

Estimación del índice de aversión al riesgo mediante un diseño experimental utilizando la función CRRA^{*}

Julio Aníbal Baena A^{**}

Julián Pareja^{***}

Departamento de Economía
Escuela de Economía y Finanzas
Universidad EAFIT

13 de octubre de 2016

Resumen

Las decisiones de los individuos en condiciones de incertidumbre y riesgo pueden ser medidas utilizando la teoría de la Utilidad Esperada, elemento fundamental que permite encontrar de manera experimental el coeficiente de aversión al riesgo utilizando la función de Aversión Relativa al Riesgo Constante (CRRA). Para la estimación, se propone la metodología de Random Lottery Pairs (RLP), en la cual un sujeto se enfrenta a la elección entre un par de loterías debiendo escoger la de su preferencia. Esta metodología se aplicó a pequeña escala con fines comparativos a estudios previamente realizados, puesto que se ha evidenciado su efectividad para medir la aversión al riesgo y su practicidad para los participantes del experimento; el cual fue aplicado a dos grupos de estudiantes de especialización y pregrado en Finanzas de la Universidad EAFIT, de las sedes Bogotá y Medellín. Lo anterior, permitió estimar el coeficiente de aversión al riesgo mediante la calibración de la función CRRA y modelar las preferencias de los individuos, donde los resultados encontrados indican lo evidenciado en la literatura, los individuos, en este caso, representado por los dos grupos de estudiantes son aversos al riesgo.

Palabras claves: Riesgo, Lotería, Función de utilidad, Utilidad esperada, Índice de aversión al riesgo.

Clasificación JEL: B21, C01, C13, D80, D81

^{*} Propuesta de trabajo de grado para optar por el título de MSc. en Economía. Asesor: Julián Pareja Vasseur.

^{**} Lic. Matemáticas y Física, Universidad de Antioquia. Correo electrónico: jbaenaa@eafit.edu.co

^{***} Maestría Scs en Finanzas, Profesor del departamento de finanzas, adscrito a la Escuela de Economía y Finanzas, EAFIT. Correo electrónico: jparejav@eafit.edu.co

Abstract

The individual's decisions in conditions of uncertainty and risk can be measured using the Expected Utility theory, a fundamental element to find experimentally the coefficient of risk aversion by using the Constant Absolute Risk Aversion utility (CRRA). For this purpose, the methodology of Random Lottery Pairs (RLP), in which a subject is facing the choice between a pair of lotteries to choose your preference. This methodology was applied to small-scale and allow to be used for comparative purposes to previous studies as it has shown its effectiveness to measure risk aversion and its practicality for participants in the experiment. This method was applied to two groups of students of graduate and undergraduate Finance program at EAFIT University of Bogota and Medellin headquarters. The coefficient of risk aversion was estimated by calibrating the CRRA function, which allows to model the individual's preferences, where the results indicate evidenced in the literature, individuals, in this case represented by the two groups students are risk averse.

Keywords: Risk, Lottery, Utility functions, Expected utility, Risk averse.

JEL Classification:B21, C01, C13, D80, D81 .

1. Introducción

En economía, al momento de construir la teoría del consumidor es posible encontrar variados supuestos. Uno de ellos considera al individuo como un ser que desea mediante su conducta elegir entre diferentes cestas de consumo,¹ las cuales le permiten obtener el mayor bienestar y por lo tanto maximizar su utilidad. Matemáticamente es posible representar estos deseos mediante una función que depende de la combinación de cestas de consumo:

$$\text{Max}U \longrightarrow f(X_1, X_2, X_3 \dots X_n) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Donde:

U Representa la Utilidad,

$X_1, X_2, X_3 \dots X_n$: Corresponde a diferentes cestas de consumo.

Con referencia a lo anterior, Cohn, Lewellen, Lease y Schlarbaum (1975) desarrollaron los axiomas de preferencia de la racionalidad, que corresponden a una primera aproximación para entender el comportamiento racional del individuo; su idea básica parte de comparar dos cestas de consumo X y Y cuyas respectivas combinaciones proporcionan el mismo nivel de bienestar y son las que terminan dando origen a las curvas de indiferencia.

En efecto, una manera de cuantificar el bienestar, medido a través de las curvas de indiferencia, es la construcción matemática conocida como Función de Utilidad, la cual se define como una abstracción numérica que permite medir la satisfacción que obtiene un agente económico a través del consumo de determinada cantidad de bienes. [Alchian \(1953\)](#) explicó la relevancia de medir dichas funciones como resultado de las preferencias del individuo; por lo que es plausible argumentar que cada individuo posee una Función de Utilidad que mide su bienestar, la cual está representada por la canasta de bienes y servicios que su capacidad de compra le permite adquirir.

¹Las cestas de consumo son las diferentes combinaciones de bienes y servicios que el agente elige para su beneficio

De este modo, cuando se habla de la Función de Utilidad se refiere al instrumento para asignar un número a todas las cestas de consumo posibles, de tal forma que las que se prefieren tengan un valor más alto que aquellas que se prefieren poco o que no se seleccionan (Varian, 2011). Al asignar un valor a todas las curvas de indiferencia es posible cuantificar y medir los gustos y preferencias del consumidor o inversionista, así como encontrar las reglas de asignación matemática que permitan hallar una función que represente las características propias de dichos agentes .

De acuerdo con los razonamientos previos de gustos y preferencias, en muchas de las decisiones que deben tomar los individuos donde se desconoce el futuro, la incertidumbre juega un papel importante, ya que se convierte en una variable influyente en su elección. Un ejemplo de lo anterior corresponde a lo que ocurre en las inversiones, donde el agente desconoce el retorno futuro, de forma que su escogencia depende exclusivamente del riesgo que se desea asumir. En estudios realizados por Cipu y Gheorghe (2015), Kallberg y Ziemba (1983), Yu, Pang, Troutt, y Hou (2009) , se ha demostrado que el uso de funciones de utilidad sirve para describir y modelar las preferencias de los agentes y de esta forma encontrar su portafolio óptimo. Es evidente entonces, en el contexto de incertidumbre, poder describir cuantitativamente aquellas decisiones que de acuerdo a las preferencias representen de la mejor manera la elección que se hace frente al riesgo.

Ahora bien, en un entorno de certidumbre la toma de decisiones se convierte en una tarea sencilla, operativa y que no requiere de mucho análisis; pero cuando aparece la incertidumbre se hace necesario utilizar metodologías más robustas que las que se plantean de forma tradicional. Bajo esta condición es posible encontrar en la literatura una metodología comúnmente utilizada para cuantificar y modelar el riesgo, conocida como Expected Utility(EU) que se representa de la siguiente forma:

$$U(X) = \mathbb{E}(u(X)) \quad (2)$$

Donde:

$U(X)$ Representa la Función de Utilidad,

$E(u(x))$ Representa la Utilidad Esperada.

