

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН  
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**Частина II**

**Індивідуальні завдання для студентів економічних  
спеціальностей**

**КІРОВОГРАД  
2012**

Вища математика. Індивідуальні завдання для студентів економічних спеціальностей / Укл.: Гуцул В.І., Якименко С.М., Гончарова С.Я., Філімоніхіна І.І. – Кіровоград: КНТУ, 2012. – 87 с.

Друга частина методичної розробки містить індивідуальні завдання по всім розділам курсу вищої математики, які вивчаються на економічних спеціальностях. Вказані завдання призначені для закріплення теоретичного матеріалу та для організації самостійної і індивідуальної роботи студентів.

Орієнтовано на студентів економічних спеціальностей.

Затверджено на засіданні  
кафедри вищої  
математики та фізики.  
Протокол № 6 від 29.02.2012

Укладачі: Гуцул В.І. – канд. техн. наук, доц.  
Якименко С.М. – канд. фіз.-мат. наук, доц.  
Гончарова С.Я. – канд. фіз.-мат. наук, доц.  
Філімоніхіна І.І. – канд. фіз.-мат. наук.

## зміст

|   |    |
|---|----|
| <b>Зміст</b> .....  | 3  |
| <b>Індивідуальні завдання</b> .....                           | 4  |
| Елементи лінійної алгебри .....                               | 4  |
| Елементи аналітичної геометрії .....                          | 12 |
| Вступ до математичного аналізу .....                          | 18 |
| Комплексні числа .....  | 27 |
| Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання ..... | 29 |
| Деякі застосування похідної .....                             | 41 |
| Невизначений інтеграл .....                                   | 45 |
| Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла ..... | 57 |
| Диференціальне числення функції декількох змінних .....       | 65 |
| Диференціальні рівняння .....                                 | 75 |
| <b>Рекомендована література</b> .....                         | 87 |

# ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

## Елементи лінійної алгебри

**Завдання 1.** Знайти матрицю  $C = 3 \cdot A^T - A \cdot B + 2 \cdot E$ , де  $E$  - одинична матриця третього порядку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -7 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 2.** Обчислити визначник, використовуючи:

а) метод трикутників;

б) розклад визначника по елементах рядка або стовпця;

в) властивості визначника (зведення визначника до трикутного вигляду).

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}. \quad 5. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}. \quad 6. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 11. \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad 21. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 26. \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 29. \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 30. \begin{vmatrix} -8 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

**Завдання 3.** Перевірити на сумісність систему рівнянь і, у випадку сумісності, розв'язати її: а) за формулами Крамера; б) за допомогою



оберненої матриці (матричним методом); в) методом Гаусса;

б) методом Жордана-Гаусса.

$$1. \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33, \\ 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+2x_3=39. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1+4x_2-x_3=8, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-x_3=10. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ x_1-2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+4x_3=6, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

**Завдання 4.** Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3. \begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases} & 4. \begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases} \\
5. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-10x_2-3x_3+2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases} & 6. \begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases} \\
7. \begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases} & 8. \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases} \\
9. \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases} & 10. \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-3x_2-3x_3=0. \end{cases} \\
11. \begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases} & 12. \begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases} & 14. \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-5x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases} \\
15. \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases} & 16. \begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases} \\
17. \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases} & 20. \begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
21. \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases} & 22. \begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases} \\
23. \begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0. \end{cases} & 24. \begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases} & 26. \begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases} \\
27. \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases} & 28. \begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases} \\
29. \begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases} & 30. \begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=0. \end{cases}
\end{array}$$

### Елементи аналітичної геометрії

**Завдання 5.** Довести, що вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють базис, і знайти координати вектора  $\vec{d}$  у цьому базисі.

1.  $\vec{a}(5,4,1)$ ,  $\vec{b}(-3,5,2)$ ,  $\vec{c}(2,-1,3)$ ,  $\vec{d}(7,23,4)$ .
2.  $\vec{a}(2,-1,4)$ ,  $\vec{b}(-3,0,-2)$ ,  $\vec{c}(4,5,-3)$ ,  $\vec{d}(0,11,-14)$ .
3.  $\vec{a}(-1,1,2)$ ,  $\vec{b}(2,-3,-5)$ ,  $\vec{c}(-6,3,-1)$ ,  $\vec{d}(28,-19,-7)$ .
4.  $\vec{a}(1,3,4)$ ,  $\vec{b}(-2,5,0)$ ,  $\vec{c}(3,-2,-4)$ ,  $\vec{d}(13,-5,-4)$ .
5.  $\vec{a}(1,-1,1)$ ,  $\vec{b}(-5,-3,1)$ ,  $\vec{c}(2,-1,0)$ ,  $\vec{d}(-15,-10,5)$ .
6.  $\vec{a}(3,1,2)$ ,  $\vec{b}(-7,-2,-4)$ ,  $\vec{c}(-4,0,3)$ ,  $\vec{d}(16,6,15)$ .

