferramenta de apoio à tomada de decisão, mais precisamente na avaliação da *performance* das mais diversas entidades, quer sejam de âmbito empresarial ou social.

A metodologia DEA permite, de entre um conjunto de DMUs comparáveis, determinar as que são eficientes e as que são ineficientes, estimar uma fronteira de eficiência através do conjunto de DMUs eficientes, e identificar as DMUs eficientes que servem de referência para as ineficientes.

As unidades de produção consideradas eficientes na metodologia DEA, podem apresentar diferentes tipos de eficiência. De acordo com Farrell (1957), o seu estudo pioneiro possibilitou caracterizar a eficiência total, que o mesmo dividiu em dois tipos de eficiência: a eficiência técnica ou a eficiência produtiva, que tem como propósito evitar o desperdício, ou seja, pretende obter o nível máximo de produção, com a mesma quantidade de *inputs*, ou ainda produzir o mesmo com uma quantidade menor de *inputs*; e a eficiência alocativa ou eficiência dos preços, que analisa qual o conjunto ótimo de *inputs*, considerando um determinado nível de preços.

A metodologia DEA destaca-se de todas as outras medidas de avaliação de desempenho organizacional por apresentar aspetos positivos e diferenciadores. Um desses aspetos centra-se no facto de conseguir utilizar múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*, em simultâneo, independentemente da unidade de medida de cada um, isto é, não é necessário converter todos os *inputs* e *outputs* seleccionados à mesma medida. Um outro aspeto diferenciador reside no facto de ser uma técnica que utiliza apenas *inputs* e *outputs*, e não necessita de uma função de produção *a priori*, permitindo assim a sua aplicação a situações onde não exista esta função de produção.

## 3. Modelos clássicos da metodologia DEA

### 3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os dois modelos clássicos da metodologia DEA: o modelo CCR, proposto por Charnes, Cooper & Rhodes (1978) e o modelo BCC, proposto por Banker, Charners & Cooper (1984). O primeiro modelo contempla retornos constantes de escala, enquanto que o segundo contempla retornos variáveis de escala. Cada um destes dois modelos pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*, consoante o objetivo seja reduzir os *inputs* mantendo constantes os *outputs*, ou aumentar os *outputs* mantendo constantes os *inputs*.

Assim, na secção 3.2, são apresentadas as duas versões do modelo CCR, enquanto na secção 3.3 são também apresentadas as duas versões do modelo BCC. Posteriormente, na secção 3.4 é feita uma comparação entre o modelo CCR e modelo BCC. Por último, na secção 3.5 são enumeradas algumas vantagens e limitações da aplicação destes modelos.

### 3.2 Modelo CCR

O modelo CCR, desenvolvido por Charnes, Cooper & Rhodes (1978), constitui o primeiro modelo proposto no âmbito da metodologia DEA. Este modelo contempla retornos constantes de escala, isto é, qualquer variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*, pelo que é também conhecido por modelo *Constant Returns to Scale* (CRS).

De forma a maximizar a eficiência, o modelo permite que cada unidade de produção selecione os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, não permitindo, no entanto, que esses pesos quando aplicados a todas as DMUs alcancem uma eficiência superior a um. Este modelo tem como base a programação linear, e pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*, como se referiu anteriormente. Nas subsecções seguintes apresentam-se essas duas versões do modelo CCR.

A avaliação de desempenho organizacional e os objetivos da organização estão intimamente ligados à escolha da orientação do modelo, seja para *inputs* ou para *outputs*. Neste sentido, se o gestor sentir que possui maior controlo sobre os recursos, selecionará um modelo com orientação para *inputs*, caso se verifique o inverso, selecionará um modelo com orientação para *outputs*.

Segundo Cooper, Seiford & Zhu (2004), a escolha que um gestor deve fazer entre os modelos, em que a unidade de produção é orientada pelos *inputs* ou pelos *outputs*, deve ter em conta a capacidade dos gestores em influenciarem a redução dos *inputs* gastos ou a maximização dos *outputs* gerados, respetivamente.

### 3.2.1 Modelo CCR orientado para *inputs*

O modelo CCR orientado para *inputs* procura minimizar o consumo dos recursos de forma a gerar um determinado nível de produção, pelo que a eficiência é alcançada com a redução de *inputs*.

Neste modelo, a eficiência de cada DMU é determinada através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* (*output* virtual) e a soma ponderada dos *inputs* (*input* virtual). O modelo possibilita que cada DMU selecione os pesos associados a cada *input* e a cada *output* que lhe são mais favoráveis, desde que quando aplicados às restantes DMUs não permita obter um tal quociente superior a um.

Para definir o modelo CCR, assume-se que existem  $n$  DMUs para avaliação e que a DMU <sub>$t$</sub>  ( $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) é a DMU em análise. Para cada DMU <sub>$k$</sub>  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $x_{ik}$  representa a quantidade consumida do *input*  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) e  $y_{jk}$  a quantidade produzida do *output*  $j$  ( $j = 1, \dots, s$ );  $x_{it}$  e  $y_{it}$  representam, respetivamente, as quantidades de *input* e de *output* da DMU <sub>$t$</sub> . Assume-se, ainda, que  $x_{ik} \geq 0$ ,  $y_{jk} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, s$ ;  $k = 1, \dots, n$ ) e que cada DMU tem, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos. Considerem-se as variáveis de decisão, não negativas,  $v_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) e  $u_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ), que representam os pesos (ponderadores) associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente. O valor  $z_t$  da eficiência da DMU <sub>$t$</sub> , isto é, da DMU em análise, pode ser obtido através do seguinte modelo:

$$\max z_t = \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jt}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{it}} \quad (3.1)$$

$$\text{s. a.} \quad \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.3)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.4)$$

A função objetivo (3.1) maximiza o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* da  $DMU_t$ . As restrições (3.2) garantem que, para cada DMU, esse tipo de quociente não excede o valor um. As restrições (3.3) e (3.4) indicam que as variáveis de decisão, ou seja, os pesos, assumem valores não negativos. O modelo anterior é conhecido por modelo CCR orientado para *inputs* na forma fracionária.

Note-se que o valor da solução ótima do modelo anterior é sempre um valor positivo menor ou igual a um. Se esse valor é igual a um, isto é, se  $z_t^* = 1$ , a  $DMU_t$ , diz-se eficiente; se, por outro lado, esse valor é inferior a um, isto é, se  $z_t^* < 1$ , a  $DMU_t$ , diz-se ineficiente. É óbvio que, no caso de ser ineficiente, será tanto mais ineficiente quanto menor for o valor de  $z_t^*$ .

O modelo (3.1) – (3.4) é um modelo de programação fracionária que permite uma infinidade de soluções ótimas. Contudo, este modelo pode ser transformado num problema de programação linear, igualando o denominador da função objetivo a uma constante. Então, igualando a um esse denominador, obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\max z_t = \sum_{j=1}^s u_j y_{jt} \quad (3.5)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^r v_i x_{it} = 1 \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.8)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.9)$$

O modelo (3.5) – (3.9) é conhecido como o modelo CCR orientado para *inputs* na forma dos multiplicadores. Uma outra forma deste modelo, que permite uma melhor compreensão da sua orientação, é conhecida por forma do envelope e é dada pelo dual do modelo anterior. Associando a variável real  $\theta_t$  à restrição (3.6) e as variáveis não negativas  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) às restrições (3.7), o dual do modelo (3.5) – (3.9) é dado por:

$$\min \theta_t \quad (3.10)$$

$$s. a. \quad \theta_i x_{it} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.11)$$

$$-y_{jt} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.12)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

O modelo (3.10) – (3.13) é então conhecido como modelo CCR orientado para *inputs* na forma do envelope. Enquanto no modelo dos multiplicadores, os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* formam as variáveis de decisão, no modelo do envelope, essas variáveis são  $\theta_t$  e  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Através da teoria da dualidade, sabe-se que os valores para as soluções ótimos dos dois modelos anteriores são iguais, isto é,  $z_t^* = \theta_t^*$ . Então  $\theta_t^*$  é o valor de eficiência da  $DMU_t$  e, no caso de ser inferior a um, isto é, no caso da  $DMU$  ser ineficiente, representa o valor pelo qual os *inputs* dessa  $DMU$  devem ser multiplicados por forma a que a mesma se torne eficiente, provocando assim uma redução nos *inputs*. As restrições (3.11) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira de eficiência, para cada um dos *inputs* da  $DMU$  em análise. Por outro lado, as restrições (3.12) garantem que tal redução nos *inputs* não altera o atual nível de *output* para a  $DMU$  em análise.

Os valores fornecidos pelas variáveis  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) na solução ótima do modelo do envelope permitem identificar o conjunto das  $DMUs$  que são referência (*benchmarks*) para uma determinada  $DMU_t$  que seja ineficiente. Esse conjunto é constituído pelas  $DMUs$  cujo correspondente valor de  $\lambda_j$  é positivo. Um valor de  $\lambda_j$  igual a zero significa que a correspondente  $DMU_j$  não é referência para a  $DMU_t$  em avaliação. No caso de aquele conjunto ser constituído por mais do que uma  $DMU$ , os correspondentes valores de  $\lambda_j$  permitem, ainda, determinar a importância de cada uma dessas  $DMUs$  para tornar a  $DMU_t$  eficiente. Assim, uma  $DMU_j$  será tanto mais importante quanto maior for o valor de  $\lambda_j$ . Se uma  $DMU_t$  é eficiente então ela é referência de si própria e, nesse caso, tem-se  $\lambda_t = 1$  e os restantes valores de  $\lambda_j$  são iguais a zero.

Como se mostra em Cooper, Seiford & Tone (2007), o modelo (3.10) – (3.13) permite, ainda, determinar o intervalo para os valores da eficiência. De facto, tal modelo tem uma solução

admissível,  $\lambda_t = 1$  e  $\lambda_j = 0$ , para  $j \neq t$ , de valor  $\theta_t = 1$ . Então o valor da solução ótima do modelo,  $\theta_t^*$ , é menor ou igual a um. Por outro lado, se os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* são não negativos e, pelo menos, um dos *inputs* e um dos *outputs* são positivos, então de (3.12) resulta que  $\lambda_j > 0$  e por (3.11) tem-se que  $\theta_t > 0$ . Consequentemente tem-se  $0 < \theta_t^* \leq 1$ .

Como se referiu anteriormente, quando  $\theta_t^* = 1$ , ou  $z_t^* = 1$ , a  $DMU_t$  diz-se eficiente, mais precisamente, diz-se eficiente segundo Farrell, podendo ser ou não eficiente segundo Pareto. Para que a  $DMU_t$  seja Pareto eficiente ou fortemente eficiente terá que e verificar  $\theta_t^* = 1$  e as variáveis de desvio nas restrições (3.11) e (3.12) serem iguais a zero ou, de modo equivalente,  $z_t^* = 1$  e os pesos associados aos *inputs* e *outputs* serem todos positivos. Se estas condições não se verificarem com  $\theta_t^* = 1$  ou  $z_t^* = 1$  então a  $DMU_t$  diz-se fracamente eficiente (Cooper *et al.*, 2007).

### 3.2.2 Modelo CCR orientado para *outputs*

O modelo CCR orientado para *outputs* tem como objetivo maximizar os *outputs*, mantendo inalteráveis os *inputs*. Este modelo, na sua forma fracionária, é obtido do modelo CCR fracionário com orientação para *inputs* através da troca do numerador pelo denominador na função objetivo e nas restrições e, consequentemente, minimizando a função objetivo. Então o valor da eficiência de uma DMU é obtido através da minimização do quociente entre a soma ponderada dos *inputs* (*input* virtual) e a soma ponderada dos *outputs* (*output* virtual) dessa DMU, de modo que os pesos que permitem obter essa minimização, quando aplicados às restantes DMUs, não permitam obter um tal quociente inferior a um.

Utilizando a notação que foi usada na subsecção anterior para descrever o modelo CCR orientado para *inputs*, relativamente aos parâmetros e às variáveis de decisão, e designando por  $w_t$  o valor da função objetivo, a forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs* é dada pelo seguinte modelo:

$$\min w_t = \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{it}}{\sum_{j=1}^s u_j y_{jt}} \quad (3.14)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}}{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}} \geq 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.16)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.17)$$

Neste modelo, a função objetivo (3.14) minimiza o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da  $DMU_t$ , isto é, da DMU em avaliação. As restrições de (3.15) indicam que esse tipo de quociente é não inferior a um para cada uma das DMUs. As restrições (3.16) e (3.17) indicam a natureza das variáveis de decisão.