X es una variable aleatoria

Con $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Esta función se ha descrito como la Función de Utilidad de Von Neumann-Morgestern (Carpinski, Kopp y Ski, 2014) . Su importancia radica en permitir que exista la posibilidad de que entre varias alternativas se pueda asignar un determinado valor que corresponde a la probabilidad de ocurrencia de la opción y luego jerarquizarlas de acuerdo con su utilidad, de mayor a menor. Dentro de esta teoría existen algunas funciones de utilidad que representan y modelan el comportamiento de los agentes, según sean sus preferencias por el riesgo. Las más comunes son:

1. Exponencial negativa: $U(x) = -e^{-Ax}$
2. Cuadrática: $U(x) = x - \frac{1}{2}bx^2$
3. Logarítmica: $U(x) = \ln x$
4. Power: $U(x) = Ax^A$
5. CRRA (función de aversión relativa al riesgo constante): $U(x) = \frac{(x^{1-A}) - 1}{1 - A}$
6. La HARA (Hyperbolic Absolute-Risk-Aversion): $U(x) = \frac{1 - A}{A} \left(\frac{\beta x}{A - 1} + \lambda \right)^A$

Beedles (1978) propuso, adicionalmente, otras tres funciones:

1. Exponencial negativa con exponente recíproco: $U = -e^{1/x}$
2. Logarítmica aditiva: $U(x) = \ln(x + A)$
3. Cúbica $U(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Todas estas funciones de utilidad fueron aplicadas en varias investigaciones como las realizadas por [Harrison \(1986\)](#), [Viscusi y Evans \(1990\)](#), [Norstad \(1999\)](#), [Harrison \(1986\)](#), [Kahneman y Tversky \(1979\)](#) , [Viscusi \(1993\)](#), quienes no solamente buscaron la Función de Utilidad que mejor representara el comportamiento de los agentes, sino también midieron el riesgo implícito en la toma de decisiones, empleando la EU. En igual forma, estas funciones fueron y son utilizadas en el campo de la macroeconomía, en la teoría del crecimiento y en el mercado de capitales, donde modelan el comportamiento de los agentes en sus decisiones, teniendo como objetivo el nivel de consumo de un país y permiten comparar la tasa de crecimiento respecto a otros países ([Rebelo, 1990](#); [Christensen, Jorgenson y Lau, 1975](#) y [Xie, 2002](#)) .

Ahora bien, de acuerdo con los razonamientos que se han venido presentando este artículo en la Sección 1 desarrolla los conceptos básicos de riesgo, funciones de utilidad, los axiomas acerca de la racionalidad de los agentes y la teoría de la Utilidad Esperada, luego en la Sección 2 describe el diseño del experimento realizado y la metodología utilizada para estimar el índice de aversión en la función tipo CRRA y, por último, en la Sección 3, presenta el análisis de los resultados obtenidos y en la Sección 4 las conclusiones.

2. Conceptos básicos de riesgo y funciones de utilidad

Cuando se toman decisiones en condiciones de incertidumbre aparece una nueva variable que es el riesgo, de forma que las preferencias del consumidor ya no son canastas o cestas de consumo sino preferencias por riesgo, donde se puede ganar o perder, como ocurre en una lotería, y en donde resulta relevante encontrar la función que represente las respectivas elecciones.

2.1. Incertidumbre y Riesgo

En muchas ocasiones se habla de incertidumbre y riesgo indistintivamente; sin embargo, son conceptos diferentes y de ahí la importancia de tener clara su definición. La incertidumbre se refiere a hechos que no son posibles de cuantificar o medir, es decir, las probabilidades de ocurrencia son desconocidas y no existe información suficiente. El riesgo, por su parte, corresponde a aquellos hechos que mediante variables aleatorias se pueden medir o conocer su probabilidad. En general, en situaciones de incertidumbre importan las decisiones donde los individuos pueden conocer su probabilidad de ocurrencia [Nicholson \(2005\)](#). [Knight \(2012\)](#) argumenta que la incertidumbre y el riesgo son situaciones aleatorias, pero se diferencian fundamentalmente en el desconocimiento de las probabilidades que no son posibles de estimar en condiciones de incertidumbre ([Tarapuez, Zapata y Agreda \(2008\)](#)). La tabla 1 muestra algunas equivalencias entre estos dos conceptos.

Tabla 1. Equivalencias entre el riesgo e incertidumbre.

Riesgo.	Incertidumbre.
Es observable	No observable
Existe información para estimarlo	La data disponible no es precisa
Estimación objetiva	Estimación subjetiva
Incertidumbre de primer grado	Incertidumbre de segundo grado
Puede ser estimada estadísticamente	Es difícil, requiere tiempo y esfuerzo propio

Fuente: adaptado de [Haahtela \(2007, p. 5\)](#).

Bajo las anteriores condiciones se hace imperativo poder estimar objetivamente las decisiones de los individuos; para esto se utilizan múltiples metodologías, una de ellas es el VaR (Value at Risk) que emplea los conceptos de valor esperado y variabilidad para medir el riesgo en el mercado

de capitales con mayor relevancia en la optimización de portafolios. Otra metodología, aplicada en decisiones de inversión, es la desarrollada ampliamente por Dixit y Pindyck (1994), quienes basados en la teoría de juegos crearon el método de opciones reales. Sin embargo, en la toma de decisiones para medir el riesgo, desde la conducta de los consumidores, es de gran importancia mirar no sólo la evaluación de los resultados inmersos en el riesgo, sino la utilidad que genera dichas elecciones (Rubinfeld y Pindyck, 2013). Hecha la observación anterior, la Utilidad Esperada se convierte en el concepto fundamental, porque no sólo permite revelar las preferencias de los agentes, sino asignar un número, es decir, una Función de Utilidad que la representa. Esta función se define a partir de una función de probabilidad:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (3)$$

Donde:

$E(X)$ es el valor esperado,

p_i son las probabilidades de pago,

x_i representa los pagos.

Uno de los primeros en conceptualizar sobre la Utilidad Esperada fue Bernoulli, quien en 1713 planteó la paradoja de San Petersburgo, en la cual propone el pago de una apuesta, donde un jugador paga al otro 2^n cantidad de dinero si al lanzar una moneda al aire sale cara por primera vez. Un juego donde hay infinitos resultados posibles y la ganancia esperada es infinita. Los pagos serán $x_i = 2, 4, 8, \dots, 2^n$ con probabilidades $p_i = \frac{1}{2^i}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, utilizando (3) se tiene: $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \dots + \frac{1}{2^n}2^n = \frac{1}{2}(1 + 1 + \dots + \dots) = \infty$.

Hacia 1730 Bernoulli publicó la obra *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk* donde demostró que al individuo más que el valor en dinero es la utilidad la que lo representa (Bernoulli, 1954). Mas tarde, Von Neuman y Morgensten, en 1947, desarrollaron la teoría de la

Utilidad Esperada (EUT), teniendo como base los axiomas de la racionalidad de los agentes para explicar el comportamiento en situaciones de riesgo e incertidumbre, definiendo el riesgo como una *lotería*,² precisando que corresponde a un activo que posee un riesgo de pago, de la cual el individuo escoge la opción óptima de un conjunto de loterías (Von Neumann y Morgenstern, 2007).

Bajo la teoría de Neumann-Morgestern se plantearon cuatro axiomas para describir las preferencias de los individuos en sus elecciones bajo incertidumbre:

1. Completitud: Para dos loterías X y Y se cumple que: $X \succ Y$, $X \prec Y$ ó $X \sim Y$ ³. Es decir, el individuo puede comparar entre dos loterías y escoger cualquiera.
2. Transitividad: Dadas tres loterías X , Y , Z . Si $X \preceq Y$ y $Y \preceq Z$ entonces $X \preceq Z$. El individuo puede ordenar sus preferencias.
3. La continuidad de las preferencias afirma que si $X \preceq Y \preceq Z$, existe una probabilidad $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\alpha X + (1 - \alpha)Z \sim Y$. Este axioma asegura la existencia de una Función de Utilidad que representa las preferencias.
4. La independencia: Si $X \preceq Y$ entonces $\alpha X + (1 - \alpha)Y \succeq \alpha Y + (1 - \alpha)Y$ para algún Y con probabilidad α . Si se tienen dos loterías similares en sus probabilidades el individuo, según sus preferencias, escogerá aquella donde sean diferentes.