7.  $\vec{a}(-3,0,1)$ ,  $\vec{b}(2,7,-3)$ ,  $\vec{c}(-4,3,5)$ ,  $\vec{d}(-16,33,13)$ .
8.  $\vec{a}(5,1,2)$ ,  $\vec{b}(-2,1,-3)$ ,  $\vec{c}(4,-3,5)$ ,  $\vec{d}(15,-15,24)$ .
9.  $\vec{a}(0,2,-3)$ ,  $\vec{b}(4,-3,-2)$ ,  $\vec{c}(-5,4,0)$ ,  $\vec{d}(-19,-5,-4)$ .
10.  $\vec{a}(3,-1,2)$ ,  $\vec{b}(-2,3,1)$ ,  $\vec{c}(4,-5,-3)$ ,  $\vec{d}(-3,2,-3)$ .
11.  $\vec{a}(5,3,1)$ ,  $\vec{b}(-1,2,-3)$ ,  $\vec{c}(3,-4,2)$ ,  $\vec{d}(-9,34,-20)$ .
12.  $\vec{a}(3,1,-3)$ ,  $\vec{b}(-2,4,1)$ ,  $\vec{c}(1,-2,5)$ ,  $\vec{d}(1,12,-20)$ .
13.  $\vec{a}(6,1,-3)$ ,  $\vec{b}(-3,2,1)$ ,  $\vec{c}(-1,-3,4)$ ,  $\vec{d}(15,6,-17)$ .
14.  $\vec{a}(4,2,3)$ ,  $\vec{b}(-3,1,-8)$ ,  $\vec{c}(2,-4,5)$ ,  $\vec{d}(-12,14,-31)$ .
15.  $\vec{a}(-2,1,3)$ ,  $\vec{b}(3,-6,2)$ ,  $\vec{c}(-5,-3,-1)$ ,  $\vec{d}(31,-6,22)$ .
16.  $\vec{a}(1,3,6)$ ,  $\vec{b}(-3,4,-5)$ ,  $\vec{c}(1,-7,2)$ ,  $\vec{d}(-2,17,5)$ .
17.  $\vec{a}(7,2,1)$ ,  $\vec{b}(5,1,-2)$ ,  $\vec{c}(-3,4,5)$ ,  $\vec{d}(26,11,1)$ .
18.  $\vec{a}(3,5,4)$ ,  $\vec{b}(-2,7,-5)$ ,  $\vec{c}(6,-2,1)$ ,  $\vec{d}(6,-9,22)$ .
19.  $\vec{a}(5,3,2)$ ,  $\vec{b}(2,-5,1)$ ,  $\vec{c}(-7,4,-3)$ ,  $\vec{d}(36,1,15)$ .
20.  $\vec{a}(11,1,2)$ ,  $\vec{b}(-3,3,4)$ ,  $\vec{c}(-4,-2,7)$ ,  $\vec{d}(-5,11,-15)$ .
21.  $\vec{a}(9,5,3)$ ,  $\vec{b}(-3,2,1)$ ,  $\vec{c}(4,-7,4)$ ,  $\vec{d}(-10,-13,8)$ .
22.  $\vec{a}(7,2,1)$ ,  $\vec{b}(3,-5,6)$ ,  $\vec{c}(-4,3,-4)$ ,  $\vec{d}(-1,18,-16)$ .
23.  $\vec{a}(1,2,3)$ ,  $\vec{b}(-5,3,-1)$ ,  $\vec{c}(-6,4,5)$ ,  $\vec{d}(-4,11,20)$ .
24.  $\vec{a}(-2,5,1)$ ,  $\vec{b}(3,2,-7)$ ,  $\vec{c}(4,-3,2)$ ,  $\vec{d}(-4,22,-13)$ .
25.  $\vec{a}(3,1,2)$ ,  $\vec{b}(-4,3,-1)$ ,  $\vec{c}(2,3,4)$ ,  $\vec{d}(14,14,20)$ .
26.  $\vec{a}(3,-1,2)$ ,  $\vec{b}(-2,4,1)$ ,  $\vec{c}(4,-5,-1)$ ,  $\vec{d}(-5,11,1)$ .

27.  $\vec{a}(4,5,1)$ ,  $\vec{b}(1,3,1)$ ,  $\vec{c}(-3,-6,7)$ ,  $\vec{d}(19,33,0)$ .

28.  $\vec{a}(1,-3,1)$ ,  $\vec{b}(-2,-4,3)$ ,  $\vec{c}(0,-2,3)$ ,  $\vec{d}(-8,-10,13)$ .

29.  $\vec{a}(5,7,-2)$ ,  $\vec{b}(-3,1,3)$ ,  $\vec{c}(1,-4,6)$ ,  $\vec{d}(14,9,-1)$ .

30.  $\vec{a}(-1,4,3)$ ,  $\vec{b}(3,2,-4)$ ,  $\vec{c}(-2,-7,1)$ ,  $\vec{d}(6,20,-3)$ .

**Завдання 6.** Вершини піраміди знаходяться в точках  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,

$B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$  і  $D(x_4, y_4, z_4)$ . Обчислити: а) координати векторів  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ ; б) вектор  $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ ;

в) скалярний добуток  $\vec{a}\vec{b}$  та кут  $\angle BAC$ ; г) векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$  та площу трикутника  $ABC$ ; д) змішаний добуток  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  та об'єм піраміди  $ABCD$ .

1.  $A(3,4,5)$ ,  $B(1,2,1)$ ,  $C(-2,-3,6)$ ,  $D(3,-6,-3)$ .

2.  $A(-7,-5,6)$ ,  $B(-2,5,-3)$ ,  $C(3,-2,4)$ ,  $D(1,2,2)$ .

3.  $A(1,3,1)$ ,  $B(-1,4,6)$ ,  $C(-2,-3,4)$ ,  $D(3,4,-4)$ .