À semelhança do que foi feito na subsecção anterior para o caso orientado para *inputs*, o modelo anterior pode também ser linearizado. Então, igualando a um o denominador da função objetivo desse modelo, obtém-se o seguinte modelo de programação linear, conhecido por modelo CCR orientado para *outputs* na forma dos multiplicadores:

$$\min w_t = \sum_{i=1}^r v_i x_{it} \quad (3.18)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^s u_j y_{jt} = 1 \quad (3.19)$$

$$-\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.21)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.22)$$

Também, como no caso de ser orientado para *inputs*, o dual do modelo anterior, que pode ser obtido associando uma variável real  $\rho_t$  à restrição (3.19) e as variáveis não negativas  $\mu_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) às restrições (3.20), permite obter a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*, dada por:

$$\max \rho_t \quad (3.23)$$

$$s. a. \quad -x_{it} + \sum_{k=1}^n x_{ik} \mu_k \leq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.24)$$



$$\rho_i y_{jt} - \sum_{k=1}^n y_{jk} \mu_k \leq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.25)$$

$$\mu_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

Note-se que o valor ótimo do modelo anterior que, como se sabe, é igual ao valor ótimo do modelo primal (3.18) – (3.22), isto é,  $\rho_i^* = w_i^*$ , é maior ou igual a um, pelo que o valor da eficiência é dado por  $1/\rho_i^*$  (ou  $1/w_i^*$ ). Assim, a  $DMU_i$  será eficiente se  $\rho_i^* = 1$  (ou  $w_i^* = 1$ ) e será ineficiente se  $\rho_i^* > 1$  (ou  $w_i^* > 1$ ). Neste último caso,  $\rho_i^*$  representa o valor pelo qual os *outputs* da  $DMU_i$  devem ser multiplicados por forma a que essa  $DMU_i$  se torne eficiente. As restrições (3.25) garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira de eficiência, para cada um dos *outputs* da DMU em análise. Por outro lado, as restrições (3.24) garantem que tal aumento nos *outputs* não altera o atual nível de *input* para a DMU em análise.

O modelo CCR orientado para *outputs* fornece o mesmo valor de eficiência que o modelo CCR orientado para *inputs*, como se mostra em Cooper *et al.* (2007), apesar de as soluções ótimas destes dois modelos fornecerem diferentes valores para os pesos associados aos *inputs* e *outputs*, bem como para as variáveis que permitem identificar os *benchmarks*. Estes autores mostram, ainda, que a solução ótima do modelo CCR na forma de multiplicadores (respetivamente, na forma do envelope) com orientação para *output* pode ser obtida diretamente a partir da solução ótima para o modelo CCR na forma de multiplicadores (respetivamente, na forma do envelope) com orientação para *inputs* e vice-versa.

### 3.3 Modelo BCC

O modelo BCC foi proposto por Banker, Charners & Cooper (1984) e difere do modelo CCR apenas por considerar que as DMUs em avaliação têm rendimentos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade. O modelo BCC é então uma generalização do modelo CCR que possibilita que as DMUs que utilizam baixos níveis de *inputs* obtenham retornos crescentes de escala, e as que utilizam elevados níveis de *inputs* obtenham retornos decrescente de escala (Cooper *et al.*, 2007). Os retornos de escala dizem-se crescentes quando qualquer variação nos *inputs* provoca uma variação maior do que o proporcional nos *outputs*, e dizem-se crescentes quando qualquer variação nos *inputs* provoca uma variação menor do que o proporcional nos *outputs*. Este modelo é também conhecido na literatura por modelo *Variable Returns to Scale* (VRS).

A convexidade, referida anteriormente, é descrita pelas condições  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$  e  $\lambda_k \geq 0$  ( $k=1, \dots, n$ ), pelo que na forma do envelope, o modelo BCC obtém-se do modelo CCR introduzindo neste a primeira daquelas condições. À semelhança do modelo CCR, o modelo BCC contempla também duas versões, uma orientada para *inputs* e outra orientada para *outputs* que são apresentadas nas subsecções seguintes.

### 3.3.1 Modelo BCC orientado para *inputs*

Utilizando a notação que foi utilizada na secção anterior para o modelo CCR, quanto aos parâmetros e às variáveis de decisão, e representando agora por  $\theta_{tB}$  o valor da função objetivo, o modelo BCC na forma de envelope com orientação para *inputs*, é descrito pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\min \theta_{tB} \quad (3.27)$$

$$s. a. \quad \theta_{tB} x_{it} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.28)$$

$$-y_{jt} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.29)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad (3.30)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

Associando as variáveis não negativas  $v_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) e  $u_j$  ( $j=1, \dots, s$ ) às restrições (3.28) e (3.29), respetivamente, e a variável real  $u_t$  à restrição (3.30), obtém-se o dual do modelo anterior que constitui a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs*:

$$\max z_{tB} = \sum_{j=1}^s u_j y_{jt} + u_t \quad (3.32)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^r v_i x_{it} = 1 \quad (3.33)$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + u_t \leq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.35)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.36)$$

$$u_t \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

Na forma dos multiplicadores, o modelo BCC orientado para *inputs* difere do modelo CCR com a mesma orientação, pelo facto de incluir uma variável real  $u_t$  na função objetivo e nas restrições (3.34), que indica a variação ou o fator de escala. Um valor positivo indica retorno crescente de escala, ou seja, mediante um aumento nos *inputs*, os *outputs* operam a níveis superiores; um valor negativo indica um retorno decrescente de escala, ou seja, mediante um aumento nos *inputs*, os *outputs* operam a níveis inferiores; e um valor igual a zero indica um retorno constante de escala, ou seja, os *inputs* e os *outputs* operam de forma proporcional.

O modelo definido anteriormente por (3.32) – (3.37) representa a linearização do modelo da forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs*, dado por:

$$\max z_{tB} = \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jt} + u_t}{\sum_{i=1}^r v_i x_{it}} \quad (3.38)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + u_t}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.39)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.40)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.41)$$

$$u_t \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

Note-se que, também nesta forma, a diferença entre os modelos BCC e CCR encontra-se apenas na inclusão da variável  $u_t$  no modelo BCC.

### 3.3.2 Modelo BCC orientado para *outputs*

Seguindo o que foi feito na subsecção anterior para obtenção do modelo BCC orientado para *inputs*, também, na forma do envelope, a versão deste modelo orientada para *outputs* pode ser obtida da correspondente versão do modelo CCR. Tem-se então o seguinte modelo:

$$\max \rho_{tB} \quad (3.43)$$

$$s. a. \quad -x_{it} + \sum_{k=1}^n x_{ik} \mu_k \leq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.44)$$

$$\rho_{tB} y_{jt} - \sum_{k=1}^n y_{jk} \mu_k \leq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.45)$$

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = 1 \quad (3.46)$$

$$\mu_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

Como no caso da versão orientada para *inputs*, a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs*, que se apresenta de seguida, é obtida através do dual do modelo anterior, que é obtido associando as variáveis não negativas  $v_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) e  $u_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) às restrições (3.44) e (3.45), respetivamente, e a variável real  $v_t$  à restrição (3.46).

$$\min w_{tB} = \sum_{i=1}^r v_i x_{it} + v_t \quad (3.48)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^s u_j y_{jt} = 1 \quad (3.49)$$

$$-\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + v_t \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.50)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.51)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.52)$$

$$v_0 \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

À semelhança do que acontece na versão orientada para *inputs*, a variável livre  $v_t$  que surge na função objetivo e nas restrições (3.50) indica o fator de escala, cujo sinal indica o tipo de variação de escala. Contudo, neste caso, um valor positivo de  $v_t$  indica um retorno decrescente de escala; um valor negativo de  $v_t$  indica um retorno crescente de escala e um valor de  $v_t$  igual a zero indica um retorno constante de escala.

Também nesta versão, o modelo (3.48) – (3.53) representa a linearização da forma fracionária do modelo BCC orientado para *outputs*, dada por:

$$\min w_{tB} = \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{it} + v_t}{\sum_{j=1}^s u_j y_{jt}} \quad (3.54)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + v_t}{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}} \geq 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.55)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.56)$$

$$u_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.57)$$

$$v_t \in \mathbb{R} \quad (3.58)$$

Para terminar esta subsecção, refira-se que também nesta versão, tanto na forma dos multiplicadores como na forma fracionária, a diferença entre os modelos CCR e BCC está apenas na variável  $v_t$  incluída neste último modelo e que, como já se referiu, indica o fator de escala.

### 3.4 Modelo CCR *versus* Modelo BCC

Comparando os valores da eficiência fornecidos pelos modelos CCR e BCC, verifica-se que o valor da eficiência fornecido pelo modelo BCC é sempre maior ou igual ao valor da eficiência fornecido pelo modelo CCR. Noutros termos, o valor da eficiência obtido por uma DMU que opera com retornos variáveis de escala é sempre maior ou igual do que o valor da eficiência obtido por essa DMU, no caso de operar com retornos constante de escala. Em particular, se uma DMU é eficiente através do modelo CCR, também o é através do modelo BCC. Note-se que o recíproco não é verdadeiro, isto é, o facto de uma DMU ser eficiente através do modelo BCC, não implica que o seja através do modelo CCR.

Segundo Cooper *et al.* (2007), a eficiência calculada através do modelo CCR é uma eficiência técnica global e diz-se, neste caso, que se uma DMU é eficiente através do modelo CCR então é globalmente eficiente (*globally efficiently*). Se uma DMU é globalmente eficiente, então essa DMU está a operar no maior comprimento de escala, isto é, está na produtividade máxima. Por outro lado, a eficiência calculada através do modelo BCC diz-se uma eficiência técnica local e diz-se, neste caso, que se uma DMU é eficiente através do modelo BCC então é localmente eficiente (*locally efficiently*).

Ainda segundo os mesmos autores, os modelos CCR e BCC permitem considerar um outro tipo de eficiência, designada por eficiência de escala ( $E_e$ ) e que é dada pelo quociente entre o

valor eficiência obtida pelo modelo CCR ( $E_{CCR}$ ) e o valor da eficiência obtido pelo modelo BCC ( $E_{BCC}$ ), isto é,

$$E_e = \frac{E_{CCR}}{E_{BCC}} \quad (3.59)$$

Note-se que a eficiência de escala é sempre menor ou igual a um. Desta forma, a eficiência de escala de uma unidade operacional é igual a um, sempre que a unidade for eficiente na presença de rendimentos constantes de escala. Se a sua eficiência de escala for inferior a um, isto é, a DMU não está a operar com a sua produtividade máxima, sendo assim ineficiente com rendimentos constantes de escala, e eficiente ou ineficiente com rendimentos variáveis de escala (Cooper *et al.*, 2007).

De (3.59) resulta que

$$E_{CCR} = E_{BCC} \times E_e, \quad (3.60)$$

isto é, a eficiência técnica global é igual ao produto da eficiência técnica local pela eficiência de escala.

### 3.5 Vantagens e limitações da metodologia DEA

A metodologia DEA apresenta, tal como outras metodologias, as suas vantagens e limitações, nomeadamente em relação aos modelos clássicos, CCR e BCC, apresentados anteriormente. De seguida apresentam-se algumas dessas vantagens e limitações, segundo Cooper *et al.* (2007).

As principais vantagens que se obtém em utilizar a metodologia DEA são:

- O aspeto financeiro não é significativo;
- A facilidade na interpretação dos modelos;
- O conhecimento apenas dos *inputs* e dos *outputs* é suficiente para determinar o valor da eficiência das DMUs e os *benchmarks* para unidades ineficientes;
- Os *inputs* e os *outputs* podem adotar diversas unidades de medida, visto que esta técnica possibilita o uso de dados financeiros e não financeiros em simultâneo;
- A flexibilidade na determinação dos pesos;

- A possibilidade de aplicar a diferentes etapas/momentos/ciclos e analisar a evolução, positiva ou negativa, da eficiência das organizações.

As principais limitações que acabam por condicionar a utilização desta metodologia, são:

- A distribuição irrealista dos pesos;
- A falta de poder de discriminação entre as unidades eficientes.

A primeira limitação reflete-se quando a eficiência de algumas DMUs é alcançada através de valores excessivamente elevados para pesos associados a um *output*, e/ou de valores excessivamente baixos para pesos associados a um *input*. A segunda limitação surge quando o número de DMUs sob avaliação não é consideravelmente superior ao número total de *inputs* e *outputs*. Neste caso, os modelos clássicos da metodologia DEA possibilitam identificar bastantes DMUs como eficientes. Estas duas limitações estão intimamente ligadas e podem ocorrer em simultâneo.

De forma a minimizar estas duas limitações, vários métodos e modelos têm surgido na literatura, designadamente os métodos baseados em restrições sobre os pesos para captação de juízos de valor, o método das restrições aos *inputs/outputs* virtuais e, por último, modelos baseados na programação linear multiobjectivo (PLMO), que são abordadas no capítulo seguinte.