Luce y Raiffa (2012) basados en Neumann-Morgestern, ampliaron los cuatro axiomas a seis, con el objetivo de representar de una mejor manera las preferencias y el comportamiento racional de un individuo en condiciones de riesgo.

1. Axioma de preferencia puro o de ordenación de resultados: según sus preferencias, ordena de la mejor recompensa a la menor.
2. Axioma de reducción: al decisor le es indiferente entre una lotería compuesta⁴ y una simple, es decir, puede reducir de una lotería compuesta a una simple equivalente.

²Una *lotería* es una forma de modelar decisiones de riesgo

³El símbolo \succ representa preferencia y \sim indiferencia

⁴Una lotería compuesta es aquella cuyo resultado es otra lotería.

3. Axioma de continuidad: el individuo puede determinar entre tres loterías la probabilidad de la mejor y peor, utilizando el axioma uno en el ordenamiento de las preferencias.
4. Axioma de sustitución: a partir de los axiomas anteriores el individuo es indiferente y puede escoger otra lotería equivalente teniendo en cuenta las loterías con el premio mejor o peor.
5. Axioma de ordenación de loterías: el individuo, según sus preferencias o indiferencias sobre las alternativas de escogencia, establecerá un preorden completo de dichas loterías.
6. Axioma de monotonía: si se tiene un conjunto de loterías, sólo con dos premios, el decisor escogerá la que represente el mejor premio, según su probabilidad.

Estos axiomas permiten, en particular el de continuidad, encontrar la Función de Utilidad que representa el comportamiento del individuo según sean sus preferencias, donde elige y organiza la mejor y peor opción en sus elecciones teniendo en cuenta su probabilidad, asignando un número que representa la maximización de la Utilidad Esperada.

2.2. Función de utilidad

Tal como se ha mencionado la Función de Utilidad representa aquellas cestas de consumo preferidas, es decir, si $X \leq Y$ es la relación de preferencia, entonces $U(X) \leq U(Y)$ (Varian, 2011); matemáticamente se puede representar como una función de variable real $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se asume que U cumple tres propiedades: U es diferenciable, estrictamente creciente y cóncava.

Utilizando el *teorema fundamental de Von Neumann y Morgenstern* (Von Neumann y Morgenstern, 2007) se puede establecer una función entre las decisiones y la asignación de un número real ($U : L \rightarrow \mathbb{R}$), donde L representa las decisiones en las loterías. Si se cumplen los cuatro axiomas de Von Neumann y Morgenstern, existe una función de utilidad tal que si $X \in L$ entonces $u(X) \in \mathbb{R}$ y al comparar dos loterías,

$$X \leq Y \Leftrightarrow E(U(X)) \leq E(U(Y)) \quad (4)$$

Donde $E(U(x))$ es la ecuación dada en (3).

Se debe tener en cuenta que los riesgos existentes en cada una de las loterías permiten establecer un orden entre ellas y así escoger —según Von Neumann y Morgenstern— la mejor opción, sin desconocer que la aversión al riesgo es diferente para cada individuo. Es fundamental tener presente que las funciones de utilidad evidencien la aversión relativa constante y absoluta decreciente, en otras palabras, se deberá escoger la mejor opción entre el conjunto de alternativas que impliquen riesgo según sus preferencias por el mismo (Maya y Pareja, 2014).

Ahora bien, las actitudes frente al riesgo se definen matemáticamente mediante las derivadas parciales de la Función de Utilidad, la cual tiene rendimientos marginales decrecientes y es cóncava. Dada una Función de Utilidad $U(x)$ si $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$ se considera un agente averso al riesgo, si por el contrario $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ es neutral al riesgo y si es amante al riesgo debería cumplir que $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$.

Lo anterior indica que la Función de Utilidad de un individuo depende de sus preferencias por el riesgo para medir el grado de aversión. Pratt (1964) planteó dos tipos de medida que son:

La *aversión absoluta al riesgo* que mide el cambio cuando la utilidad marginal decrece al aumentar la riqueza en una unidad.

$$A_A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} \quad (5)$$

Donde:

A_A : representa el índice de aversión al riesgo absoluto

$u'(x)$: la primera derivada de la Función de Utilidad

$u''(x)$: la segunda derivada de la Función de Utilidad

La *aversión relativa al riesgo* mide como la utilidad marginal decrece cuando la riqueza aumenta en un 1%

$$A_R = \frac{-xu''(x)}{u'(x)} \quad (6)$$

Donde:

A_R : Representa la aversión al riesgo relativa. ⁵

Siguiendo lo propuesto por Pratt existen unas funciones de utilidad que miden la aversión relativa y absoluta al riesgo, para ello se calculan las dos primeras derivadas, que son:

- Exponencial negativa: $U(x) = -e^{-Ax}$

Donde:

A : Representa el índice de aversión al riesgo.

Al encontrar las dos primeras derivadas se obtiene:

$$U'(x) = Ae^{-Ax} > 0 \quad (7)$$

y

$$U''(x) = -A^2e^{-Ax} < 0 \quad (8)$$

Al calcular el riesgo absoluto y relativo de (7) y (8) se obtiene:

$$A_A = \frac{A^2e^{-Ax}}{Ae^{-Ax}} = A \quad (9)$$

⁵Meyer y Meyer, (2005) desarrolla ampliamente la relación entre estos dos conceptos: riesgo absoluto y relativo.

y

$$A_R = \frac{A^2 e^{-Ax}}{A e^{-Ax}} = Ax. \quad (10)$$

en el cual la aversión al riesgo absoluto es constante y la aversión al riesgo relativo es creciente.

- Cuadrática: $U(x) = x - \frac{1}{2}bx^2$.

Sus dos primeras derivadas son:

$$U'(x) = 1 - bx > 0 \quad (11)$$

y

$$U''(x) = -b \quad (12)$$

Calculando las funciones de riesgo absoluto y relativo de (11) y (12)

$$A_A = \frac{b}{1 - bx} \quad (13)$$

y

$$A_R = \frac{bx}{1 - bx} \quad (14)$$

se deduce entonces de esta función que la aversión absoluta es decreciente.

- HARA (Hyperbolic Absolute-Risk-Aversion): $U(x) = \frac{1-A}{A} \left(\frac{\beta x}{A-1} + \lambda \right)^A$, por ejemplo si $A = 2$ se convertiría en la cuadrática.

Dadas las características de crecimiento y concavidad de las funciones, y teniendo en cuenta que la aversión absoluta al riesgo decrece con el bienestar por la existencia de la aversión en las decisiones, puesto que existe evidencia que los individuos no son neutrales al riesgo y mas aún que puedan presentar continuamente propensión al mismo, pues a largo plazo esto lleva a la quiebra financiera (Ochoa y Pareja, 2014), es importante escoger la función que más se acerca

al comportamiento de los agentes respecto a su aversión al riesgo, siendo la CRRA la función que cumple dichas condiciones. En suma, no se utilizará la función cuadrática ni la exponencial porque generan aversión al riesgo absoluto creciente y constante respectivamente, ni la exponencial negativa, dado que presenta aversión al riesgo absoluto constante y aversión al riesgo relativo creciente (Pratt, 1964).