4.  $A(2,4,1)$ ,  $B(-3,-2,4)$ ,  $C(3,5,-2)$ ,  $D(4,2,-3)$ .

5.  $A(-5,-3,-4)$ ,  $B(1,4,6)$ ,  $C(3,2,-2)$ ,  $D(8,-2,4)$ .

6.  $A(3,4,2)$ ,  $B(-2,3,-5)$ ,  $C(4,-3,6)$ ,  $D(6,-5,3)$ .

7.  $A(-4,6,3)$ ,  $B(3,-5,1)$ ,  $C(2,6,-4)$ ,  $D(2,4,-5)$ .

8.  $A(7,5,8)$ ,  $B(-4,-5,3)$ ,  $C(2,-3,5)$ ,  $D(5,1,-4)$ .

9.  $A(3,-2,6)$ ,  $B(-6,-2,3)$ ,  $C(1,1,-4)$ ,  $D(4,6,-7)$ .

10.  $A(-5,-4,-3)$ ,  $B(7,3,-1)$ ,  $C(6,-2,0)$ ,  $D(3,2,-7)$ .

11.  $A(3,-5,-2)$ ,  $B(-4,2,3)$ ,  $C(1,5,7)$ ,  $D(-2,-4,5)$ .

12.  $A(7,4,9)$ ,  $B(1,-2,-3)$ ,  $C(-5,-3,0)$ ,  $D(1,-3,4)$ .

13.  $A(-4, -7, -3), B(-4, -5, 7), C(2, -3, 3), D(3, 2, 1)$ .
14.  $A(-4, -5, -3), B(3, 1, 2), C(5, 7, -6), D(6, -1, 5)$ .
15.  $A(5, 2, 4), B(-3, 5, -7), C(1, -5, 8), D(9, -3, 5)$ .
16.  $A(-6, 4, 5), B(5, -7, 3), C(4, 2, -8), D(2, 8, -3)$ .
17.  $A(5, 3, 6), B(-3, -4, 4), C(5, -6, 8), D(4, 0, -3)$ .
18.  $A(5, -4, 4), B(-4, -6, 5), C(3, 2, -7), D(6, 2, -9)$ .
19.  $A(-7, -6, -5), B(5, 1, -3), C(8, -4, 0), D(3, 4, -7)$ .
20.  $A(7, -1, -2), B(1, 7, 8), C(3, 7, 9), D(-3, -5, 2)$ .
21.  $A(5, 2, 7), B(7, -6, -9), C(-7, -6, -3), D(1, -5, 2)$ .
22.  $A(-2, -5, 1), B(-6, -7, 9), C(4, -5, 1), D(2, 1, 4)$ .
23.  $A(-6, -3, 5), B(5, 1, 7), C(3, 5, -1), D(4, -2, 9)$ .
24.  $A(7, 4, 2), B(-5, 3, -9), C(1, -5, 3), D(7, -9, 1)$ .
25.  $A(-8, 2, 7), B(3, -5, 9), C(2, 4, -6), D(4, 6, -5)$ .
26.  $A(4, 3, 1), B(2, 7, 5), C(-4, -2, 4), D(2, -3, -5)$ .
27.  $A(-9, -7, 4), B(-4, 3, -1), C(5, -4, 2), D(3, 4, 4)$ .
28.  $A(3, 5, 3), B(-3, 2, 8), C(-3, -2, 6), D(7, 8, -2)$ .
29.  $A(4, 2, 3), B(-5, -4, 2), C(5, 7, -4), D(6, 4, -7)$ .
30.  $A(-4, -2, -3), B(2, 5, 7), C(6, 3, -1), D(6, -4, 1)$ .

**Завдання 7.** Задано вершини трикутника  $ABC$ :

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ . Знайти:

- а) рівняння сторони  $AB$  ;
- б) рівняння висоти  $CH$  ;
- в) рівняння та довжину медіани  $AM$  ;

г) точку  $N$  перетину медіани  $AM$  та висоти  $CH$  ;

д) рівняння прямої, яка проходить через точку  $N$  паралельно до сторони  $AB$  ;

е) відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$  (довжину висоти  $CH$  ).

1.  $A(-2,4), B(3,1), C(10,7)$ .
2.  $A(-3,-2), B(14,4), C(6,8)$ .
3.  $A(1,7), B(-3,-1), C(11,-3)$ .
4.  $A(1,0), B(-1,4), C(9,5)$ .
5.  $A(1,-2), B(7,1), C(3,7)$ .
6.  $A(-2,-3), B(1,6), C(6,1)$ .
7.  $A(-4,2), B(-6,6), C(6,2)$ .
8.  $A(4,-3), B(7,3), C(1,10)$ .
9.  $A(4,-4), B(8,2), C(3,8)$ .
10.  $A(-3,-3), B(5,-7), C(7,7)$ .
11.  $A(1,-6), B(3,4), C(-3,3)$ .
12.  $A(-4,2), B(8,-6), C(2,6)$ .
13.  $A(-5,2), B(0,-4), C(-5,7)$ .
14.  $A(4,-4), B(6,2), C(-1,8)$ .
15.  $A(-3,8), B(-6,2), C(0,-5)$ .
16.  $A(6,-9), B(10,-1), C(-4,1)$ .
17.  $A(4,1), B(-3,-1), C(7,-3)$ .
18.  $A(-4,2), B(6,-4), C(4,10)$ .
19.  $A(3,-1), B(11,3), C(-6,2)$ .
20.  $A(-7,-2), B(-7,4), C(5,-5)$ .
21.  $A(-1,-4), B(9,6), C(-5,4)$ .
22.  $A(10,-2), B(4,-5), C(-3,1)$ .
23.  $A(-3,-1), B(-4,-5), C(8,1)$ .
24.  $A(-2,-6), B(-3,5), C(4,0)$ .
25.  $A(-7,-2), B(3,8), C(-4,6)$ .
26.  $A(0,2), B(-7,-4), C(3,2)$ .
27.  $A(7,0), B(1,4), C(-8,-4)$ .
28.  $A(1,-3), B(0,7), C(-2,4)$ .
29.  $A(-5,1), B(8,-2), C(1,4)$ .
30.  $A(2,5), B(-3,1), C(0,4)$ .