## 4. Métodos e modelos de discriminação na metodologia DEA

### 4.1 Introdução

Como se referiu no capítulo anterior, os modelos clássicos da metodologia DEA revelam um fraco poder de discriminação entre as unidades eficientes, intimamente ligada a uma distribuição irrealista dos pesos associados aos *inputs* e *outputs*. Por forma a contornar estas limitações várias abordagens têm sido propostas. Uma dessas abordagens consiste na incorporação de juízos de valor, isto é, pontos de vista ou informação relativa às DMUs em avaliação. Allen, Athanassopoulos & Thanassoulis (1997) consideram três grandes grupos de métodos na incorporação de juízos de valor, através da introdução nos modelos clássicos de restrições, envolvendo pesos (multiplicadores) associados aos *inputs* e *outputs*, nomeadamente: restrições diretas sobre os pesos, ajuste dos níveis de *input/output* para capturar julgamentos de valor e restrições aos *inputs/outputs* virtuais. Uma outra abordagem consiste na utilização de modelos baseados na PLMO.

Neste capítulo é feita uma apresentação das referidas abordagens. Assim, na secção 4.2, são apresentados os métodos mais conhecidos relativos ao primeiro grupo de restrições aos pesos, o método das restrições aos valores absolutos dos pesos e o método das regiões de segurança (*Assurance Regions Method*). Na secção 4.3, é apresentado o método do *cone ratio*, como o mais representativo do segundo grupo de restrições, e é também apresentado um caso particular deste método. Na secção 4.4, são apresentados métodos que envolvem o terceiro grupo de restrições, isto é, restrições aos *inputs* e *outputs* virtuais. Por fim, na secção 4.5, são apresentados dois modelos baseados na PLMO, mais precisamente o modelo multiobjectivo, desenvolvido por Li & Reeves (1999) e o modelo bi-objectivo, proposto recentemente por Ghasemi, Ignatius & Emrouznejad (2014). Uma referência ao modelo de programação por metas, proposto por Bal, Örkücü & Çelebioglu (2010), é igualmente apresentada nesta secção.

### 4.2 Métodos das restrições aos pesos

Vários tipos de restrições sobre os pesos associados aos *inputs* e *outputs* podem ser introduzidos nos modelos clássicos da metodologia DEA (ver, por exemplo, Allen *et al.*, 1997). Estes tipos de restrições podem ser agrupados em duas categorias: restrições diretas sobre os *inputs* e/ou *outputs* e regiões de segurança. Allen *et al.* (1997) considera três categorias, onde a categoria das regiões de segurança é dividida em regiões de segurança do tipo I e regiões de segurança do tipo II.



#### 4.2.1 Método de restrições aos pesos absolutos

Este método considera restrições que impõem limites inferior e superior ao valor absoluto dos pesos associados aos *inputs* e/ou aos *outputs* e tão descritas pelas desigualdades que se seguem:

$$\delta_i \leq v_i \leq \tau_i \quad (4.1)$$

$$\rho_r \leq u_r \leq \eta_r \quad (4.2)$$

Este tipo de restrições foi inicialmente desenvolvido por Dyson & Thanassounils (1988) e mais tarde generalizado por Cook, Roll & Seiford (1991). Os limites inferior e superior presentes em (4.1) e (4.2) são dependentes da escala dos *inputs* e *outputs*. Como vimos na secção 3.3, os valores de eficiência obtidos pelas duas orientações do modelo CCR são iguais. Essa relação de igualdade continua a verificar-se quando nesse modelo são incorporadas restrições aos pesos absolutos. De referir, contudo, que esse modelo pode tornar-se num problema impossível com a introdução das restrições (4.1) e/ou (4.2) (ver, por exemplo, Allen *et al.*, 1997).

De acordo com aqueles autores, para estimar os limites aos pesos, várias abordagens alternativas têm sido sugeridas, dependendo da informação obtida através das DMUs. Uma dessas abordagens consiste num procedimento de duas fases onde, numa primeira fase, é compilada uma matriz de pesos obtida da solução dada pelos modelos clássicos da DEA, sem limites aos pesos e por eliminação de pesos «*outlier*» ou uma certa percentagem de valores extremos dos pesos. Numa segunda fase, são calculados os limites, inferior e superior, por exemplo, através do cálculo do peso médio para cada fator e de uma certa variação admissível decidida subjetivamente. A outra abordagem, que tem sido desenvolvida para o caso de um único *input* e múltiplos *outputs* ou um único *output* e múltiplos *inputs*, é baseada na média dos níveis de *input* por unidade de *output*.

#### 4.2.2 Método das regiões de segurança

O método das regiões de segurança foi inicialmente desenvolvido por Thompson, Singleton, Thrall & Smith (1986), aquando da identificação do local perfeito para um laboratório físico de alta energia e a avaliação das vantagens dessa localização. A ideia do método surgiu na sequência de deficiências detetadas por outras abordagens na avaliação de *outputs* considerados importantes para a avaliação (Cooper *et al.*, 2007).

O método das regiões de segurança difere do método das restrições aos pesos absolutos, pelo facto de considerar restrições sobre a magnitude dos pesos associados aos *inputs* e/ou aos *outputs*. Este método limita a variação dos pesos a uma determinada região, através da introdução de restrições no modelo clássico que podem ser de dois tipos, originando assim dois tipos de regiões de segurança: tipo I e tipo II.

O método das regiões de segurança do tipo I considera restrições que envolvem apenas *inputs* ou *outputs* e que incorporam na análise a ordenação relativa, ou valores relativos desses *inputs* ou *outputs*, como se refere em Allen *et al.* (1997), que dão como exemplo de tais restrições, as seguintes relativas a *inputs*:

$$\kappa_i v_i + \kappa_{i+1} v_{i+1} \leq v_{i+2} \quad (4.3a)$$

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i+1}} \leq \beta_i \quad (4.4a)$$

As restrições do tipo de (4.4a) são as mais usadas e refletem a taxa marginal de substituição entre *inputs*. Aliás, em aplicações práticas, a fixação dos valores dos limites tem sido baseada em opinião de especialistas, ou opinião destes conjuntamente com informações de preço/custo, como é referido por aqueles autores. De referir, ainda, que restrições similares às apresentadas anteriormente podem também ser consideradas relativamente aos *outputs*, isto é, restrições do tipo:

$$\omega_r u_r + \omega_{r+1} u_{r+1} \leq u_{r+2} \quad (4.3b)$$

$$\theta_r \leq \frac{u_r}{u_{r+1}} \leq \rho_r \quad (4.4b)$$

No método das regiões de segurança do tipo II, apresentado em Thompson, Langemeier, Lee, Lee & Thrall (1990), as restrições relacionam os pesos associados aos *inputs* com os pesos associados aos *outputs* e é, muitas vezes, referido como regiões de segurança de cones ligados. Um exemplo de tais restrições é dado pelas seguintes desigualdades (Allen *et al.*, 1997):

$$\gamma_i v_i \geq u_r \quad (4.5)$$

Relações entre pesos associados aos *inputs* e *outputs* são requeridas em muitas aplicações da metodologia DEA, uma vez que o valor de eficiência reflete a combinação das variáveis que representam esses pesos.

A principal dificuldade em utilizar o método das regiões de segurança, bem como o das restrições aos valores absolutos, reside na estimativa dos valores dos limites, inferior e superior, apropriados, isto é, compatíveis com os juízos de valor que se pretendem refletir na avaliação da eficiência, como se refere em Allen *et al.* (1997). Perante a inexistência de um método apropriado para os diversos fins e as diferentes abordagens, estes autores referem diversos métodos que têm sido propostos para o efeito, baseados no conhecimento ou na opinião de especialistas na área de aplicação prática, alguns dos quais foram referidos anteriormente.

Também no método das regiões de segurança, quer do tipo I quer do tipo II, os limites, inferior e superior, presentes nas restrições são dependentes da escala dos *inputs* e *outputs*. E os valores de eficiência obtidos pelo modelo clássico CCR, com a introdução deste tipo de restrições, é o mesmo em ambas as orientações (Allen *et al.*, 1997).

### **4.3 Métodos de ajuste dos níveis de *input/output* para capturar juízos de valor**

#### **4.3.1 Método do *cone ratio***

O método do *cone ratio* foi proposto por Charnes, Cooper, Huang & Sun (1990), com o objetivo de avaliar a *performance* de quarenta e oito bancos com sede nos Estados Unidos da América. A ideia deste método, que contou com a colaboração de peritos da banca, era reduzir a região de admissibilidade dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, e surgiu após os resultados insatisfatórios que os autores obtiveram com a aplicação do modelo clássico CCR.

Neste método, as restrições sobre os pesos do tipo (4.4a) ou (4.4b) são simuladas através da transformação dos dados, isto é, neste método é gerado um conjunto de dados artificiais que produzem o mesmo índice de eficiência que a incorporação daquelas restrições no modelo original (ver, por exemplo, Allen *et al.*, 1997). O método do *cone ratio* é, por isso, muitas vezes referido na literatura como um método de regiões de segurança do tipo I.

No método do *cone ratio*, a região admissível dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, é definida por um cone convexo gerado por um conjunto de direções (vetores) admissíveis não negativas (Charnes *et al.*, 1990).

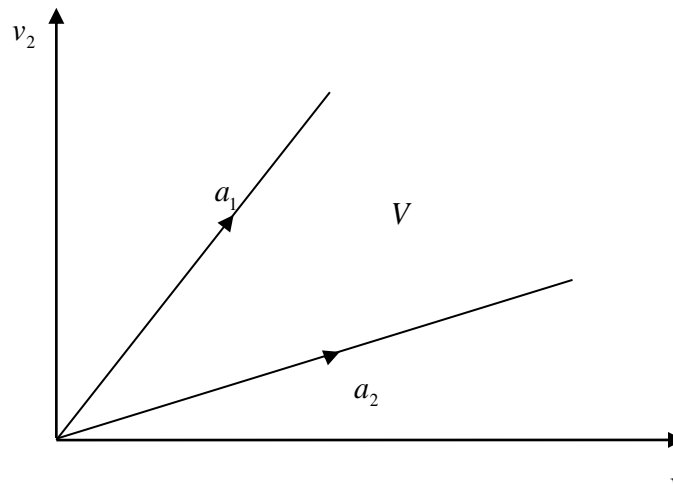
Assim, o cone convexo  $V$ , dos pesos associados aos *inputs*, gerado por  $k$  direções (vetores) admissíveis não negativas  $a_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) pode ser expresso do seguinte modo:

$$V = \sum_{j=1}^k \alpha_j a_j \quad \text{com } \alpha_j \geq 0, \forall j \quad (4.6)$$

$$= A^T \alpha \quad (4.7)$$

em que  $A^T = [a_1 \dots a_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$  e  $\alpha^T = [\alpha_1 \dots \alpha_k]$ .

Na Figura 4.1 está representado graficamente o cone convexo  $V$  para o caso de dois *inputs*.



**Figura 4.1** Representação gráfica do cone convexo gerado por dois vetores.  
**Fonte:** Cooper *et al.* (2007).

De modo similar se define o cone convexo  $U$ , dos pesos associados aos *outputs*, gerado por  $l$  direções (vetores) não negativas  $b_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ). Tem-se então:

$$U = \sum_{j=1}^l \beta_j b_j \quad \text{com } \beta_j \geq 0, \forall j \quad (4.8)$$

$$= B^T \beta \quad (4.9)$$

em que  $B^T = [b_1 \dots b_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}$  e  $\beta^T = [\beta_1 \dots \beta_l]$ .

O método do *cone ratio* pode ser aplicado aos modelos clássicos CCR e BCC. De seguida apresenta-se a aplicação deste método ao modelo CCR orientado para *inputs*. Antes, porém, para uma melhor exposição, começa-se por reescrever o modelo CCR orientado para *inputs* na forma matricial. Para tal, sejam  $X$  a matriz dos *inputs*,  $Y$  a matriz dos *outputs*,  $x_i$  e  $y_i$  os vetores dos *inputs* e dos *outputs* para a  $DMU_i$ , respetivamente, e sejam ainda  $v$  e  $u$  os vetores dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* (variáveis de decisão), respetivamente. Então, o

modelo CCR descrito por (3.5) – (3.9) pode ser reescrito na forma matricial do seguinte modo:

$$\max z_t = uy_t \quad (4.10)$$

$$s. a. \quad vx_t = 1 \quad (4.11)$$

$$uY - vX \leq 0 \quad (4.12)$$

$$v \geq 0 \quad (4.13)$$

$$u \geq 0 \quad (4.14)$$

Considerando os cones convexos  $V$  e  $U$  gerados por  $A$  e  $B$ , respetivamente, e definidos anteriormente, a aplicação do método do *cone ratio* ao modelo CCR orientado para *inputs* permite obter o seguinte modelo:

$$\max z_t = uy_t \quad (4.15)$$

$$s. a. \quad vx_t = 1 \quad (4.16)$$

$$uY - vX \leq 0 \quad (4.17)$$

$$v \in V \quad (4.18)$$

$$u \in U \quad (4.19)$$

Note-se que a diferença entre este modelo e o anterior reside apenas nas restrições que definem o espaço dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*.