2.2.1. FUNCIÓN CRRA: (*Función de aversión relativa al riesgo constante*)

$$U(x) = \frac{x^{1-A}}{1-A}$$

De manera similar a las funciones de utilidad anteriormente expuestas, las dos primeras derivadas son:

$$U'(x) = x^{-A} \quad (15)$$

y

$$U''(x) = (-A)x^{-A-1} \quad (16)$$

de (15) y (16) se tiene:

$$A_A = \frac{A}{x}y \quad (17)$$

$$A_R = A \quad (18)$$

Esta función está definida para $A \geq 0$ porque para los demás valores la función no es cóncava lo que implica individuos amantes por el riesgo. Si el parámetro A es igual a cero, implica que la función CRRA se convierte en lineal lo que significa individuos neutrales al riesgo. Cuando $A = 1$ se convierte en la función logaritmo.⁶ Es por ello que la versatilidad de la función CRRA permite modelar mejor el comportamiento de los individuos ya que cumple características importantes,

⁶Para este caso se debe aplicar L'Hôpital

como son la aversión absoluta al riesgo decreciente y CRRA, asimismo posibilita diferenciar las preferencias de los agentes a partir de distintos niveles de concavidad, además, existe literatura que muestra a dicha función como deseada para ajustar datos de utilidad (Pareja y Cadavid, 2016). Como muestra de lo anteriormente expuesto es posible encontrar en la literatura diferentes investigaciones que han utilizado esta función para medir el índice de aversión al riesgo (Eckel y Grossman, 2008; Campo, Guerre, Perrigne y Vuong, 2011 y Harrison, Lau y Rutström, 2007) Holt, Laury et al. (2002), por ejemplo, encontraron en su investigación que los agentes aversos al riesgo se ubican en el intervalo entre 0.41 y 0.61; Harrison, Lau, Rutström y Sullivan (2005), por su parte, obtuvieron que para una población adulta de Dinamarca el coeficiente de aversión al riesgo fue de 0.67.

3. Metodología

En esta sección se encuentra en primer lugar el concepto de lotería, seguidamente, se explica el diseño del experimento realizado y al final se reseñan las investigaciones que sirvieron de base para el desarrollo de este estudio y justifican la metodología utilizada como elemento comparativo para los resultados encontrados.

3.1. Loterías

Para modelar las elecciones en condiciones de incertidumbre se utiliza el concepto de lotería, definida como:

$$L = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \quad (19)$$

Donde:

L : representa el espacio de la lotería,

p_i : las probabilidades de pago

con: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \geq 0$.

Este concepto es utilizado en (3), donde se definió el valor esperado como una función de probabilidad. Cabe agregar que cuando los resultados de las elecciones involucran premios monetarios se pueden representar mediante una *función de distribución acumulada* $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, que tiene asociada una función de densidad

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \forall x \quad (20)$$

Donde:

$F(x)$: representa la función de distribución acumulada

$f(x)$: corresponde a la función de densidad

Según Von Neumann-Morgenstern, la función de utilidad esperada está dada por:

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x) \quad (21)$$

Donde:

$F(x)$: Representa la probabilidad de pagos.

Son muchas las investigaciones, no sólo en el campo económico, que utilizan el juego de loterías como estrategia para medir el comportamiento de un individuo frente a decisiones en situaciones de incertidumbre y riesgo. LaPlante, Gray, Bosworth y Shaffer (2010) publicaron una amplia bibliografía de trabajos realizados en diferentes ciencias. En igual forma, existe una extensa gama de estudios que miden experimentalmente el grado de aversión al riesgo y la Función de Utilidad que lo representa; Holt et al. (2002) por ejemplo, usó el método *multiple price list design* (MPL) para medir el grado de aversión al riesgo, utilizando un híbrido de la Función de Utilidad “expo-power” mediante incentivos reales e hipotéticos, encontrando que el comportamiento es más errático en los casos hipotéticos en comparación con los reales. Hey and Orme (1994) recurrieron a un juego binario de lotería utilizando *Random Lottery Pairs* (RLP); en su investigación emplearon varias sesiones, cada una de veinticinco preguntas, para indagar sobre las generalidades de las preferencias en algunas funciones de utilidad.

3.2. Diseño del Experimento

La importancia de este experimento radica en poder encontrar evidencia empírica del índice de aversión al riesgo en la función CRRA, elemento clave para investigaciones de toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, donde las personas valoran de forma diferente las pérdidas y ganancias en contra de la predicción de la teoría estándar (Brandts, 2009).

En el diseño, de acuerdo a la economía experimental, es necesario cumplir con aspectos

importantes, Juberías y Cotanda (2004) destacan, basados en Smith (1994), como significativos: el entorno, los recursos iniciales, las preferencias, los costes, las instituciones, el método y las normas como ejes articuladores que mueven el experimento. Atendiendo a lo anterior, en esta investigación en específico, para que el diseño tenga validez y soporte se hizo necesario que existiera una recompensa para inducir en los sujetos, una serie de características importantes, teniendo como objetivo que las particularidades inherentes de los sujetos no fueran relevantes. Smith (1982) propuso las siguientes propiedades para inducir dichas características:

1. Monotonicidad: al definirse la función de preferencias no observables $P(r, \gamma)$, donde r representa la recompensa monetaria y γ todo lo demás. Entonces la condición de monotonidad exige que $\frac{\partial P}{\partial r}$ exista y sea positiva para cualquier combinación (r, γ) .
2. Prominencia: las normas institucionales garantizan el conocimiento que deben tener los sujetos, en la relación entre sus decisiones y las de los demás.
3. Dominancia: los cambios dados en la utilidad de los sujetos consecuencia del experimento son causados por la recompensa.

En general, las anteriores condiciones buscan que el sujeto prefiera más recompensa a menos y que no se preocupe por la recompensa que pueden obtener los demás. Representando lo anterior, de una forma mas estructural, con una Función de Utilidad dada y unas preferencias inducidas se tiene que:

$$P(x, y) = P(r + U(x, y), \gamma + \Delta\gamma) \quad (22)$$

Donde:

$P(x, y)$ son las preferencias inducidas

r es la recompensa monetaria

γ recursos iniciales inobservables del sujeto

$\Delta\gamma$ representa la recompensa no monetaria que el sujeto obtiene del experimento

Ante la situación planteada se tuvieron en cuenta las características dadas por Juberías y Cotanda (2004) quienes retomaron a Hey(1996); dichas características fueron:

1. Los sujetos del experimento deben ser pagados en efectivo, dichos pagos deben ser consecuentes a las decisiones tomadas en el experimento.
2. Estudiantes universitarios son ideales ya que cumplen las características inducidas mencionadas anteriormente(*dominancia y prominencia*).
3. El entorno económico debe ser lo mas sencillo posible brindado por la institución, la cual se refleja en que las instrucciones del experimento deben ser claras y sencillas.
4. Evitar palabras cargadas de sentido, para no caer en el dilema del prisionero.
5. Si hay dificultades con la dominancia, se debe realizar otras sesiones con aumento en las recompensas.
6. La privacidad de los sujetos y de los objetivos reales de la investigación deben estar en secreto respecto a los otros participantes.
7. No se debe engañar, ni mentirle a los sujetos del experimento.

La estructura del experimento que se realizo contó con tres partes fundamentales: la construcción de la lotería, la encuesta demográfica y el experimento en sí. Las loterías seleccionadas fueron dos loterías simples, tomadas de los estudios de Camerer y Colin (1989,1992), la tabla 2 muestra las probabilidades utilizadas en las veinticinco preguntas que se estimaron, donde PD corresponde a las probabilidades de la lotería de la derecha y PI a las de la izquierda.