**Завдання 8.** Задано чотири точки  $A_1(x_1, y_1, z_1); A_2(x_2, y_2, z_2);$

$A_3(x_3, y_3, z_3); A_4(x_4, y_4, z_4)$ . Знайти:

а) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ;



- б) рівняння площини, яка проходить через точку  $A_4$  перпендикулярно до прямої  $A_1A_2$ ;
- в) рівняння прямої  $A_1A_2$ ;
- г) рівняння прямої  $A_4M$  перпендикулярної до площини  $A_1A_2A_3$ ;
- д) рівняння прямої  $A_3N$  паралельної до прямої  $A_1A_2$ ;
- е) синус кута між прямою  $A_1A_4$  та площиною  $A_1A_2A_3$ ;
- ж) косинус кута між координатною площиною  $Oxy$  і площиною  $A_1A_2A_3$ .

1.  $A_1(3,1,4)$ ;  $A_2(-1,6,1)$ ;  $A_3(-1,1,6)$ ;  $A_4(0,4,-1)$ .
2.  $A_1(3,-1,2)$ ;  $A_2(-1,0,1)$ ;  $A_3(1,7,3)$ ;  $A_4(8,5,8)$ .
3.  $A_1(3,5,4)$ ;  $A_2(5,8,3)$ ;  $A_3(1,2,-2)$ ;  $A_4(-1,0,2)$ .
4.  $A_1(2,4,3)$ ;  $A_2(1,1,5)$ ;  $A_3(4,9,3)$ ;  $A_4(3,6,7)$ .
5.  $A_1(9,5,5)$ ;  $A_2(-3,7,1)$ ;  $A_3(5,7,8)$ ;  $A_4(6,9,2)$ .
6.  $A_1(0,7,1)$ ;  $A_2(2,-1,5)$ ;  $A_3(1,6,3)$ ;  $A_4(3,-9,8)$ .
7.  $A_1(5,5,4)$ ;  $A_2(1,-1,4)$ ;  $A_3(3,5,1)$ ;  $A_4(5,8,-1)$ .
8.  $A_1(6,1,1)$ ;  $A_2(4,6,6)$ ;  $A_3(4,2,0)$ ;  $A_4(1,2,6)$ .
9.  $A_1(7,5,3)$ ;  $A_2(9,4,4)$ ;  $A_3(4,5,7)$ ;  $A_4(7,9,6)$ .
10.  $A_1(6,8,2)$ ;  $A_2(5,4,7)$ ;  $A_3(2,4,7)$ ;  $A_4(7,3,7)$ .
11.  $A_1(4,2,5)$ ;  $A_2(0,7,1)$ ;  $A_3(0,2,7)$ ;  $A_4(1,5,0)$ .
12.  $A_1(4,4,0)$ ;  $A_2(7,0,2)$ ;  $A_3(2,8,4)$ ;  $A_4(9,6,9)$ .
13.  $A_1(4,6,5)$ ;  $A_2(6,9,4)$ ;  $A_3(2,10,10)$ ;  $A_4(7,5,9)$ .
14.  $A_1(3,5,4)$ ;  $A_2(8,7,4)$ ;  $A_3(5,10,4)$ ;  $A_4(4,7,8)$ .
15.  $A_1(10,9,6)$ ;  $A_2(2,8,2)$ ;  $A_3(9,8,9)$ ;  $A_4(7,10,3)$ .

16.  $A_1(1,8,2)$ ;  $A_2(5,2,6)$ ;  $A_3(5,7,4)$ ;  $A_4(4,10,9)$ .
17.  $A_1(6,6,5)$ ;  $A_2(4,9,5)$ ;  $A_3(4,6,11)$ ;  $A_4(6,9,3)$ .
18.  $A_1(7,2,2)$ ;  $A_2(-5,7,-7)$ ;  $A_3(5,-3,1)$ ;  $A_4(2,3,7)$ .
19.  $A_1(8,-6,4)$ ;  $A_2(10,5,-5)$ ;  $A_3(5,6,-8)$ ;  $A_4(8,10,7)$ .
20.  $A_1(1,-1,3)$ ;  $A_2(6,5,8)$ ;  $A_3(3,5,8)$ ;  $A_4(8,4,1)$ .
21.  $A_1(1,-2,7)$ ;  $A_2(4,2,10)$ ;  $A_3(2,3,5)$ ;  $A_4(5,3,7)$ .
22.  $A_1(4,2,10)$ ;  $A_2(1,2,0)$ ;  $A_3(3,5,7)$ ;  $A_4(2,-3,5)$ .
23.  $A_1(2,3,5)$ ;  $A_2(5,3,-7)$ ;  $A_3(1,2,7)$ ;  $A_4(4,2,0)$ .
24.  $A_1(5,3,7)$ ;  $A_2(-2,3,5)$ ;  $A_3(4,2,10)$ ;  $A_4(1,2,7)$ .
25.  $A_1(4,3,5)$ ;  $A_2(1,9,7)$ ;  $A_3(0,2,0)$ ;  $A_4(5,3,10)$ .
26.  $A_1(3,2,5)$ ;  $A_2(4,0,6)$ ;  $A_3(2,6,5)$ ;  $A_4(6,4,-1)$ .
27.  $A_1(2,1,6)$ ;  $A_2(1,4,9)$ ;  $A_3(2,-5,8)$ ;  $A_4(5,4,2)$ .
28.  $A_1(2,1,7)$ ;  $A_2(3,3,6)$ ;  $A_3(2,-3,9)$ ;  $A_4(1,2,5)$ .
29.  $A_1(2,-1,7)$ ;  $A_2(6,3,1)$ ;  $A_3(3,2,8)$ ;  $A_4(2,-3,7)$ .
30.  $A_1(0,4,5)$ ;  $A_2(3,-2,1)$ ;  $A_3(4,5,6)$ ;  $A_4(3,3,2)$ .