Mediante as relações (4.7) e (4.9), o modelo (4.15) – (4.19) pode ser reescrito em termos dos vetores  $\alpha$  e  $\beta$  do seguinte modo:

$$\max z_t = \beta(By_t) \quad (4.20)$$

$$s. a. \quad \alpha(Ax_t) = 1 \quad (4.21)$$

$$\beta(BY) - \alpha(AX) \leq 0 \quad (4.22)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\beta \geq 0 \quad (4.24)$$

Fazendo

$$\bar{X} = AX \quad (4.25a)$$

$$\bar{Y} = BY \quad (4.25b)$$

o modelo anterior pode ainda ser reescrito da seguinte maneira:

$$\max z_i = \beta \bar{y}_i \quad (4.26)$$

$$s. a. \quad \alpha \bar{x}_i = 1 \quad (4.27)$$

$$\beta \bar{Y} - \alpha \bar{X} \leq 0 \quad (4.28)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\beta \geq 0 \quad (4.30)$$

Este último modelo é exatamente o modelo CCR com outro conjunto de dados, usualmente referidos como artificiais, resultante da transformação do conjunto de dados originais e onde as variáveis de decisão, que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, são agora  $\alpha$  e  $\beta$ , respetivamente.

O dual do modelo (4.26) – (4.30) pode ser obtido, usando uma variável real  $\theta_o$  e um vetor de variáveis  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$  (com  $k = 1, \dots, n$ ), do seguinte modo:

$$\min \theta_i \quad (4.31)$$

$$s. a. \quad \theta_i (Ax_i) - (AX)\lambda \geq 0 \quad (4.32)$$

$$(BY)\lambda - (By_i) \geq 0 \quad (4.33)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (4.34)$$

Utilizando as relações (4.25a) e (4.25b), também este modelo pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$\min \theta_i \quad (4.35)$$

$$s. a. \quad \theta_i \bar{x}_i - \bar{X}\lambda \geq 0 \quad (4.36)$$

$$\bar{Y}\lambda - \bar{y}_i \geq 0 \quad (4.37)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (4.38)$$

De acordo com Cooper *et al.* (2007), existem diversas maneiras para selecionar as direções admissíveis  $[a_j]$  e  $[b_j]$ , sendo as duas que se seguem as mais usadas:

- Utilização do conhecimento de especialistas para obter rácios de pesos admissíveis;
- Resolução do modelo clássico e escolher as DMUs preferíveis entre as eficientes, seguidamente utilizar os pesos ótimos  $v^*$  e  $u^*$  relativos a essas DMUs como direções admissíveis.

Uma terceira maneira de obter direções admissíveis consiste em combinar as duas anteriores.

#### 4.3.2 Método de Golany

Um outro método que segue a mesma filosofia do método do *cone ratio*, e que constitui um caso particular deste método, foi proposto por Golany (1988), onde a transformação dos dados incorpora relações de ordem entre os pesos, por exemplo  $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \varepsilon$ . Esta restrição pode ser omitida do modelo, substituindo  $x_{2j}$  por  $x_{2j} + x_{1j}$  e  $x_{3j}$  por  $x_{3j} + x_{2j} + x_{1j}$ , onde  $x_{ij}$  representa o nível de *input*  $i$  da  $DMU_j$  (Allen *et al.*, 1997).

Como estes autores referem, os métodos acabados de referir, baseados na utilização de dados artificiais, têm algumas vantagens como sejam a possibilidade do uso de *software* DEA e a possibilidade de permitirem o uso de dados iguais a zero ou até mesmo negativos. Porém, estes métodos têm a desvantagem de os resultados obtidos, através de dados artificiais, terem de ser reportados aos dados iniciais de modo a possibilitar uma correta interpretação dos mesmos.

#### 4.4 Método das restrições aos inputs/outputs virtuais

Em vez de restrições sobre os pesos (multiplicadores) associados aos *inputs* e *outputs*, Wong & Beasley (1990) propuseram um outro tipo de restrições que limitam a proporção do total *input* ou *output* virtual de uma  $DMU_k$  consagrada a um determinado *input* ou *output*. Noutros termos, a «importância» do *input*  $i$  para uma  $DMU_k$  é limitada ao intervalo  $[\varphi_i, \psi_i]$ , onde  $\varphi_i$

e  $\psi_i$  são valores determinados por peritos. Então a restrição ao *input* virtual  $i$  é dada pela expressão:

$$\varphi_i \leq \frac{v_i x_{ik}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq \psi_i \quad (4.39a)$$

em que  $\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}$  é o *input* virtual total da DMU <sub>$k$</sub> .

De modo idêntico, limitando a «importância» do *output*  $r$  ao intervalo  $[\pi_r, \tau_r]$ , a restrição ao *output* virtual  $r$  da DMU <sub>$k$</sub>  é dada por:

$$\pi_r \leq \frac{u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^r u_r y_{rk}} \leq \tau_r \quad (4.39b)$$

em que  $\sum_{i=1}^r u_r y_{rk}$  representa o *output* virtual total da DMU <sub>$k$</sub> .

Como se refere em Allen *et al.* (1997), este método tem recebido pouca atenção na literatura da metodologia DEA, havendo por isso necessidade de mais investigação a fim de explorar os prós e contras deste método. Contrariamente ao que acontece com as restrições aos pesos absolutos e com as regiões de segurança, os limites inferior e superior neste método não dependem da escala dos *inputs* e *outputs*, e o valor de eficiência obtido pelo modelo clássico, com este tipo de restrições, é sensível à orientação do modelo.

## 4.5 Modelos multiobjectivo

As abordagens feitas nas secções anteriores, para contornar o problema do fraco poder de discriminação e da distribuição irrealista dos pesos associados aos modelos clássicos da metodologia DEA, requerem informação *a priori* relativa a esses pesos que envolvem juízos de valor humano e, por conseguinte, um certo grau de subjetividade.

Nesta secção apresenta-se uma abordagem diferente, isto é, uma abordagem que não requer qualquer tipo de informação *a priori* para melhorar o poder de discriminação, e que também permite uma melhor distribuição dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. Tal abordagem é baseada na utilização da PLMO.



#### 4.5.1 Modelo multiobjectivo de Li & Reeves

O primeiro modelo multiobjectivo para a metodologia DEA foi proposto por Li & Reeves (1999) e teve por base o modelo CCR orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores. Este modelo contempla três objetivos ou critérios, definido sobre o mesmo conjunto de restrições, correspondentes a três conceitos de eficiência, o conceito clássico presente no modelo CCR e os conceitos *minimax* e *minisoma* presentes nos outros dois objetivos. Estes dois últimos conceitos são mais restritivos do que o primeiro, e por isso permitem um maior poder de discriminação entre as DMUs eficientes, assim como uma melhor distribuição dos pesos associados aos *inputs* e *outputs* (Li & Reeves, 1999).

Para descrever esse modelo, Li & Reeves (1999) apresentaram um modelo equivalente ao modelo CCR orientado para *inputs* na forma dos multiplicadores, apresentado no capítulo 3 por (3.5) – (3.9), usando explicitamente as variáveis de desvio associadas às desigualdades (3.7) e onde a variável correspondente à DMU em avaliação permite obter o valor da eficiência para essa DMU. Então, considerando os parâmetros e as variáveis envolvidos no modelo (3.5) – (3.9) e sendo  $d_k$  a variável de desvio para a DMU $_k$  ( $j=1,\dots,n$ ), nas restrições (3.7), e  $d_t$  ( $t \in \{1,\dots,n\}$ ) a variável de desvio para a DMU $_t$  em avaliação, os autores apresentaram então o seguinte modelo:

$$\min d_t \quad \left( \text{ou} \quad \max e_t = \sum_{r=1}^s u_r y_{rt} \right) \quad (4.40)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{it} = 1 \quad (4.41)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + d_k = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.42)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (4.43)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.44)$$

$$d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.45)$$

De acordo com o modelo anterior, a DMU $_t$  é eficiente se, e só se,  $d_t = 0$  ou, equivalentemente,  $e_t = 1$ . A quantidade  $d_t$  tal que  $d_t \in ]0,1[$  e pode ser vista como uma

medida de ineficiência. Então o índice de eficiência da  $DMU_t$  é dado por  $1-d_t$ , isto é,  $e_t = 1-d_t$ , onde  $e_t$  é o índice de eficiência fornecido pelo modelo CCR orientado para *inputs*. Obviamente que quanto menor for o valor de  $d_t$  maior será o índice de eficiência da  $DMU_t$ . Note-se que a quantidade  $d_k$  é limitada ao intervalo  $[0,1[$  apenas para a DMU em avaliação, isto é, para  $DMU_t$  podendo para as restantes assumir valores superiores a um.

O modelo (4.40) – (4.45) é então uma reformulação do modelo clássico CCR, onde o índice de eficiência é calculado indiretamente através do cálculo direto do índice de ineficiência, medido pela variável de desvio da DMU em avaliação. Para além, desta medida clássica de ineficiência, Li & Reeves (1999) consideraram mais duas medidas de ineficiência envolvendo as variáveis de desvio, uma obtida pela minimização do desvio máximo e a outra pela minimização da soma dos desvios, para propor um modelo multiobjectivo para a metodologia DEA. Os autores designaram este modelo por *Multiple Criteria Data Envelopment Analysis* (MCDEA), que considera então três funções objetivo, cada uma correspondendo a um conceito de eficiência, e é definido do seguinte modo:

$$\min d_t \left( \text{ou } \max e_t = \sum_{r=1}^s u_r y_{rt} \right) \quad (4.46)$$

$$\min M \quad (4.47)$$

$$\min \sum_{k=1}^n d_k \quad (4.48)$$

$$\text{s. a. } \sum_{i=1}^m v_i x_{it} = 1 \quad (4.49)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_k = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.50)$$

$$M - d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.51)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (4.52)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.53)$$

$$d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.54)$$

Num problema de PLMO, como é o caso do modelo anterior, não existe, em geral, uma solução que otimiza todos os objetivos em simultâneo, como acontece num problema de programação linear (PL). Neste tipo de problema, o conceito de solução ótima é substituído pelo conceito de solução não dominada. Uma solução admissível de um problema de PLMO diz-se não dominada, se não existir uma outra solução admissível que melhore um objetivo, sem piorar, pelo menos, um dos restantes. Na PLMO uma solução não dominada é também designada por solução eficiente. Aliás, a partilha do conceito de eficiência esteve na origem da utilização da PLMO na metodologia DEA, assim como de outro tipo de interação entre estas abordagens (ver, por exemplo, Meza, Mello & Clímaco, 2006).

Num problema de PLMO existe um conjunto de soluções não denominadas que são analisadas pelo decisor para depois, num processo de tomada de decisão, escolher a melhor solução de compromisso. Encontrar um conjunto de soluções não dominadas num problema de PLMO é uma tarefa muito mais difícil, do que encontrar a solução ótima de um problema de PL. No entanto, refira-se que o conjunto das soluções não dominadas inclui sempre as soluções fornecidas pela otimização individual de cada objetivo, obtidas através da resolução de um problema de PL.

No modelo (4.46) – (4.54), a primeira função objetivo corresponde, como se viu anteriormente, à função objetivo do modelo CCR na forma dos multiplicadores. A segunda função objetivo é uma função *minimax*, onde  $M$  representa o valor máximo de todas as variáveis de desvio  $d_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Por fim, a terceira função objetivo é uma função *minisoma* de todas as variáveis de desvio. Note-se que as restrições (4.51) foram introduzidas no modelo para definir o desvio máximo e não alteram o conjunto das soluções admissíveis.

A solução que otimiza o primeiro objetivo permite obter a eficiência clássica, isto é, a  $DMU_t$  é eficiente (no sentido clássico) se, e só se, o valor de  $d_t$  correspondente à solução que otimiza o primeiro objetivo for igual a zero. Através da variável  $d_t$  pode também definir-se a eficiência correspondente ao segundo e terceiro objetivos. Assim, a  $DMU_t$  é *minimax* eficiente se, e só se, o valor de  $d_t$  correspondente à solução que otimiza o segundo objetivo for igual a zero. Identicamente, a  $DMU_t$  é *minisoma* eficiente se, e só se, o valor de  $d_t$  correspondente à solução que otimiza o terceiro objetivo for igual a zero. Em qualquer dos três conceitos de eficiência, acabados de referir, o índice de eficiência para a  $DMU_t$  é dado por  $1 - d_t$  (Li & Reeves, 1999).