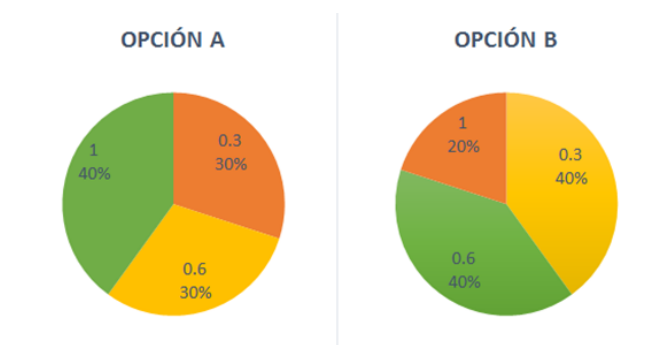
Tabla 2: Probabilidades asignadas a cada pregunta del experimento

Pregunta	PD.1	PD.2	PD.3	PD.4	PI.1	PI.2	PI.3	PI.4
1	0	1	0	0	0.01	0.89	0.1	0
2	0.9	0.1	0	0	0.9	0	0.1	0
3	0	0	0.2	0.8	0	0.1	0	0.9
4	0	0.4	0.6	0	0	0.6	0.2	0.2
5	0	0.5	0.4	0.1	0	0.7	0	0.3
6	0	0.8	0.2	0	0	0.9	0	0.1
7	0	0.2	0.2	0.6	0	0.3	0	0.7
8	0	0.6	0.2	0.2	0	0.7	0	0.3
9	0	0.65	0.25	0.1	0	0.75	0.05	0.2
10	0	0.55	0.3	0.15	0	0.65	0.1	0.25
11	0	0.35	0.4	0.25	0	0.45	0.2	0.35
12	0	0.05	0.55	0.4	0	0.15	0.35	0.5
13	0	0.05	0.5	0.45	0	0.15	0.3	0.55
14	0	0	0.6	0.4	0	0.1	0.4	0.5
15	0	0.15	0.3	0.55	0	0.25	0.1	0.65
16	0	0.05	0.9	0.05	0	0.15	0.7	0.15
17	0	0.25	0.5	0.25	0	0.45	0.1	0.45
18	0	0.45	0.5	0.05	0	0.55	0.3	0.15
19	0	0	0.6	0.4	0	0.2	0.2	0.6
20	0	0.1	0.4	0.5	0	0.3	0	0.7
21	0	0	1	0	0	0.1	0.8	0.1
22	0	0	1	0	0	0.2	0.6	0.2
23	0	0.3	0.4	0.3	0	0.5	0	0.5
24	0	0.4	0.2	0.4	0	0.5	0	0.5
25	0	0.4	0.6	0	0	0.5	0.4	0.1

Fuente: elaborada por el autor con base en [Camerer \(1989\)](#), [Camerer \(1992\)](#)

La lotería de la izquierda toma los valores y_1, y_2, y_3, y_4 con probabilidades respectivas PI.1, PI.2, PI.3 y PI.4; la lotería de la derecha toma los y_1, y_2, y_3, y_4 y con probabilidades respectivas PD.1, PD.2, PD.3 y PD.4, el vector y toma los valores $(0, 0.3, 0.6 \text{ y } 1)$. Por su parte, la encuesta demográfica contenía los siguientes datos: género, edad, estudios universitarios del participante, grado de escolaridad de los padres, estado civil, ingresos y estado laboral. Para la realización del experimento se utilizaron dos grupos de Finanzas de la Universidad EAFIT, el primero de ellos de la especialización de la sede en Bogotá y el segundo a nivel de pregrado en la sede en Medellín.

Cada uno de ellos contó con la participación de 21 y 20 estudiantes respectivamente. Para el desarrollo del experimento se utilizaron computadores portátiles donde los participantes realizaron la encuesta, que fue enviada minutos antes a los respectivos correos electrónicos mediante un link que los direccionaba a la encuesta y a las instrucciones. Respecto a este último ítem, estas contenían las reglas previas que permitían mantener el ambiente ideal para que el experimento cumpliera con todas las condiciones ideales que plantea la teoría. La plataforma que se utilizó para todo este procedimiento fue Qualtrics. Luego de tener claras las etapas del juego y el procedimiento a seguir, el experimento se dio en dos momentos. El primero de ellos consistió en completar la encuesta demográfica con los datos solicitados y luego el sujeto de prueba procedía a elegir entre dos alternativas que se planteaban de veinticinco pares de loterías con premios fijos de 0.3, 0.6 y 1. Las probabilidades de ganar variaban y correspondieron a bonificaciones de nota adicional para una materia que se estaba cursando. La figura 1 muestra el ejemplo que se suministró a los estudiantes en las instrucciones, antes que procedieran a realizar la escogencia.

Figure 1: Ejemplo entregado a los estudiantes

En este ejemplo, si se elige la Opción A puede ganar una bonificación de 0.6 con una probabilidad de 30%, una bonificación de 0.30 con probabilidad de 30% ó 1 con una probabilidad de 40%. Si elige la Opción B podrá ganar una bonificación de 1 con una probabilidad de 20%, una bonificación de 0.3 con probabilidad de 40% ó 0.6 con una probabilidad de 40%.

Dada las limitantes de tiempo y de restricción presupuestaria el experimento presentó los siguientes inconvenientes: el primero de ellos estaba en función del espacio y del tiempo, pues no fue posible realizarlo con más de treinta personas pues la disponibilidad de tiempo de los estudiantes era bastante limitada y dependía exclusivamente de su interés por participar en el experimento; por otra parte, la Universidad EAFIT no cuenta con espacios o aulas dotadas de computadores que permitan un mayor número de participantes en el laboratorio de mercadeo, ya que usualmente sus investigaciones se basan en la utilización de pocos individuos; en segundo lugar, no se contaba con los suficientes recursos económicos para realizar a cabalidad el experimento, por lo cual se optó por encontrar otro tipo de incentivo como obtener una bonificación extra en la nota de determinada materia, lo cual permitió no afectar las condiciones del experimento, y lo más importante, que la recompensa fuera motivadora para los participantes e indujera a las características preestablecidas. En tal sentido [Read \(2007\)](#) argumentó que el incentivo en dinero no es ni suficiente ni necesario para lograr los objetivos de una investigación; adicionalmente, resultados obtenidos por [Melo \(1993\)](#) indicaron que en diversos experimentos desarrollados sin incentivos económicos se encontraron resultados útiles, en donde a pesar de que los valores generales en cada experimento fueron diferentes las conclusiones se conservaron.

Finalmente, para la realización de este experimento se tomaron como referencia los trabajos hechos por Harrison, Martínez-Correa y Swarthout (2014) quienes utilizaron diferentes juegos de loterías para medir la aversión al riesgo para la función CRRA, en particular se tuvieron en cuenta como pilar, los trabajos de Harrison y Rutström (2008) y Harrison y Rutström (2009), como elemento guía y base de la metodología, por su facilidad en la comprensión para los participantes del experimento y como replica a pequeña escala para comparar los resultados. En Harrison y Rutström (2008) desarrollaron ampliamente las investigaciones de Hey y Orme (1994) y Holt et al. (2002) quienes utilizaron las metodologías de RLP (utilizada en esta investigación) y MPL respectivamente; ellos encontraron al replicar el trabajo de Hey un valor de 0.53 para el índice de aversión al riesgo, contrario al encontrado por el mismo autor que fue de 0.61 bajo la función CRRA. Por su parte, Harrison, Johnson, McInnes y Rutström (2003), estimaron el índice de aversión al riesgo definiendo el intervalo entre -0.5 y 1.25, siendo 1.25 muy averso al riesgo.

3.2.1. Estimación del parámetro

En esta sección se describe la estructura y el proceso para estimar el parámetro ⁷

La función de utilidad está dada por:

$$U(x) = \frac{x^{1-A}}{1-A} \quad (23)$$

Donde:

x : es el premio de la lotería

A : el parámetro a estimar de la **CRRA**, con $A \neq 1$.