### Вступ до математичного аналізу

**Завдання 9.** Знайти вказані границі.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ .

2. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 10}{x^3 - 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$ ,
- г)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}$ ,
- г)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$ ,
- г)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$ ,
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$ ,
- г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$ .
7. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{5x^2 + 3x - 3}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$ ,
- г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( -x \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)$ .
8. а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$ ,

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}, \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$9. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}, \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}, \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x},$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}, \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$10. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}, \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}, \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x} \right)^{2x+1},$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}, \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$11. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}, \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}, \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2},$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}, \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$12. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}, \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x},$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}, \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x},$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}.$$

$$13. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}, \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}, \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3},$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$$

14. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^{x-5}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$ .

15. а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$ .

16. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$ ,

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{tg 3x}$ .

17. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$ ,

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x - \sin 3x}{2x^2}$ .

18. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$ .

19. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$ .

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{3-2x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right).$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4}{x^3 - 3x + 2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^x,$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - \frac{1}{4}}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{3x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}.$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 4}{3x + 5} \right)^{x+1},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2x}{3 + 2x} \right)^{-x}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x + 20} - 4}{x^3 + 64}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2}.$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x + 2} \right)^{x-2}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8 + x} - 3}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x - 1} \right)^{3-2x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x^2 + x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}.$$

$$30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - 2x}{1 - 2x} \right)^{x+1},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^3 - 8}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

**Завдання 10.** Дослідити функції на точки розриву. Зробити схематичний малюнок.

$$1. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1. \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1. \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0. \\ \left( \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \right), & 0 < x \leq 2. \\ -x+4, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1. \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1. \\ -x+3, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+7}{x-2}.$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ \left( \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right), & 0 < x < 2. \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-5}{x+3}.$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -2 \left( \begin{array}{l} +1 \\ +1 \end{array} \right), & x \leq -1. \\ \left( \begin{array}{l} +1 \\ +1 \end{array} \right), & -1 < x < 0. \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{3-x}.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ x^2, & 0 < x \leq 2. \\ x+1, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1. \\ 2x, & 1 < x \leq 3. \\ x+2, & x > 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}.$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0. \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4. \\ 3+x, & x > 4. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}}.$$



$$9. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0. \\ 0, & 0 < x \leq 2. \\ x-2, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$10. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0. \\ x, & 0 < x \leq 1. \\ 2+x, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}}.$$

$$11. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0. \\ x, & 0 \leq x \leq 2. \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-3}{x+4}.$$

$$12. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}. \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+5}{x-2}.$$

$$13. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0. \\ x^2, & 0 < x < 2. \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$14. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0. \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1. \\ -x, & x \geq 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}}.$$

$$15. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0. \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2. \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$16. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0. \\ 1, & 0 < x \leq 2. \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}}.$$

$$17. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0. \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi. \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}}.$$

$$18. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1. \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2. \\ 2x, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{3x}{x-4}.$$

$$19. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0. \\ 2^x, & 0 < x \leq 2. \\ x+3, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$$

$$20. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2. \\ x^3, & -2 < x \leq 1. \\ 2, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}}.$$

$$21. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1. \\ x^2-2, & -1 < x < 2. \\ x, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}}.$$

$$22. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1. \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3. \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}}.$$

$$23. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1. \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2. \\ -2x, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}}.$$

$$24. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1. \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3. \\ -x+5, & x > 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-4}{x+2}.$$

$$25. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x, & x < -2. \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1. \\ x^2-1, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-4}{x+3}.$$

$$26. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0. \\ -x^2+4, & 0 \leq x \leq 2. \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+5}{x-3}.$$

$$\begin{array}{ll}
27. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1. \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2. \\ 2x, & x > 2. \end{cases} & \text{б) } f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}}. \\
28. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0. \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \Pi. \\ 1 - x, & x > \Pi. \end{cases} & \text{б) } f(x) = \frac{4x}{x+5}. \\
29. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1. \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1. \\ \ln x, & x > 1. \end{cases} & \text{б) } f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}. \\
30. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ x^3, & 0 < x \leq 2. \\ x + 4, & x > 2. \end{cases} & \text{б) } f(x) = \frac{x+1}{x-2}.
\end{array}$$

### Комплексні числа

**Завдання 11.** Для двох заданих комплексних чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  і

$z_2 = x_2 + y_2i$ : а) знайти  $z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $z_1 \cdot z_2$ ;  $z_1 / z_2$ ; б) записати число

$z_1$  в тригонометричній та показниковій формі.