De acordo com Li & Reeves (1999), a definição de eficiência *minimax* ou *minisoma*, a respeito de uma  $DMU_t$ , requer  $d_t = 0$ . Então, se a  $DMU_t$  é *minimax* ou *minisoma* eficiente, também o é no sentido clássico. No entanto, se uma  $DMU_t$  é eficiente pelo critério clássico, tal não significa que o seja pelos critérios *minimax* ou *minisoma*, uma vez que  $d_t = 0$  não implica que  $M$  e  $\sum_{j=1}^n d_k$  sejam mínimos. Estes dois critérios são então mais restritivos do que o critério clássico, isto é, é mais difícil uma DMU ser *minimax* ou *minisoma* eficiente do que ser eficiente no sentido clássico. Como consequência do exposto, tem-se que tanto o critério *minimax* como o *minisoma* permitem, em geral, obter um menor número de DMUs eficientes, relativamente ao critério clássico. Portanto, a inclusão destes dois critérios num modelo de DEA tende a melhorar o poder de discriminação das DMUs eficientes. Segundo os mesmos autores, o critério *minimax* é o que, em geral, apresenta maior poder discriminação quando comparado com o critério *minisoma*.

Como se refere em Ghasemi *et al.* (2014), Li & Reeves (1999) não sugeriram um método que otimizasse os três objetivos simultaneamente, limitando-se a propor um modelo de PLMO para encontrar soluções não dominadas. Essas soluções são depois deixadas ao analista que escolhe a preferida, se necessário.

No sentido de considerarem os três objetivos do modelo MCDEA simultaneamente, Bal *et al.* (2010) propuseram uma abordagem de programação por metas. Esta técnica constitui a forma mais conhecida de resolver problemas de PLMO, consiste em estabelecer uma meta para cada objetivo e determinar a solução admissível que satisfaz todas as metas o melhor possível, designada por melhor solução de compromisso. Bal *et al.* (2010) propuseram então o modelo designado por GPDEA-CCR (*Goal Programming Data Envelopment Analysis*), baseado no modelo CCR, e ainda o modelo GPDEA-BCC, baseado no modelo BCC.

No entanto, estes modelos não abordam adequadamente a estrutura do modelo MCDEA e apresentam algumas lacunas que vão desde a apresentação da interpretação do método de programação por metas até aos resultados obtidos, como se mostra em Ghasemi *et al.* (2014). A situação mais problemática, referida por estes autores, acontece quando o índice de eficiência de uma DMU é igual a um e os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* são todos iguais a zero, revelando a incapacidade dos pesos em traduzir aqueles dados em eficiência técnica.

No seu trabalho, para além de apontarem as deficiências do modelo de programação por metas, desenvolvido por Bal *et al.* (2010), Ghasemi *et al.* (2014), propõem o uso do método das ponderações para determinar soluções não dominadas para o modelo MCDEA, construindo assim um modelo que os autores designaram por modelo bi-objectivo, e que será apresentado na subsecção seguinte. O método das ponderações consiste em associar um ponderador a cada função objetivo e, em seguida, otimizar a soma ponderada das funções objetivo.

#### 4.5.2 Modelo bi-objectivo

O modelo bi-objectivo, proposto por Ghasemi *et al.* (2014), baseia-se no modelo MCDEA, desenvolvido por Li & Reeves (1999). Ghasemi *et al.* (2014) sugeriram a aplicação do método das ponderações, de forma otimizar conjuntamente os três objetivos do modelo MCDEA. Para tal, os autores associaram os ponderadores  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , respetivamente, à primeira, à segunda e à terceira função objetivo, do modelo MCDEA, obtendo a seguinte função objetivo:

$$f = w_1 d_t + w_2 M + w_3 \sum_k d_k \quad (4.55)$$

Os ponderadores usados em (4.55) podem assumir diversos valores, dando assim origem a diferentes soluções não dominadas. Atendendo ao facto de o primeiro objetivo, no modelo MCDEA, revelar um fraco poder discriminação em relação aos outros dois, e também ao facto de que a minimização de  $\sum_k d_k$  implica a minimização de  $d_k$ , Ghasemi *et al.* (2014) consideraram  $w_1 = 0$  em (4.55) propondo então o seguinte modelo:

$$\min \quad h = \left( w_2 M + w_3 \sum_k d_k \right) \quad (4.56)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{it} = 1 \quad (4.57)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + d_k = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.58)$$

$$M - d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (4.59)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (4.60)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (4.61)$$

$$d_k \geq 0 \qquad k = 1, \dots, n \qquad (4.62)$$

O parâmetro  $\varepsilon$  que surge em (4.60) e (4.61) representa um valor não arquimediano menor do que qualquer número real, que serve para impedir que os multiplicadores tenham um valor igual a zero. Contudo, esse parâmetro pode também assumir o valor de zero, o que será feito no estudo prático a apresentar no capítulo seguinte.

Ghasemi *et al.* (2014) aplicaram o modelo anterior a um caso prático relativo à dependência energética de vinte e cinco países da União Europeia, utilizado também por Bal *et al.* (2010). Apesar de os ponderadores poderem assumir qualquer valor de acordo com as preferências do analista, aqueles autores consideraram  $w_1 = w_2 = 0,5$ .

## 5. Estudo Empírico: Análise de desempenho de instituições bancárias

### 5.1 Introdução

O presente capítulo tem por objetivo aplicar alguns dos métodos/modelos, descritos nos capítulos 3 e 4, a uma situação real, mais concretamente à avaliação da *performance* de vinte instituições bancárias, que operavam em Portugal no ano de 2014. Com esta aplicação pretende-se ter uma ideia das diferenças entre o poder de discriminação desses métodos/modelos, mais precisamente entre o método do *cone ratio* e os modelos multiobjectivo.

Assim, na secção 5.2, descreve-se o modo como foi feita a seleção dos dados e a escolha dos modelos utilizados nesta aplicação. Posteriormente, na secção 5.3, apresentam-se os resultados obtidos e a respetiva análise dos resultados.

### 5.2 Seleção de dados e modelos

De forma a avaliar a *performance* das instituições bancárias, que operavam em Portugal no ano de 2014, foram utilizados dados contabilísticos relativos ao ano de 2014 retirados do boletim estatístico anual, nº 50, da Associação Portuguesa de Bancos. Nesse boletim estatístico estão presentes vinte e seis instituições bancárias, sendo que foram selecionadas vinte, uma vez que nem todas as instituições apresentam dados relativos aos *inputs/outputs* com valores significativamente relevantes para o estudo em causa. Relativamente aos vinte bancos selecionados, não foi feita qualquer distinção em relação à sua natureza, pelo que o estudo inclui bancos comerciais e bancos de investimento.

Para o presente estudo prático, foram selecionados três *inputs*: o número de colaboradores, os recursos de clientes e outros empréstimos (em milhares de euros), e o capital (em milhares de euros). Relativamente aos *outputs*, foram também três os selecionados: o crédito a clientes (em milhares de euros), as aplicações em instituições de crédito (em milhares de euros) e a margem financeira (em milhares de euros). A informação referente aos *inputs* e *outputs* selecionados para cada instituição bancária é apresentada na Tabela 5.1, onde, da esquerda para a direita, as duas primeiras colunas identificam as instituições bancárias em análise, as três seguintes indicam os *inputs* e as três últimas os *outputs*.

**Tabela 5.1** *Inputs* e *Outputs* relativos às vinte instituições bancárias.

DMUs (Instituições Bancárias)		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Colaboradores	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	1 441	4 450 463	300 228	3 463 829	1 178 980	103 000
2	Banco BPI	5 923	20 526 976	1 293 063	21 543 072	1 145 354	419 386
3	Banco Português de Investimento	65	1 418 519	17 500	74 227	33 822	2 766
4	Banco Carregosa	73	120 337	20 000	51 438	48 569	3 727
5	Banco Comercial Português	7 548	35 055 898	3 706 690	36 760 931	1 268 991	425 040
6	Banco ActivoBank	139	517 939	17 500	16 563	8 001	2 484
7	Banco de Investimento Global	189	819 624	104 000	136 158	558	25 120
8	Banco Finantia	147	460 860	150 000	148 425	665 217	39 910
9	Banco Invest	124	298 134	59 500	114 527	3 400	12 742
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	1 916	6 457 816	1 720 700	7 027 157	302 593	130 750
11	Banif - Banco de Investimento	42	143 276	85 000	94 921	13 040	3 181
12	Banif Mais	215	889	101 000	423 214	19 453	32 568
13	Caixa Económica Montepio Geral	3 886	13 609 144	1 700 000	14 655 839	780 988	294 272
14	Caixa Geral de Depósitos	8 858	61 761 689	5 900 000	55 200 604	3 645 595	558 496
15	Caixa - Banco de Investimento	155	277 550	81 250	469 732	40 941	25 077
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	3 698	10 620 337	965 799	7 309 835	191	248 225
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	606	2 644 335	530 000	4 646 569	141 596	50 166
18	Banco Popular Portugal	1 299	4 114 903	476 000	5 458 783	197 962	124 723
19	Banco Santander Consumer Portugal	168	1 500	66 593	820 824	0	20 962
20	Banco Santander Totta	5 272	21 597 821	656 723	25 624 330	1 836 610	495 127

Fonte: elaboração própria.



A seleção dos *inputs* foi feita tendo em conta que os mesmos refletem os recursos necessários para se obterem os *outputs* e que estes, por sua vez, refletem o resultado das decisões tomadas.

Relativamente aos *inputs*, o número de colaboradores revela o número de efetivos ao serviço, que influencia diretamente a gestão das empresas e, conseqüentemente, o resultado das mesmas, revelando ser fundamental a sua introdução nos *inputs* selecionados. Os recursos de clientes e outros empréstimos são a principal fonte de financiamento dos bancos, nomeadamente através de depósitos dos clientes, tornando-se, assim, um recurso essencial para o normal funcionamento da instituição. Por fim, o capital da empresa representa os recursos acumulados que se destinam à criação de valor e que assumem particular relevância no bom desempenho económico da empresa.

Relativamente aos *outputs* selecionados, o crédito a clientes representa os empréstimos concebidos pelo banco aos seus clientes, sendo um dos principais *outputs* no processo de produção de um banco. As aplicações em instituições de crédito são uma parte importante do negócio das instituições bancárias, nomeadamente as aplicações em depósitos, empréstimos e outras aplicações financeiras, noutras instituições. Por último, a margem financeira representa o valor que a empresa consegue obter, considerando todos os gastos com a sua atividade.

De acordo com vários autores, designadamente Banker, Charnes & Cooper (1984), para uma correta aplicação da metodologia DEA, a quantidade total de *inputs* e *outputs* escolhidos deve ser inferior a um terço do número de DMUs, sendo que nesta situação tal se verifica, dado que

$$(3+3) < \frac{20}{3}.$$

Para o desenvolvimento deste estudo empírico foram selecionados os modelos orientados para *inputs*, visto que o país está a viver uma situação de crise, onde objetivo principal passa pela contenção de custos, utilizando assim menos recursos (*inputs*) para atingir os mesmos resultados (*outputs*), ou seja, produzir o mesmo com menos recursos. A orientação para *outputs*, que consiste em aumentar os *outputs* utilizando um determinado nível de *inputs*, é mais apropriada em períodos de crescimento económico.

### 5.3 Resultados e respetiva análise

Para obtenção dos resultados que se apresentam nesta secção foram utilizados os seguintes *softwares*: o Sistema Integrado de Apoio à Decisão (SIAD) para obter os resultados do modelo CCR e do método do *cone ratio*; e o módulo de programação linear, assim como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote *CPLEX Optimization Studio Academic Research 12.5*, para obter os resultados dos modelos multiobjectivo.

Na Tabela 5.2 apresentam-se os resultados obtidos com o modelo CCR orientado para *inputs*, relativos ao valor da eficiência e aos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. Nessa tabela, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas identificam-se as instituições bancárias em análise, na terceira coluna apresenta-se o índice de eficiência para cada DMU, nas três seguintes apresentam-se os pesos associados aos *inputs* e nas três últimas os pesos associados aos *outputs*.

Relativamente aos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* e à sua importância na análise de DMUs eficientes, torna-se essencial lembrar que a distribuição irrealista dos pesos é uma das principais limitações da metodologia DEA. Sendo possível observar essa mesma limitação, através da análise da Tabela 5.2, onde um número exageradamente elevado de DMUs consideradas eficientes, pelo modelo clássico, têm pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* próximos de zero ou mesmo iguais a zero, o que significa que algumas DMUs são eficientes à custa de um número reduzido de *inputs* e/ou *outputs*.

Como exemplos mais evidentes referem-se as instituições bancárias 1, 8, 12 e 20, as três primeiras são consideradas eficientes apenas com base em um *input* e um *output* cada e com valores relativamente baixos, e a última é considerada eficiente com base em pesos que assumem valores muito próximos de zero ou até mesmo iguais a zero.