Para los k posibles resultados de la lotería y utilizando la EUT, las probabilidades para cada elección k p_k , se tiene que la Utilidad Esperada es la utilidad promedio de los resultados de cada lotería i , la cual viene dada por:

$$EU_i = \sum_{k=1}^k p_k \times U_k \quad (24)$$

La utilidad esperada para cada par de loterías es calculado para el posible valor de A , y la fórmula

$$\nabla EU = EU_D - EU_I \quad (25)$$

Donde:

EU_D : representa la lotería derecha,

EU_I : lotería de la izquierda.

La fórmula anterior, apoyada en las escogencias ⁸ según las preferencias está basada en una función de distribución normal acumulada $\Phi(\nabla EU)$. Esta función "probit" toma valores entre

⁷Tomado de [Harrison and Rutstrom \(2008\)](#)

⁸Estas escogencias acá denotan las variables no observables, conocidas como variables latentes.

$\pm\infty$ y los transforma en un número entre 0 y 1 utilizando la *función normal* o *logística*(CDF). Luego, se define la función probit como:

$$prob(\text{escogencia loteria } \mathbf{D}) = \Phi(\nabla EU) \quad (26)$$

Es importante aclarar, que la ecuación (22) está vinculada a las elecciones observadas al especificar que se elige la lotería \mathbf{D} cuando $\Phi(\nabla EU) > 1/2$, la cual está implícito en la ecuación (23). Luego la probabilidad de las respuestas observadas bajo la EUT y las características de la CRRA dependen de la estimación de A según las escogencias y especificaciones estadísticas dadas anteriormente. Al omitir las respuestas que no muestren preferencias, el modelo utilizando máxima verosimilitud se puede escribir:

$$\ln \mathbf{L}(A; y; \mathbf{X}) = \sum_i ((\ln \Phi(\nabla EU) | y_i = 1) + (\ln \Phi(1 - \nabla EU) | y_i = 0)) \quad (27)$$

Dónde:

$y_i = 1$ representa las escogencias de la lotería derecha

$y_i = 0$ son las escogencias de la lotería izquierda,

A es el parámetro de estimación de aversión al riesgo,

\mathbf{X} Es un vector de características demográficas como la edad, sexo, educación, entre otras.

Por último, se tiene en cuenta un error estocástico ⁹

y

$$\nabla EU = \frac{EU_D - EU_I}{\mu} \quad (28)$$

⁹Hey y Orme (1994) y Harrison y Rutström (2008) amplían y conceptualizan el error de Fechner

que se da en la probabilidad de las escogencias cuando no es 1, consecuencia de que la EU de una lotería excede la EU de la otra lotería, ésta nueva ecuación es otra forma de escribir (22) teniendo en cuenta dicho error.

Como parámetros se utilizan los valores dados en la tabla 3.

Tabla 3: Coeficiente de aversión al riesgo en la función CRRA y su respectiva definición

Muy amante al riesgo	$(-0.95 < A < -0.49)$
Amante al riesgo	$(-0.49 < A < -0.15)$
Neutral al riesgo	$(-0.15 < A < 0.15)$
Ligeramente averso al riesgo	$(0.15 < A < 0.41)$
Averso al riesgo	$(0.41 < A < 0.68)$
Muy averso al riesgo	$(0.68 < A < 0.97)$
Extremadamente averso al riesgo	$(0.97 < A < 1.36)$

Fuente: Aliaga Lordemann, J. y Oropeza, A. (2015) en base a Holt y Laury (2002)

4. Análisis de resultados

El propósito fundamental de este trabajo consistió en encontrar experimentalmente el índice de aversión al riesgo en la función CRRA utilizando un juego de loterías, donde, para cumplir dicho objetivo se realizó un experimento con dos grupos de estudiantes de la Universidad EAFIT. Dicho experimento, que reunió a 41 estudiantes en total, permitió obtener los siguientes resultados.

En el experimento realizado con el grupo de Bogotá, que estaba conformado por 21 estudiantes, el índice de aversión al riesgo estimado fue de $A = 0.56$ (véase figura 2), lo que significa que los integrantes de este grupo son aversos al riesgo. Ahora bien, los resultados del grupo de la Sede Medellín (figura 3), compuesto por 20 estudiantes, arrojan un índice de aversión al riesgo estimado de $A = 0.68$, lo que implica que este grupo se encuentra en el intervalo de muy averso al riesgo, pero es de notar, que ambos grupos, como lo estima la teoría, son aversos al riesgo y que la diferencia entre medias no es estadísticamente significativa.

Figure 2: Estimación del parámetro para el grupo de estudiantes de Bogotá

	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
r						
_cons	.5613048	.0744277	7.54	0.000	.4154292	.7071804
mu						
_cons	.0145017	.0045864	3.16	0.002	.0055125	.023491

Log likelihood = -356.18801

Number of obs = 525
Wald chi2(0) = .
Prob > chi2 = .

Figure 3: Estimación del parámetro para el grupo de estudiantes de Medellín

Log likelihood = -343.74218	Number of obs = 500 Wald chi2(0) = . Prob > chi2 = .
-----------------------------	--

	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]
r					
_cons	.6816488	.1135979	6.00	0.000	.4590011 .9042965
mu					
_cons	.019032	.0095758	1.99	0.047	.0002638 .0378002

Con respecto a los resultados obtenidos al incluir en la estimación las variables demográficas en el grupo de Bogotá, como se puede ver en la figura 4, se encuentra que las variables significativas con un nivel de confiabilidad de 95% son *educ*, que equivale a la educación del estudiante, y *educfather - v* que representa la educación del padre con un *p - value* de 0.009 y 0.001 respectivamente. Adicionalmente, en la variable educación del estudiante, referida a si el estudiante tenía especialización, se observa que los estudiantes del grupo que cuentan con especialización son menos aversos con un coeficiente de $A = 0.43$, en comparación al grupo en general.

En lo que se refiere al grupo de Medellín (véase figura 5), no se observaron efectos significativos en ninguna de las variables medidas con un nivel de confiabilidad del 95%. Asimismo, para una muestra pequeña, como en este caso, las variables demográficas no afectan la decisión de los individuos frente a su aversión al riesgo, como se puede ver en otros trabajos de la misma línea y que fueron referenciados anteriormente.

Figure 4: Coeficientes de las variables demográficas para el grupo de Bogotá

		Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
r							
	female	-.067464	.1041729	-0.65	0.517	-.2716391	.136711
	educ	.4398417	.1674586	2.63	0.009	.1116289	.7680546
	educ_father~v	-.3471407	.1046868	-3.32	0.001	-.5523229	-.1419584
	age_30	0	(omitted)				
	married	.067571	.0984986	0.69	0.493	-.1254828	.2606248
	_cons	.2664757	.1734403	1.54	0.124	-.0734611	.6064124
mu							
	_cons	.0112226	.0035324	3.18	0.001	.0042992	.018146

Log likelihood = -349.98567

Number of obs = 525
 LR chi2(1) = 0.48
 Prob > chi2 = 0.4893

Figure 5: Coeficientes de las variables demográficas para el grupo de Medellín

		Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
r							
	female	.1744918	.1714628	1.02	0.309	-.161569	.5105527
	educ	0	(omitted)				
	educ_father_univ	-.2445255	.197285	-1.24	0.215	-.6311971	.142146
	age_30	-.26468	.2215295	-1.19	0.232	-.6988699	.1695099
	married	.0940717	.2683458	0.35	0.726	-.4318765	.6200199
	_cons	.7654257	.1789363	4.28	0.000	.414717	1.116134
mu							
	_cons	.0195879	.0099054	1.98	0.048	.0001736	.0390022