- 1)  $z_1 = 2 + 3i$ ;  $z_2 = -1 + 4i$ .      2)  $z_1 = -2$ ;  $z_2 = i$ .
- 3)  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = i$ .      4)  $z_1 = i$ ;  $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ .
- 5)  $z_1 = -i$ ;  $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ .      6)  $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = 1$ .
- 7)  $z_1 = 1 + i$ ;  $z_2 = i$ .      8)  $z_1 = -1 + i$ ;  $z_2 = -i$ .
- 9)  $z_1 = -1 + i$ ;  $z_2 = i$ .      10)  $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ;  $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ .
- 11)  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = -i$ .      12)  $z_1 = 3 - 2i$ ;  $z_2 = i$ .
- 13)  $z_1 = -3 + 2i$ ;  $z_2 = \sqrt{3} - i$ .      14)  $z_1 = 3 + 2i$ ;  $z_2 = i$ .
- 15)  $z_1 = -3 - 2i$ ;  $z_2 = -3 + 4i$ .      16)  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ;  $z_2 = 3 - 4i$ .

- 17)  $z_1 = 3 - 4i$ ;  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .    18)  $z_1 = -3 - 2i$ ;  $z_2 = i + 1$ .
- 19)  $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ;  $z_2 = \sqrt{3} - i$ .    20)  $z_1 = -2 + i$ ;  $z_2 = 5 - 12i$ .
- 21)  $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ;  $z_2 = i$ .    22)  $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ;  $z_2 = -3 - 2i$ .
- 23)  $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $z_2 = i$ .    24)  $z_1 = \frac{1-i}{1+i}$ ;  $z_2 = 1$ .
- 25)  $z_1 = 5 - 12i$ ;  $z_2 = 3 + 2i$ .    26)  $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ;  $z_2 = -3$ .
- 27)  $z_1 = -2 + i$ ;  $z_2 = 3 + 2i$ .    28)  $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$ ;  $z_2 = \sqrt{3} - i$ .
- 29)  $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$ ;  $z_2 = 1 - i$ .    30)  $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$ ;  $z_2 = 3 + 2i$ .

**Завдання 12.** Розв'язати рівняння на множині комплексних чисел.

1. а)  $\sqrt[5]{z} + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$ ; б)  $z^2 - 1 - i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 - 2z + 10 = 0$ ;
2. а)  $\sqrt[3]{z} - i\sqrt{3} - 1 = 0$ ; б)  $z^2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$ ; в)  $z^2 + 4z + 5 = 0$ ;
3. а)  $\sqrt[7]{z} - 2i - 2 = 0$ ; б)  $z^3 - i = 0$ ; в)  $z^2 - 4z + 13 = 0$ ;
4. а)  $\sqrt[5]{z} - i + 1 = 0$ ; б)  $z^4 + \sqrt{8} - 8i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 - 8z + 20 = 0$ ;
5. а)  $\sqrt[5]{z} - i\sqrt{12} - 2 = 0$ ; б)  $z^2 - 3 - 3\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 + 6z + 12 = 0$ ;
6. а)  $\sqrt[5]{z} + 2i - 2 = 0$ ; б)  $z^2 - i = 0$ ; в)  $z^2 - 2z + 17 = 0$ ;
7. а)  $\sqrt[4]{z} - \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$ ; б)  $z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 + 4z + 13 = 0$ ;
8. а)  $\sqrt[8]{z} - 3 - 3i = 0$ ; б)  $z^4 + 1 = 0$ ; в)  $z^2 + 8z + 25 = 0$ ;
9. а)  $\sqrt[4]{z} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$ ; б)  $z^4 + 2 = 0$ ; в)  $z^2 - 6z + 13 = 0$ ;
10. а)  $\sqrt[3]{z} + 2 - 2i = 0$ ; б)  $z^2 - 2 - i\sqrt{12} = 0$ ; в)  $z^2 + 2z + 5 = 0$ ;
11. а)  $\sqrt[5]{z} - 2 + i\sqrt{12} = 0$ ; б)  $z^3 + 1 - i = 0$ ; в)  $z^2 + 2z + 10 = 0$ ;
12. а)  $\sqrt[3]{z} - \sqrt{3} - i = 0$ ; б)  $z^3 + 2 - 2i = 0$ ; в)  $z^2 - 4z + 8 = 0$ ;