**Tabela 5.2** Resultados relativos ao modelo CCR orientado para *inputs*.

	DMUs (Instituições Bancárias)	Eficiência CCR	Pesos					
			<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
			Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	1	0,000000	0,000000	0,000004	0,000000	0,000001	0,000000
2	Banco BPI	0,720525	0,000153	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001
3	Banco Português de Investimento	1	0,031872	-0,000002	0,000070	0,000000	0,000000	0,000362
4	Banco Carregosa	0,569546	0,000000	0,000002	0,000039	0,000000	0,000003	0,0000210
5	Banco Comercial Português	0,781467	0,000093	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
6	Banco ActivoBank	0,199709	0,000000	0,000001	0,000026	0,000000	0,000000	0,000080
7	Banco de Investimento Global	0,918029	0,002054	0,000000	0,000006	0,000000	0,000000	0,000030
8	Banco Finantia	1	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000002	0,000000
9	Banco Invest	0,639279	0,002857	0,000000	0,000010	0,000000	0,000000	0,000050
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,587485	0,000466	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002
11	Banif - Banco de Investimento	1	0,054874	0,000005	-0,000023	0,000006	0,000000	0,000148
12	Banif Mais	1	0,000000	0,000000	0,000010	0,000000	0,000000	0,000030
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,712541	0,000216	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001
14	Caixa Geral de Depósitos	0,943850	0,000077	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
15	Caixa - Banco de Investimento	1	0,002676	0,000000	0,000007	0,000000	0,000000	0,000036
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,569588	0,000131	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	1	0,000728	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000
18	Banco Popular Portugal	0,8809	0,000694	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003
19	Banco Santander Consumer Portugal	1	0,000000	0,000001	0,0000015	0,000001	0,000000	0,000000
20	Banco Santander Totta	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Fonte: elaboração própria.

De acordo com os resultados apresentados, é possível verificar que existem nove instituições bancárias eficientes, nomeadamente:

- ✓ Banco BIC Português;
- ✓ Banco Português de Investimento;
- ✓ Banco Finantia;
- ✓ Banif - Banco de Investimento;
- ✓ Banif Mais;
- ✓ Caixa - Banco de Investimento;
- ✓ Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal);
- ✓ Banco Santander Consumer Portugal;
- ✓ Banco Santander Totta.

Este número de nove instituições bancárias consideradas eficientes, num universo de vinte, pode ser considerado elevado, devido à pouca relevância que os pesos têm para calcular a eficiência de uma DMU.

Com vista a uma discriminação das instituições eficientes foram utilizados alguns dos métodos/modelos descritos no capítulo 4, mais precisamente: o método do *cone ratio* e os modelos multiobjectivo.

Para a aplicação do método do *cone ratio* consideraram-se três DMUs eficientes obtidas através do modelo CCR orientado para *inputs*, as DMUs 3, 8 e 19. De seguida, selecionaram-se três pesos para os *inputs* e três pesos associados aos *outputs*, que foram usados para o cálculo da nova matriz de *inputs* e *outputs*, denominada de matriz do *cone ratio*, que é apresentada no Apêndice 1. Relativamente aos modelos multiobjectivo foram considerados os critérios *minimax*, *minisoma* e BiO-MCDEA.

Na Tabela 5.3 apresentam-se os resultados relativos ao valor da eficiência obtidos pelo método do *cone ratio* e pelos modelos multiobjectivo referidos anteriormente. De forma a facilitar a comparação, inclui-se também nesta tabela os valores da eficiência do modelo CCR, apresentado na terceira coluna da Tabela 5.2.

**Tabela 5.3** Resultados relativos à eficiência dos modelos CCR, *cone ratio*, *minimax*, *minisoma* e BiO-MCDEA.

DMUs (Instituições Bancárias)		Eficiência				
		CCR	<i>Cone Ratio</i>	<i>Minimax</i>	<i>Minisoma</i>	BiO-MCDEA
1	Banco BIC Português	1	0,75091	0,55357	0,55165	0,55165
2	Banco BPI	0,720525	0,704715	0,70358	0,71720	0,7172
3	Banco Português de Investimento	1	1	0,16128	0,16128	0,16128
4	Banco Carregosa	0,569546	0,418374	0,21661	0,29735	0,29735
5	Banco Comercial Português	0,781467	0,67955	0,76279	0,72985	0,72985
6	Banco ActivoBank	0,199709	0,186615	0,08674	0,10931	0,10931
7	Banco de Investimento Global	0,918029	0,758639	0,19724	0,75055	0,75055
8	Banco Finantia	1	1	0,12126	0,10083	0,11848
9	Banco Invest	0,639279	0,613968	0,43903	0,58132	0,58132
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,587485	0,415305	0,49405	0,49741	0,49204
11	Banif - Banco de Investimento	1	0,19324	0,14194	0,18379	0,18379
12	Banif Mais	1	1	0,56722	0,74441	0,74441
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,712541	0,594065	0,67950	0,71125	0,71125
14	Caixa Geral de Depósitos	0,943850	0,689723	0,82835	0,83378	0,83378
15	Caixa - Banco de Investimento	1	0,981107	0,71156	0,88641	1
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,569588	0,560439	0,47294	0,53609	0,53609
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	1	0,828023	0,99440	1	1
18	Banco Popular Portugal	0,8809	0,745559	0,80964	0,8643	0,86428
19	Banco Santander Consumer Portugal	1	1	0,93541	1	1
20	Banco Santander Totta	1	1	1	1	1

Fonte: elaboração própria.

De acordo com os resultados apresentados na quarta coluna da Tabela 5.3, as instituições bancárias consideradas eficientes pelo método do *cone ratio* são cinco, nomeadamente:

- ✓ Banco Português de Investimento;
- ✓ Banco Finantia;
- ✓ Banif Mais;
- ✓ Banco Santander Consumer Portugal;
- ✓ Banco Santander Totta.

Após a aplicação do método do *cone ratio* pode-se observar uma redução no número de instituições bancárias de nove para cinco, uma vez que a aplicação deste método permite adicionar, de forma simulada, restrições aos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* das DMUs em análise, restringindo a área admissível dos pesos, tendo como consequência a redução do número de DMUs eficientes e uma distribuição dos pesos mais razoável.

Os resultados obtidos com a aplicação do modelo *minimax*, registados na quinta coluna da Tabela 5.3, permitem observar que as instituições bancárias consideradas eficientes ficaram reduzidas apenas a uma, o Banco Santander Totta.

Na sexta coluna da Tabela 5.3 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do modelo *minisoma*, onde se verifica que as instituições bancárias consideradas eficientes são três, nomeadamente:

- ✓ Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal);
- ✓ Banco Santander Consumer Portugal;
- ✓ Banco Santander Totta.

Por fim, relativamente ao modelo BiO-MCDEA, cujo os resultados são apresentados na sétima coluna da Tabela 5.3, verifica-se que existem quatro instituições bancárias consideradas eficientes, nomeadamente:

- ✓ Caixa - Banco de Investimento;
- ✓ Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal);
- ✓ Banco Santander Consumer Portugal;
- ✓ Banco Santander Totta.

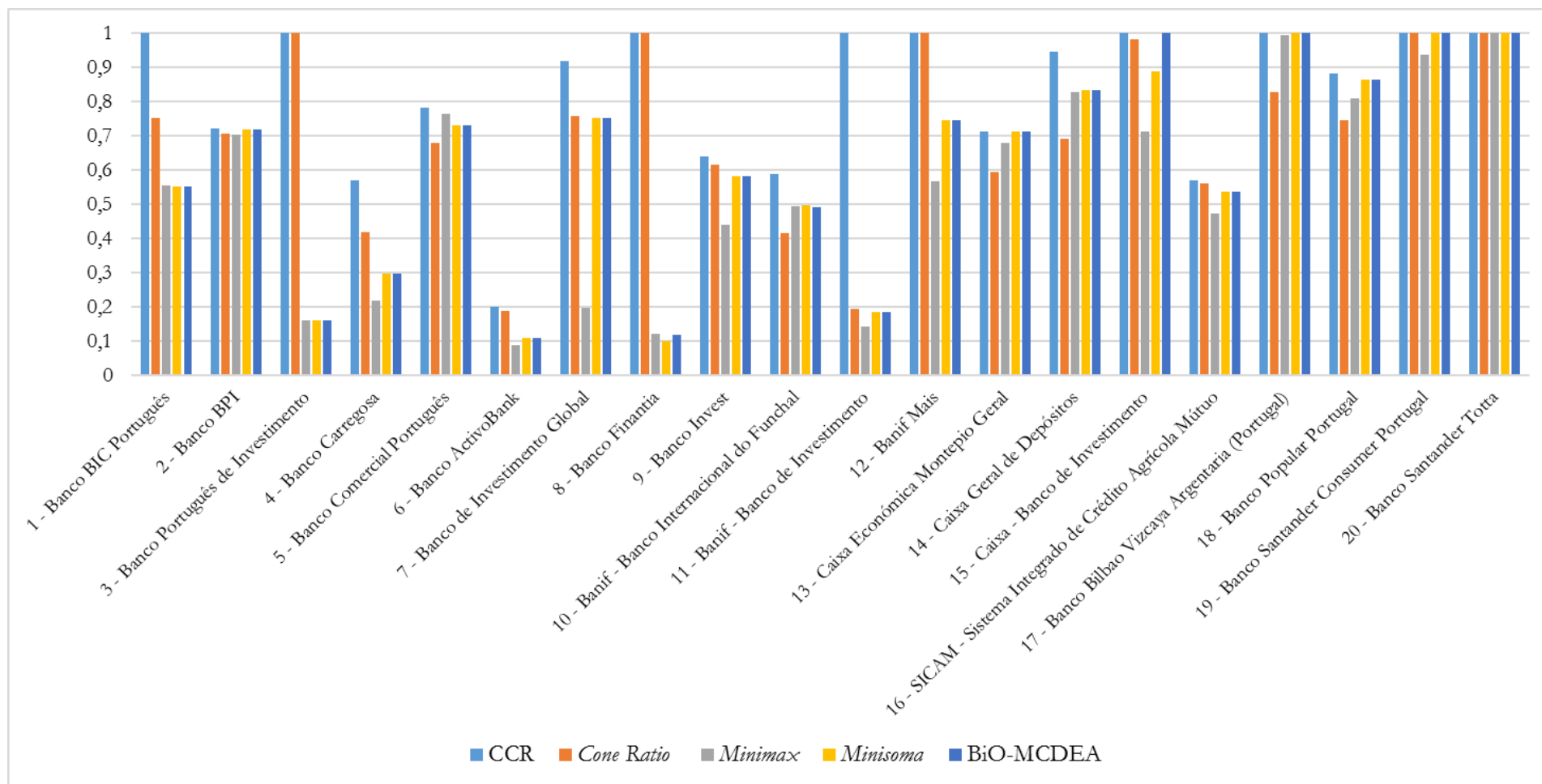
Em suma, o modelo clássico da metodologia DEA considera que 45% das instituições bancárias analisadas são eficientes. No entanto, com a aplicação dos métodos/modelos de discriminação, esse valor sofre uma diminuição acentuada para 25% de instituições eficientes, com o método do *cone ratio*. Seguindo a ordem da apresentação dos modelos multiobjectivo, verifica-se que no modelo *minimax* a percentagem de instituições eficientes é de apenas 5%, enquanto que com aplicação dos modelos *minisoma* e BiO-MCDEA essa percentagem é de 15% e 20%, respetivamente.

De acordo com os resultados anteriores e conforme foi mencionado no capítulo 4, o método do *cone ratio* e os modelos multiobjectivo não beneficiam a eficiência da DMU em análise, como acontece com o modelo clássico CCR e também com o modelo BCC, isto é, é mais difícil uma DMU ser considerada eficiente por intermédio do método do *cone ratio* e dos modelos multiobjectivo, do que através dos modelos clássicos da metodologia DEA.

Comparando os resultados obtidos pelo método do *cone ratio* com os obtidos pelos modelos multiobjectivo, verifica-se que estes últimos apresentam um maior poder de discriminação. Verifica-se, também, que entre os modelos multiobjectivo, o modelo *minimax* é o que tem maior capacidade de discriminação, seguido do modelo *minisoma* e, por último, do modelo BiO-MCDEA.

Nos Apêndices 2, 3, 4 e 5 são apresentados os valores dos pesos relativos ao método do *cone ratio* e aos modelos multiobjectivo, onde facilmente se observa que existe uma melhor distribuição dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, contrariamente ao que acontece no modelo clássico CCR.

De modo a facilitar a análise dos resultados expressos na Tabela 5.3, apresenta-se na Figura 5.1, o gráfico relativo a esses resultados.



**Figura 5.1** Resultados relativos à eficiência dos modelos CCR, *cone ratio*, *minimax*, *minisoma* e BiO-MCDEA.

**Fonte:** elaboração própria.



Através da análise do gráfico da Figura 5.1, é possível observar que o método do *cone ratio* é o que permite um maior poder discriminação em seis instituições bancárias, as instituições 5, 10, 13, 14, 17 e 18, comparativamente aos restantes métodos/modelos aplicados. No entanto, não tem esse mesmo poder em relação às outras instituições bancárias em análise, acabando por não ser o método/modelo com maior capacidade de discriminação.

Relativamente aos modelos multiobjectivo, o modelo *minimax* consegue ser superior aos outros modelos multiobjectivo e ao método do *cone ratio* em dez instituições bancárias, as instituições 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16 e 19.