. ml display

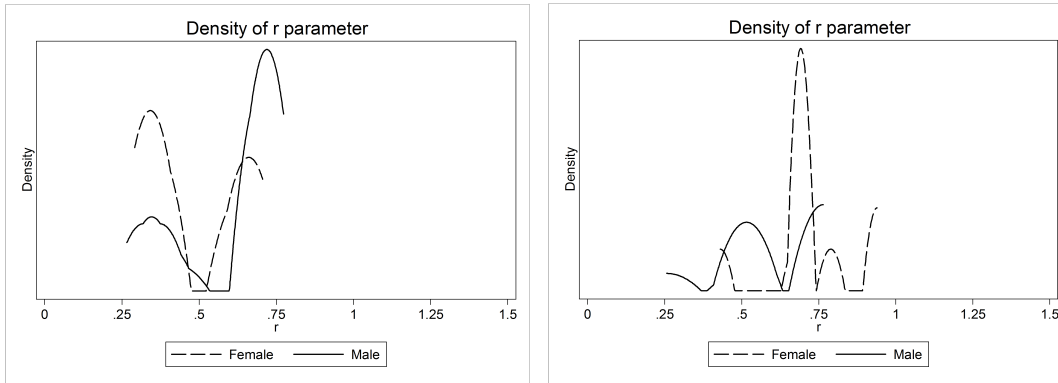
Log likelihood = -343.05509

Number of obs = 500
 LR chi2(1) = 0.12
 Prob > chi2 = 0.7275

Al revisar la función de densidad por género, en la figura 6a y 6b, y basados en la tabla 3, hallamos en el grupo perteneciente a la ciudad de Bogotá, que los hombres son más aversos al riesgo que las mujeres, sin desconocer que algunos valores de los hombres se ubican ligeramente aversos al riesgo, lo cual se observa en la gráfica de la curva de línea continua. En el grupo de Medellín, por el contrario, las mujeres resultan más aversas al riesgo que los hombres, reconociendo además que algunos valores de los hombres, como se encontró en el grupo de Bogotá, se ubican ligeramente aversos al riesgo, lo anterior indica, y como lo soporta la tabla de variables demográficas, que no existe diferencia en la aversión por género.

Con respecto a la función de aversión al riesgo la curva cóncava estimada confirma que ambos grupos son aversos al riesgo, resultado que se refleja en las figuras 7a y 7b:

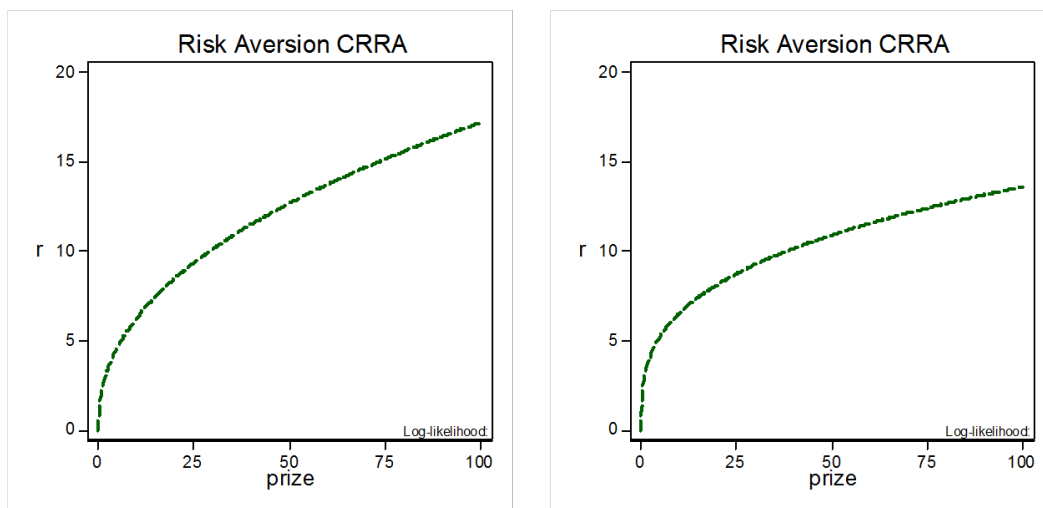
Figure 6: Función de densidad por género



(a) Bogotá

(b) Medellín

Figure 7: Función CRRA

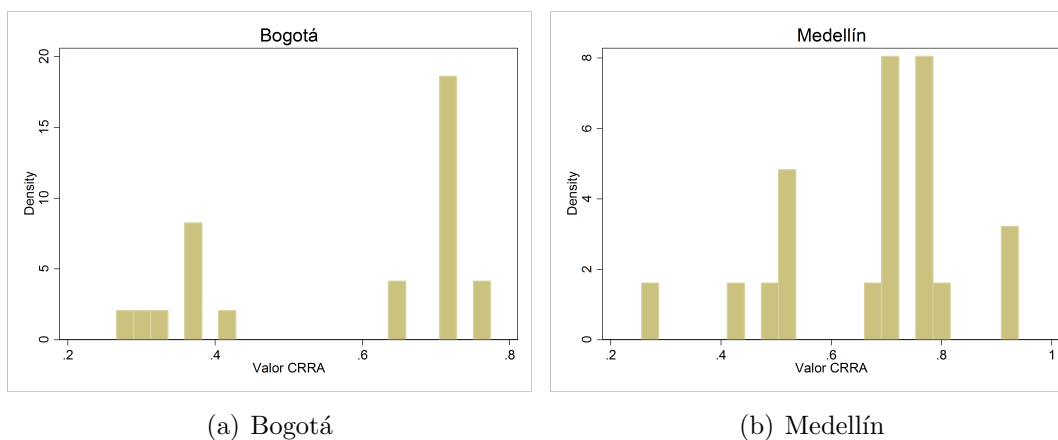


(a) Bogotá

(b) Medellín

Finalmente, como se ha visto en los resultados anteriores, ambos grupos arrojaron un índice de aversión al riesgo parecido y que indica que ambos son aversos al riesgo, sin embargo, al ver la distribución de los datos, presentados en la figura 8, es posible identificar que existe asimetría en la distribución de cada uno de ellos; en el grupo de Bogotá los valores de la CRRA se ubican, en su mayoría, por debajo de 0.4 y por encima de 0.6; en cambio, en el grupo de Medellín los valores de la CRRA muestran valores más cercanos a la media encontrada.

Figure 8: Distribución de probabilidad



5. Conclusiones

Este documento propone el uso de la metodología de Utilidad Esperada y de Función de Utilidad para la evaluación del coeficiente de aversión al riesgo que se estima para la función tipo CRRA, la cual se empleó porque, explicó y modeló el comportamiento de los agentes respecto a su aversión al riesgo, además cumple con una serie de características importantes como son la aversión absoluta al riesgo decreciente y la posibilidad de diferenciar las preferencias de los agentes a partir de distintos niveles de concavidad, mostrando que los individuos no son neutrales al riesgo.

Esta investigación permitió evaluar las decisiones de los individuos en las que se involucra el factor riesgo con base en la teoría de la Utilidad Esperada; en este orden de ideas, nuestro principal aporte fue que se logró estimar el grado de aversión mediante el coeficiente Gamma que subyace en la CRRA, utilizando para ello dos grupos de individuos bajo diferentes contextos; gracias al desarrollo del experimento a pequeña escala se da cuenta del comportamiento de los individuos en la toma de decisiones, bajo riesgo e incertidumbre presentan aversión.