13. а)  $\sqrt[3]{z} - 1 + i = 0$ ; б)  $z^2 - 8 - 8\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 - 8z + 17 = 0$ ;
14. а)  $\sqrt[5]{z} + 2 + 2i = 0$ ; б)  $z^2 - 3 + 3\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 + 6z + 13 = 0$ ;
15. а)  $\sqrt[4]{z} - \sqrt{8} + \sqrt{8}i = 0$ ; б)  $z^3 - 2i = 0$ ; в)  $z^2 + 8z + 20 = 0$ ;
16. а)  $\sqrt[3]{z} - 3 - 3\sqrt{3}i = 0$ ; б)  $z^2 - 2 + i\sqrt{12} = 0$ ; в)  $z^2 + 2z + 26 = 0$ ;
17. а)  $\sqrt[5]{z} - 3 + 3i = 0$ ; б)  $z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 + 2z + 2 = 0$ ;
18. а)  $\sqrt[3]{z} + 2 - i\sqrt{12} = 0$ ; б)  $z^2 + 3 - 3\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 + 4z + 8 = 0$ ;
19. а)  $\sqrt[3]{z} + i + \sqrt{3} = 0$ ; б)  $z^3 - 5i = 0$ ; в)  $z^2 - 8z + 25 = 0$ ;
20. а)  $\sqrt[4]{z} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$ ; б)  $z^2 - 8 - 8i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 - 6z + 10 = 0$ ;
21. а)  $\sqrt[6]{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0$ ; б)  $z^2 - 6 - 6\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 + 8z + 17 = 0$ ;
22. а)  $\sqrt[3]{z} - 3 + 3\sqrt{3}i = 0$ ; б)  $z^2 + 2 + i\sqrt{12} = 0$ ; в)  $z^2 + 2z + 17 = 0$ ;
23. а)  $\sqrt[5]{z} + \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$ ; б)  $z^2 + 3i = 0$ ; в)  $z^2 - 2z + 26 = 0$ ;
24. а)  $\sqrt[4]{z} + 3 - 3i = 0$ ; б)  $z^2 + 3 + 3\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 - 4z + 5 = 0$ ;
25. а)  $\sqrt[4]{z} + 2i + \sqrt{12} = 0$ ; б)  $z^2 + 2 = 0$ ; в)  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ;
26. а)  $\sqrt[6]{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$ ; б)  $z^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$ ; в)  $z^2 + 4z + 29 = 0$ ;
27. а)  $\sqrt[3]{z} + 3 - 3\sqrt{3}i = 0$ ; б)  $z^2 + 2 - i\sqrt{12} = 0$ ; в)  $z^2 + 6z + 10 = 0$ ;
28. а)  $\sqrt[4]{z} + 3 + 3i = 0$ ; б)  $z^4 + 8 = 0$ ; в)  $z^2 - 6z + 18 = 0$ ;
29. а)  $\sqrt[3]{z} + \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$ ; б)  $z^2 + 1 + i\sqrt{3} = 0$ ; в)  $z^2 - 2z + 5 = 0$ ;
30. а)  $\sqrt[5]{z} - 2i - \sqrt{12} = 0$ ; б)  $z^3 - 8i = 0$ ; в)  $z^2 - 4z + 29 = 0$ ;

### Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання

**Завдання 13.** Знайти похідні функцій, використовуючи означення

похідної.

1. а)  $y = x^2 - 15x$ ;

2. а)  $y = 2x^2 - 14x$ ;

3. а)  $y = 3x^2 - 13x$ ;

4. а)  $y = 4x^2 - 12x$ ;

5. а)  $y = 5x^2 - 11x$ ;

6. а)  $y = 6x^2 - 10x$ ;

7. а)  $y = 7x^2 - 9x$ ;

8. а)  $y = 8x^2 - 8x$ ;

9. а)  $y = 9x^2 - 7x$ ;

10. а)  $y = 10x^2 - 6x$ ;

11. а)  $y = 11x^2 - 5x$ ;

12. а)  $y = 12x^2 - 4x$ ;

13. а)  $y = 13x^2 - 3x$ ;

14. а)  $y = 14x^2 - 2x$ ;

15. а)  $y = 15x^2 - x$ ;

16. а)  $y = x - 15x^2$ ;

17. а)  $y = 2x - 14x^2$ ;

18. а)  $y = 3x - 13x^2$ ;

19. а)  $y = 4x - 12x^2$ ;

20. а)  $y = 5x - 11x^2$ ;

21. а)  $y = 6x - 10x^2$ ;

22. а)  $y = 7x - 9x^2$ ;

23. а)  $y = 8x - 8x^2$ ;

24. а)  $y = 9x - 7x^2$ ;

25. а)  $y = 10x - 6x^2$ ;

26. а)  $y = 11x - 5x^2$ ;

27. а)  $y = 12x - 4x^2$ ;

б)  $y = 8x^3 - 8x$ .

б)  $y = 9x^3 - 7x$ .

б)  $y = 10x^2 - 6x$ .

б)  $y = 11x^3 - 5x$ .

б)  $y = 12x^3 - 4x$ .

б)  $y = 13x^3 - 3x$ .

б)  $y = 14x^3 - 2x$ .

б)  $y = 15x^3 - x$ .

б)  $y = x - 15x^3$ .

б)  $y = 2x - 14x^3$ .

б)  $y = 3x - 13x^3$ .

б)  $y = 4x - 12x^3$ .

б)  $y = 5x - 11x^3$ .

б)  $y = 6x - 10x^3$ .

б)  $y = 7x - 9x^3$ .

б)  $y = 8x - 8x^3$ .

б)  $y = 9x - 7x^3$ .

б)  $y = 10x - 6x^3$ .

б)  $y = 11x - 5x^3$ .

б)  $y = 12x - 4x^3$ .

б)  $y = 13x - 3x^3$ .

б)  $y = 14x - 2x^3$ .

б)  $y = 15x - x^3$ .

б)  $y = x^3 - 15x$ .

б)  $y = 2x^3 - 14x$ .

б)  $y = 3x^3 - 13x$ .

б)  $y = 4x^3 - 12x$ .

28. а)  $y = 13x - 3x^2$ ;

б)  $y = 5x^3 - 11x$ .

29. а)  $y = 14x - 2x^2$ ;

б)  $y = 6x^3 - 10x$ .