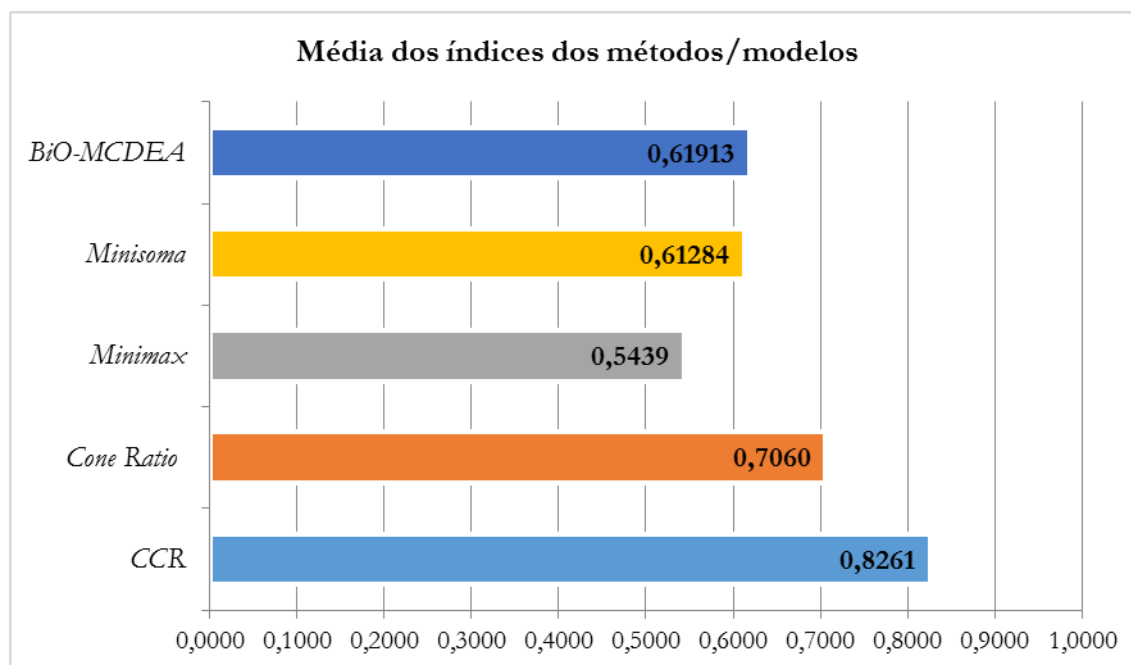
A superioridade deste modelo é evidente nas instituições 7, 15 e 19, quando comparado com os restantes métodos/modelos. No caso da instituição bancária 19, o modelo *minimax* é o único modelo através do qual a instituição não é eficiente.

É possível também observar, através da análise do gráfico, que o modelo *minisoma* apenas consegue atingir valores de eficiência mais baixos, relativamente aos outros modelos multiobjectivo e ao método do *cone ratio*, na instituição bancária 8, o que acaba por não ser relevante, tendo em conta que o valor de eficiência está muito próximo dos outros modelos multiobjectivo. Por fim, o modelo BiO-MCDEA é o único que não tem a capacidade de discriminar nenhuma instituição bancária, com valores de eficiência inferiores aos restantes modelos multiobjectivo, demonstrando o seu fraco poder de discriminação.

Analisando ainda o referido gráfico, é também possível realçar as instituições bancárias 3 e 8, uma vez que são consideradas eficientes com o modelo clássico CCR e o método do *cone ratio*, porém com a aplicação dos modelos multiobjectivo o valor da eficiência deixa de ser 1 e reduz drasticamente para valores pouco superiores a 0,10. É ainda visível, através da análise do gráfico, que apenas uma instituição bancária, a instituição 20, é eficiente considerando todos os métodos/modelos aplicados neste estudo.

Em síntese, é possível retirar desta análise duas conclusões importantes, a única instituição bancária verdadeiramente eficiente é o Banco Santander Totta (DMU 20) e o modelo *minimax*, no geral, é o que apresenta maior poder de discriminação, em relação aos restantes métodos/modelos aplicados neste estudo.

A redução do número de instituições bancárias eficientes, por via da aplicação dos métodos/modelos de discriminação, pode também ser observada a partir da análise do gráfico da Figura 5.2, onde constam as médias dos índices da eficiência obtidos pelo método do *cone ratio* e pelos modelos multiobjectivo.



**Figura 5.2** Média dos índices dos métodos/modelos utilizados.

**Fonte:** elaboração própria.

Como se pode constatar, o valor médio da eficiência obtido pelo modelo clássico CCR (0,8261) é significativamente superior aos valores do método do *cone ratio* e dos modelos multiobjectivo, principalmente em relação ao modelo *minimax*, que apresenta um valor de 0,5439. É então possível garantir que os modelos de discriminação, quando comparados com o modelo CCR, apresentam uma notável redução de instituições bancárias consideradas eficientes, bem como uma redução relevante no valor médio da eficiência. Pode-se, ainda, afirmar que as conclusões deste estudo estão de acordo com Li & Reeves (1999), quando referem que o modelo clássico CCR em relação a outros modelos é menos restritivo, e o modelo *minimax* é mais restritivo do que o modelo *minisoma*.

## 6. Conclusões

No decorrer dos últimos anos, as organizações têm passado por diversas mudanças devido à competitividade cada vez mais forte no mercado, conduzindo à necessidade crescente das mesmas se ajustarem à nova realidade, modificando a sua estratégia, tornando-as mais competitivas e contribuindo, assim, para o seu crescimento. Estas alterações exigem novas maneiras de pensar e, conseqüentemente, novas maneiras de realizar a avaliação de desempenho organizacional, dando relevância a indicadores que não sejam exclusivamente de caráter financeiro.

As novas medidas de avaliação de desempenho nas organizações possibilitam a inclusão de diferentes tipos de indicadores, como o crescimento esperado, o nível de qualidade, a satisfação dos consumidores, a quota de mercado, a inovação e as condições económicas da organização. Desta forma, a análise da *performance* de uma organização acaba por gerar resultados com maior fiabilidade, tendo em conta que a informação utilizada, atualmente, é mais completa e abrangente.

A metodologia DEA, comparativamente às restantes medidas de avaliação, demonstra ser uma das medidas de avaliação da eficiência das organizações mais adequada, tendo como objetivo principal avaliar a *performance* de um conjunto de unidades produtivas similares, onde são consumidos múltiplos recursos (*inputs*) para gerar múltiplos resultados (*outputs*).

Esta metodologia permite calcular um índice de eficiência para cada uma das unidades produtivas, assim como identificar as unidades que são eficientes e as que são ineficientes. Relativamente a estas últimas, esta metodologia permite, ainda, identificar a unidade ou as unidades eficientes que servem de referência, ajudando os gestores na tomada de decisões e, conseqüentemente, as organizações a optarem por práticas de gestão mais apropriadas.

O presente estudo empírico começou por avaliar a eficiência de vinte instituições bancárias, que operavam em Portugal no ano de 2014, através da aplicação prática do modelo clássico da metodologia DEA, mais concretamente o modelo CCR, que considera retornos constantes de escala. Os resultados alcançados indicam uma quantidade exagerada de instituições bancárias consideradas eficientes, que ocorre devido às limitações dos modelos clássicos, nomeadamente a distribuição irrealista dos pesos intimamente ligada à falta de poder de discriminação entre as unidades eficientes, como foi mencionado ao longo do trabalho.

De forma a minimizar estas limitações várias abordagens têm surgido, uma dessas abordagens consiste na incorporação de juízos de valor. Allen *et al.* (1997) considera três grandes grupos de métodos na incorporação de juízos de valor. Faz parte do primeiro grupo os métodos das restrições diretas sobre os pesos, onde o método das restrições aos pesos absolutos e o método das regiões de segurança são os dois métodos mais conhecidos. Pertence ao segundo grupo de restrições o método de ajuste dos níveis de *input/output* para captação de juízos de valor, onde o método mais representativo deste grupo é o método do *cone ratio*, existindo ainda um caso particular deste método, o método de Golany. Por fim, no terceiro grupo de restrições temos o método das restrições aos *inputs/outputs* virtuais.

Uma outra abordagem consiste na utilização de modelos baseados na PLMO, mais precisamente o modelo multiobjectivo, desenvolvido por Li & Reeves (1999) e o modelo bi-objectivo, proposto recentemente por Ghasemi *et al.* (2014).

Alguns desses métodos/modelos foram aplicados neste estudo da avaliação da *performance* das vinte instituições bancárias, por forma a ter uma ideia mais precisa do seu poder de discriminação. Mais precisamente, foram aplicados o método do *Cone Ratio* e os modelos multiobjectivo *minimax*, *minosoma* e BiO-MCDEA. É possível verificar que o número de instituições bancárias consideradas eficientes é drasticamente reduzido quando são utilizados esses métodos/modelos. De referir, também, que o método do *cone ratio* é superado pelos modelos multiobjectivo e entre estes o modelo *minimax* foi o que apresentou maior poder de discriminação.

Conclui-se, assim, que com a aplicação do método do *cone ratio* e dos modelos multiobjectivo é possível aumentar a capacidade de discriminação do modelo clássico CCR e, deste modo, contornar as duas principais limitações da metodologia DEA.

## Referências Bibliográficas

Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G. & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73(0), 13-34.

Associação Portuguesa de Bancos - *Boletim Estatístico da Associação Portuguesa de Bancos N°50, 2015, Anual*. [Em linha]. [Consult. 11 Jan. 2016]. Disponível em:  
[http://www.apb.pt/content/files/Boletim\\_Estatstico\\_n\\_50\\_ANUAL.pdf](http://www.apb.pt/content/files/Boletim_Estatstico_n_50_ANUAL.pdf)

Bal, H., Örkücü, H. H. & Çelebioglu, S. (2010). Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. *Computer and Operations Research*, 37 (1), 99-107.

Banker, R. D., Charnes, A. & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 1078-1092.

Charnes, A., Cooper, W. W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2 (6), 429 – 444.

Charnes, A., Cooper W. W., Huang, Z. M. & Sun, D. B. (1990). Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of econometrics*, 46 (1-2), 73-91.

Cook, W. D., Kazakov, A., Roll, Y. & Seiford, L. (1991). A Data Envelopment approach to measuring efficiency: Case analysis of highway maintenance patrols. *Journal of Socio-Economics*, 20(1), 83-103.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text With Models, Applications, References and DEA - Solver Software*. *Interfaces*, 31 (3), 116-118. Springer Science.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu, J. (2004). Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations. *In Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 2-39). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis*. 2ª ed. New York: Springer.

- Cooper, W. W. (2005). Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13, 3-11.
- Drucker, P. F. (1995). The information executives truly need. *Harvard Business Review*, 73 (1), 54-62.
- Dyson, R. G. & Thanassoulis, E. (1988). Reducing weight flexibility in DEA. *Journal of the Operations Research Society*, 39(6), 563-576.
- Farrell, M. J. (1957). The Measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical. Seria A (General)*, 120 (3), 253-290.
- Ghasemi, M. R., Ignatius, J. & Emrouznejad, A. (2014). A bi-objective weighted model for improving the discrimination power in MCDEA. *European Journal of Operational Research*, 233 (3), 640-650.
- Ghalayini, A. M. & Noble, J. S. (1996). The changing basis of performance measurement. *Internacional Journal of Operations and Production Management*, 16 (8), 63-80.
- Golany, B. (1988). An Interactive MOLP Procedure for the Extension of DEA to Effectiveness Analysis. *The Journal of the Operational Research Society*, 39 (8), 725-734.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (1992). The Balanced Scorecard: Measures that drive performance. *Harvard Business Review*, 70 (1): 71-79.
- Kennerley, M. & Neely, A. (2002). A framework of the factors affecting the evolution of performance measurement systems. *International Journal of Operations & Production Management*, 22 (11), 1222-1245.
- Kennerley, M. & Neely, A. (2003). Measuring performance in a changing business environment. *International Journal of Operations & Production Management*, 23 (2), 213-229.
- Cláudio, J. M., Cortimiglia, M. N., Gabrielli, L. V. & Kappel, A. M. (2003). *Gerenciamento de processos e indicadores em educação à distância*. Minas Gerais: ENEGEP.
- Li, X. B. & Reeves, G. R. (1999). A Multiple Criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operation Research*, 155 (3), 507-517.