Para la implementación de la metodología se apropiaron una serie de técnicas, que incluyeron el juego de loterías bajo dos métodos como fueron Random Lottery Pairs y Multiple Price List Design. Vale la pena resaltar que su utilización resulta simple y fácil de implementar con todo tipo de individuos y permite encontrar resultados óptimos y coherentes que van de acuerdo con la teoría.

En cuanto a los resultados del experimento se logró calibrar y estimar a cabalidad el coeficiente de aversión al riesgo, donde la media para ambos grupos luce similar e indica la presencia de aversión frente al riesgo. Con respecto a las variables demográficas se encontró que la edad, el ingreso y el género se presentaron como no significativas, es decir, las condiciones particulares del experimento no influyen sobre las elecciones de los individuos. En función de lo anteriormente mencionado vale la pena indicar que la muestra fue pequeña, lo que no permite llegar a una conclusión general, pero en palabras de Harrison y Rutström (2008) aunque algunas variables no sean significativas el coeficiente, de forma general para la muestra, no cambia.

Se exhorta que para futuras investigaciones se puedan utilizar otros tipos de funciones para fines comparativos, como puede ser el uso de la función expo-power, la cual exhibe características similares para medir la aversión al riesgo, además de su importante condición de flexibilidad para modelar cualquier tipo de agente.

Referencias

- Alchian, A. A. (1953). The meaning of utility measurement. *The American Economic Review*, 43(1):26–50.
- Aliaga Lordemann, J. and Oropeza Farell, A. (2015). Análisis experimental de la curva de laffer y la evasión fiscal en bolivia. *Revista Latinoamericana de Desarrollo Económico*, (24):121–153.
- Beedles, W. L. (1978). On the use of certainty equivalent factors as risk proxies. *Journal of Financial Research*, 1(1):15–21.
- Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 23–36.
- Brandts, J. (2009). La economía experimental y la economía del comportamiento.
- Camerer, C. F. (1989). An experimental test of several generalized utility theories. *Journal of Risk and Uncertainty*, 2(1):61.
- Camerer, C. F. (1992). Recent tests of generalizations of expected utility theory. In *Utility theories: Measurements and applications*, pages 207–251. Springer.
- Campo, S., Guerre, E., Perrigne, I., and Vuong, Q. (2011). Semiparametric estimation of first-price auctions with risk-averse bidders. *The Review of Economic Studies*, 78(1):112–147.
- Capiński, M. J., Kopp, E., and Ski, M. J. C. (2014). *Portfolio theory and risk management*, volume 5. Cambridge University Press.
- Christensen, L. R., Jorgenson, D. W., and Lau, L. J. (1975). Transcendental logarithmic utility functions. *The American Economic Review*, 65(3):367–383.
- Cipu, C. and Gheorghe, C. (2015). Some applications in economy for utility functions involving risk theory. *Procedia Economics and Finance*, 22:595–600.
- Cohn, R. A., Lewellen, W. G., Lease, R. C., and Schlarbaum, G. G. (1975). Individual investor risk aversion and investment portfolio composition. *The Journal of Finance*, 30(2):605–620.

- Dixit, A. K. and Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton university press.
- Eckel, C. C. and Grossman, P. J. (2008). Forecasting risk attitudes: An experimental study using actual and forecast gamble choices. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 68(1):1–17.
- Harrison, G. W. (1986). An experimental test for risk aversion. *Economics Letters*, 21(1):7–11.
- Harrison, G. W., Johnson, E., McInnes, M. M., and Rutström, E. E. (2003). Individual choice and risk aversion in the laboratory: A reconsideration. *University of Central Florida, Department of Economics Working Paper*, (3-18).
- Harrison, G. W., Lau, M. I., and Rutström, E. E. (2007). Estimating risk attitudes in denmark: A field experiment. *The Scandinavian Journal of Economics*, 109(2):341–368.
- Harrison, G. W., Martínez-Correa, J., and Swarthout, J. T. (2014). Eliciting subjective probabilities with binary lotteries. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 101:128–140.
- Harrison, G. W. and Rutstrom, E. E. (2008). Risk aversion in the laboratory.
- Harrison, G. W. and Rutström, E. E. (2009). Expected utility theory and prospect theory: One wedding and a decent funeral. *Experimental Economics*, 12(2):133–158.
- Hey, J. D. and Orme, C. (1994). Investigating generalizations of expected utility theory using experimental data. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1291–1326.
- Holt, C. A., Laury, S. K., et al. (2002). Risk aversion and incentive effects. *American economic review*, 92(5):1644–1655.
- John von N, M. O. (2007). *Theory of games and economic behavior* (60th anniversary commemorative edition).
- Juberías, E. F. and Cotanda, J. M. R. (2004). Una introducción a la metodología experimental en economía. *Cuadernos de economía: Spanish Journal of Economics and Finance*, 27(75):7–36.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 263–291.

- Kallberg, J. G. and Ziemba, W. T. (1983). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. *Management Science*, 29(11):1257–1276.
- Knight, F. H. (2012). *Risk, uncertainty and profit*. Courier Corporation.
- LaPlante, D. A., Gray, H. M., Bosworth, L., and Shaffer, H. J. (2010). Thirty years of lottery public health research: Methodological strategies and trends. *Journal of Gambling Studies*, 26(2):301–329.
- Luce, R. D. and Raiffa, H. (2012). *Games and decisions: Introduction and critical survey*. Courier Corporation.
- Melo, L. A. et al. (1993). Los incentivos monetarios en la economía experimental: un estudio de caso. *Revista Desarrollo y Sociedad*.
- Meyer, D. J. and Meyer, J. (2005). Relative risk aversion: What do we know? *Journal of Risk and Uncertainty*, 31(3):243–262.
- Nicholson, W. (2005). *Teoría microeconómica: principios básicos y ampliaciones*. Editorial Paraninfo.
- Norstad, J. (1999). An introduction to utility theory. *Unpublished manuscript at <http://homepage.mac.com/j.norstad>*.
- Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 122–136.
- Read, D. (2007). Monetary incentives, what are they good for?’, *journal of economic methodology*, 12 (2), june, 265-76. *INTERNATIONAL LIBRARY OF CRITICAL WRITINGS IN ECONOMICS*, 209(2):127.
- Rebelo, S. T. (1990). Long run policy analysis and long run growth. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Rubinfeld, D. and Pindyck, R. (2013). *Microeconomics*. Pearson Education.

- Smith, V. L. (1982). Microeconomic systems as an experimental science. *The American Economic Review*, 72(5):923–955.
- Smith, V. L. (1994). Economics in the laboratory. *The Journal of Economic Perspectives*, 8(1):113–131.
- Tarapuez Chamorro, E., Zapata Erazo, J. A., and Agreda Montenegro, E. (2008). Knight y sus aportes a la teoría del emprendedor. *Estudios Gerenciales*, 24(106):83–98.
- Varian, H. R. (2011). *Ejercicios de microeconomía intermedia*. Antoni Bosch editor.
- Vasseur, J. P. and Pérez, C. C. (2016). Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad. *Contaduría y Administración*.
- Viscusi, W. K. (1993). The value of risks to life and health. *Journal of economic literature*, 31(4):1912–1946.
- Viscusi, W. K. and Evans, W. N. (1990). Utility functions that depend on health status: estimates and economic implications. *The American Economic Review*, pages 353–374.
- Xie, D. et al. (2002). Power risk aversion utility functions. Technical report, EconWPA.
- Yu, B. W.-T., Pang, W. K., Troutt, M. D., and Hou, S. H. (2009). Objective comparisons of the optimal portfolios corresponding to different utility functions. *European Journal of Operational Research*, 199(2):604–610.