- Meza, L. A., Mello, J. C. B. S. & Clímaco, J. C. N. (2006). *Estudos conjuntos da análise envoltória de dados (DEA) e programação linear multiobjectivo (PLMO): Uma revisão bibliográfica*. 1-15.
- Nabais, C. & Nabais, F. (2011). *Prática Financeira I – Análise Económica & Financeira*. 8ª ed. Lisboa: Lidel.
- Neely, A., Marr, B., Roos, G., Pike, S. & Gupta, O. (2003). Towards the Third Generation of Performance Measurement. *Controlling*, 3/4, 129-135.
- Neves, J. C. (2005). *Análise Financeira: técnicas fundamentais*. 16ª ed. Lisboa: Texto Editora.
- Schmidt, P., Santos, J. L. & Martins, M. A. (2006). *Avaliação de empresas – Foco na Análise de Desempenho para o Usuário Interno*. São Paulo: Editora Atlas.
- Thompson, R. G., Langemeier, L., Lee, C., Lee, E. & Thrall, R. (1990). The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46(1-2), 93-108.
- Thompson, R. G., Singleton, F. D., Thrall, R. M. & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluation for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*, 16 (6), 35-49.
- Toni, A. & Tonchia, S. (2001). Performance measurement systems – Models, characteristics and measures. *International Journal of Operations & Production Management*, 21 (1/2), 46-70.
- Sistema de normalização contabilística*. 4ª ed. Porto: Porto Editora.
- Wong, Y-H. B. & Beasley, J. (1990). Restricting weight flexibility in DEA. *Journal of the Operational Research Society*, 41(9), 829-835.

## Apêndice 1: Matriz de *inputs* e *outputs* do método do *cone ratio*

DMUs (Instituições Bancárias)		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	58,04259	8,900926	4,900805	37,286	2,35796	3,463829
2	Banco BPI	238,2383	41,05395	22,46657	151,8177	2,290708	21,54307
3	Banco Português de Investimento	0,459642	2,837038	1,444769	1,001292	0,067644	0,074227
4	Banco Carregosa	3,485982	0,240674	0,150337	1,349174	0,097138	0,051438
5	Banco Comercial Português	429,9264	70,1118	40,61593	153,8645	2,537982	36,76093
6	Banco ActivoBank	4,61933	1,035878	0,544189	0,899208	0,016002	0,016563
7	Banco de Investimento Global	11,66456	1,639248	0,975624	9,09344	0,001116	0,136158
8	Banco Finantia	14,26346	0,92172	0,68586	14,44742	1,330434	0,148425
9	Banco Invest	7,52086	0,596268	0,387384	4,612604	0,0068	0,114527
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	168,6001	12,91563	9,038866	47,3315	0,605186	7,027157
11	Banif - Banco de Investimento	7,002072	0,286552	0,270776	1,151522	0,02608	0,094921
12	Banif Mais	13,9207	0,001778	0,152389	11,78962	0,038906	0,423214
13	Caixa Económica Montepio Geral	215,6363	27,21829	16,15914	106,5265	1,561976	14,65584
14	Caixa Geral de Depósitos	571,7988	123,5234	70,61169	202,1756	7,29119	55,2006
15	Caixa - Banco de Investimento	10,07256	0,5551	0,399425	9,077874	0,081882	0,469732
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	164,2279	21,24067	12,06904	89,85745	0,000382	7,309835
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	51,12576	5,28867	3,439335	18,16009	0,283192	4,646569
18	Banco Popular Portugal	66,49192	8,229806	4,828903	45,14973	0,395924	5,458783
19	Banco Santander Consumer Portugal	10,01301	0,003	0,10139	7,588244	0	0,820824
20	Banco Santander Totta	170,8042	43,19564	22,58291	179,236	3,67322	25,62433



## Apêndice 2: Resultados obtidos pelo método do *cone ratio* (Pesos)

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos					
		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	0,009331	0,000000	0,093532	0,000000	0,134270	0,125383
2	Banco BPI	0,002679	0,008812	0,000000	0,000000	0,000000	0,032712
3	Banco Português de Investimento	0,999459	0,190553	0,000000	0,998214	0,007337	0,000000
4	Banco Carregosa	0,200286	0,000000	2,007529	0,000000	2,881932	2,691177
5	Banco Comercial Português	0,001514	0,004980	0,000000	0,000000	0,000000	0,018486
6	Banco ActivoBank	0,205884	0,000000	0,089960	0,207533	0,000000	0,000000
7	Banco de Investimento Global	0,083459	0,016159	0,000000	0,083427	0,000000	0,000000
8	Banco Finantia	0,069256	0,013204	0,000000	0,069170	0,000508	0,000000
9	Banco Invest	0,110793	0,000000	0,430428	0,127493	0,000000	0,226067
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,004450	0,019330	0,000000	0,000000	0,055040	0,054360
11	Banif - Banco de Investimento	0,132804	0,244616	0,000000	0,143716	0,000000	0,292330
12	Banif Mais	0,068708	0,000000	0,285685	0,080022	0,000000	0,133660
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,002995	0,013010	0,000000	0,000000	0,037044	0,036586
14	Caixa Geral de Depósitos	0,000902	0,003916	0,000000	0,000000	0,011159	0,011021
15	Caixa - Banco de Investimento	0,086027	0,000000	0,334211	0,098994	0,000000	0,175533
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,004737	0,000000	0,018402	0,005451	0,000000	0,009665
17	Banco Bilbao Vizcaya Argenteria (Portugal)	0,014594	0,048005	0,000000	0,000000	0,000000	0,178201
18	Banco Popular Portugal	0,012247	0,022559	0,000000	0,013254	0,000000	0,026959
19	Banco Santander Consumer Portugal	0,099815	0,183852	0,0000000	0,108016	0,000000	0,219714
20	Banco Santander Totta	0,002979	0,000000	0,021751	0,000000	0,000000	0,039025

### Apêndice 3: Resultados obtidos pelo modelo *minimax* (Pesos)

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos					
		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	0,00071983	-2,699E-08	2,759E-07	8,160E-08	0	2,631E-06
2	Banco BPI	0,00017702	-6,637E-09	6,786E-08	2,007E-08	0	6,469E-07
3	Banco Português de Investimento	0,00449400	4,462E-07	4,284E-06	1,268E-06	1,985E-06	0
4	Banco Carregosa	0,01175600	0	7,091E-06	2,015E-06	0	0,00003031
5	Banco Comercial Português	0,00007974	3,872E-09	7,079E-08	1,966E-08	0	9,451E-08
6	Banco ActivoBank	0,00791840	-2,969E-07	3,036E-06	8,976E-07	0	0,00002894
7	Banco de Investimento Global	0,00311400	1,512E-08	2,765E-06	7,677E-07	0	0,00000369
8	Banco Finantia	0,00295730	1,465E-07	3,318E-06	8,170E-07	0	0,00000000
9	Banco Invest	0,00737300	-2,765E-07	2,826E-06	8,358E-07	0	0,00002694
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,00025251	1,447E-08	2,457E-07	6,672E-08	0	1,926E-07
11	Banif - Banco de Investimento	0,00777220	-3,836E-07	8,571E-06	1,495E-06	0	0
12	Banif Mais	0,00362430	0	2,186E-06	6,211E-07	0	9,345E-06
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,00024830	-9,310E-09	9,518E-08	2,815E-08	0	9,074E-07
14	Caixa Geral de Depósitos	0,00005154	3,556E-09	5,489E-08	1,501E-08	0	1,442E-10
15	Caixa - Banco de Investimento	0,00490180	0	2,957E-06	8,401E-07	0	0,00001264
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,00027248	-1,022E-08	1,045E-07	3,089E-08	0	9,957E-07
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	0,00078543	4,500E-08	7,642E-07	2,075E-07	0	5,990E-07
18	Banco Popular Portugal	0,00075347	-2,825E-08	2,888E-07	8,541E-08	0	2,753E-06
19	Banco Santander Consumer Portugal	0,00480390	0	2,897E-06	8,233E-07	0	0,0000124
20	Banco Santander Totta	0,00021214	-7,954E-09	8,132E-08	2,405E-08	0	7,752E-07

## Apêndice 4: Resultados obtidos pelo modelo *minisoma* (Pesos)

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos					
		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	0,00073394	-2,662E-08	2,028E-07	6,452E-08	-5,136E-08	3,774E-06
2	Banco BPI	0,00018065	-6,553E-09	4,991E-08	1,588E-08	-1,264E-08	9,289E-07
3	Banco Português de Investimento	0,00449400	4,462E-07	4,284E-06	1,268E-06	1,985E-06	0
4	Banco Carregosa	0,01224600	0,000E+00	5,302E-06	1,638E-06	4,859E-07	0,000050843
5	Banco Comercial Português	0,00013698	-4,969E-09	3,784E-08	1,204E-08	-9,586E-09	7,044E-07
6	Banco ActivoBank	0,00799690	-2,901E-03	2,209E-06	7,030E-07	-5,596E-07	0,000041123
7	Banco de Investimento Global	0,00531910	-1,929E-07	1,470E-06	4,676E-07	-3,722E-07	0,000027352
8	Banco Finantia	0,00426260	-1,922E-07	3,080E-06	8,028E-07	0	-4,593E-07
9	Banco Invest	0,00771460	-2,798E-07	2,131E-06	6,781E-07	-5,399E-07	0,000039671
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,00039102	-1,451E-08	2,002E-07	5,738E-08	7,604E-08	5,443E-07
11	Banif - Banco de Investimento	0,01039900	-4,667E-07	7,413E-06	1,9362E- 06	0	0
12	Banif Mais	0,00386500	0	1,674E-06	5,170E-07	1,533E-07	0,000016047
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,00025893	-9,392E-09	7,154E-08	2,276E-08	-1,812E-08	1,332E-06
14	Caixa Geral de Depósitos	0,00004851	4,816E-09	4,624E-08	1,369E-08	2,143E-08	0
15	Caixa - Banco de Investimento	0,00525820	0,000E+00	2,277E-06	7,034E-07	2,086E-06	0,000021831
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,00027936	-1,013E-08	7,718E-08	2,456E-08	-1,955E-08	1,437E-06
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	0,00128330	-4,762E-08	6,571E-07	1,883E-07	2,496E-07	1,786E-06
18	Banco Popular Portugal	0,00078049	-2,831E-08	2,156E-07	6,861E-08	-5,462E-08	4,0135E-06
19	Banco Santander Consumer Portugal	0,00508040	0	2,200E-06	6,796E-07	2,016E-07	0,000021093
20	Banco Santander Totta	0,00021413	-7,767E-09	5,916E-08	1,882E-08	-1,499E-08	1,101E-06

## Apêndice 5: Resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA (Pesos)

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos					
		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Funcionários	Recursos de clientes e outros empréstimos	Capital	Crédito a clientes	Aplicações em instituições de crédito	Margem financeira
1	Banco BIC Português	0,000734	-2,662E-08	2,028E-07	6,452E-08	-5,136E-08	3,774E-06
2	Banco BPI	0,000181	-6,553E-09	4,991E-08	1,588E-08	-1,264E-08	9,289E-07
3	Banco Português de Investimento	0,004494	4,462E-07	4,284E-06	1,268E-06	1,985E-06	0
4	Banco Carregosa	0,012246	0	5,302E-06	1,638E-06	4,859E-07	5,084E-05
5	Banco Comercial Português	0,000137	-4,969E-09	3,784E-08	1,204E-08	-9,586E-09	7,044E-08
6	Banco ActivoBank	0,007997	-2,901E-07	2,209E-06	7,030E-07	-5,596E-07	4,112E-05
7	Banco de Investimento Global	0,005319	-1,929E-07	1,470E-06	4,676E-07	-3,722E-07	2,735E-05
8	Banco Finantia	0,004287	-1,924E-07	3,056E-06	7,983E-07	0	0
9	Banco Invest	0,007715	-2,798E-07	2,131E-06	6,781E-07	-5,399E-07	3,967E-05
10	Banif - Banco Internacional do Funchal	0,000353	-2,223E-08	2,717E-07	6,115E-08	-3,536E-07	1,295E-06
11	Banif - Banco de Investimento	0,010399	-4,667E-07	7,413E-06	1,936E-06	0	0
12	Banif Mais	0,003865	0	1,674E-06	5,170E-07	1,533E-07	1,605E-05
13	Caixa Económica Montepio Geral	0,000259	-9,392E-09	7,154E-08	2,276E-08	-1,812E-08	1,332E-06
14	Caixa Geral de Depósitos	4,85E-05	4,816E-09	4,624E-08	1,369E-08	2,143E-09	0
15	Caixa - Banco de Investimento	0,005974	-2,167E-07	1,651E-06	5,252E-07	-4,181E-08	3,072E-05
16	SICAM - Sistema Integrado de Crédito Agrícola Mútuo	0,000279	-1,013E-08	7,718E-08	2,456E-08	-1,955E-08	1,437E-06
17	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal)	0,001408	-5,281E-08	5,399E-07	1,597E-07	0	5,147E-06
18	Banco Popular Portugal	0,00078	-2,831E-08	2,156E-07	6,861E-08	-5,462E-08	4,014E-06
19	Banco Santander Consumer Portugal	0,00508	0	2,200E-06	6,796E-07	2,016E-07	2,109E-05
20	Banco Santander Totta	0,000214	-7,767E-09	5,916E-08	1,882E-08	-1,499E-08	1,101E-06