30. а)  $y = 15x - x^2$ ;

б)  $y = 7x^3 - 9x$ .

**Завдання 14.** Знайти похідні першого порядку.

1. а)  $y = x^3 - \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3}$ ;

б)  $y = 5^x \ln x + \frac{x^4 + \sin x}{2 - \cos x}$ ;

в)  $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4(x^5 + 1)$ ;

г)  $y = \arcsin^3(x^4 \sin x)$ ;

д)  $x^4 + e^{3y} + \sin(x^2 + y^3) = 0$ ;

е)  $x = \operatorname{tg}^2 t^3, y = 2t^2 - \cos^3 t$ ;

е)  $y = (x^3 + 2)^{\sin x}$ ;

ж)  $y = (x + 5)^{\sqrt{x-3x}}$ .

2. а)  $y = x^7 - \frac{5}{x^3} + 4\sqrt[3]{x^5}$ ;

б)  $y = e^x \log_4 x + \frac{x^6 + 2 \cos x}{x^7 - 3 \sin x}$ ;

в)  $y = 2 \arccos^4 x - 4^{x^2+3}$ ;

г)  $y = \lg(x^4 + x \cos x)$ ;

д)  $\operatorname{ctg}(x + y^4) \ln(x^2 - y^5) = 0$ ;

е)  $x = \sqrt{t} + 2^t, y = f \arccos^4 t$ ;

е)  $y = (x^4 - \sqrt{x})^{\cos 2x}$ ;

ж)  $y = (x^2 - 1)^{x^3+5x}$ .

3. а)  $y = x^8 - \frac{5}{x} + 7\sqrt[6]{x^5}$ ;

б)  $y = \sin x \arccos x - \frac{x^3 + x}{e^x + 4}$ ;

в)  $y = \log_{-3}(x^4 + 2x) - \operatorname{tg}^3(x^2 - 1)$ ;

г)  $y = \operatorname{ctg}^2(x + x^2 \sin x)$ ;

д)  $\sqrt[3]{x^2 + y^5} - e^{3x} + 2 \operatorname{tg} y = 0$ ;

е)  $x = \lg(t^5 - 1), y = t^2 \sin t$ ;

е)  $y = (x^5 - \sqrt[3]{x})^{4x}$ ;

ж)  $y = (2^x - 2\sqrt{x})^{x-4x^4}$ .

4. а)  $y = x^5 - \frac{4}{x^2} + 3\sqrt[4]{x^5}$ ;

б)  $y = x^4 \operatorname{arcctg} x + \frac{\arcsin x}{x - \arccos x}$ ;

в)  $y = e^{x^4+5x} - \log_6^2(x^7 + 3x)$ ;

г)  $y = \operatorname{tg}^9 \frac{1-2x}{3x+1}$ ;

- д)  $y^6 - \operatorname{tg}^3(x + 2y) - 4^x = 0$ ;      е)  $x = \arcsin t^3, y = \sqrt{t} + \sin^7 t$ ;
- е)  $y = (x^6 - 3x)^{\operatorname{ctg} x}$ ;      ж)  $y = (\arcsin x + x)^{\sqrt{x^2 + 3x}}$ .
5. а)  $y = x^3 + \frac{5}{x^7} - 6\sqrt[3]{x^7}$ ;      б)  $y = x^5 \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 - \sin x}$ ;
- в)  $y = 3^{x^2 + x} - \ln^4(x^4 + 1)$ ;      г)  $y = \log_3 \frac{4x + 1}{2 - 5x}$ ;
- д)  $\cos^5 x - \lg y + 5\sqrt{x}y^4 = 0$ ;      е)  $x = \log_2(t + 1), y = \sqrt{t} \cos^2 t$ ;
- е)  $y = (5x^7 + 2x^2)^{\arcsin x}$ ;      ж)  $y = (x + 2x^4)^{\sqrt{2x^2 + 3\sqrt{x}}}$ .
6. а)  $y = x^7 + \frac{9}{x^6} - 7\sqrt[3]{x^4}$ ;      б)  $y = \lg x \operatorname{tg} x + \frac{x^7 - e^x}{x^2 + 3}$ ;
- в)  $y = \operatorname{arcctg}(1 + x^2) + \arccos^3 x^2$ ;      г)  $y = 9^{x^2 + x^3 \sin x}$ ;
- д)  $\lg(x^3 - 3y^2) + 2\sqrt{x} + 3y^5 = 0$ ;      е)  $x = \operatorname{arctg}^2 t, y = e^{3t} - t \operatorname{ctg} t$ ;
- е)  $y = (6x^8 - 5x^4)^{\arccos 2x}$ ;      ж)  $y = (e^{3x} + x)^{\sqrt{x^4 + 6x^2}}$ .
7. а)  $y = x^6 - \frac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^2}$ ;      б)  $y = x^4 \log_3 x - \frac{1 + x^4}{2^x + x^2}$ ;
- в)  $y = e^{x^2 + 9x} - \sqrt{\ln(x^2 + 3)}$ ;      г)  $y = \operatorname{arctg} \frac{7x + 1}{2 - 3x}$ ;
- д)  $\sqrt[5]{y^3} + x^4 \sin y - 4\sqrt{5x + 6y} = 0$ ;      е)  $x = 3^{2t} + 2t^4, y = \ln^2(x + 1)$ ;
- е)  $y = (7x^9 + 4x^3)^{3 \operatorname{arctg} x}$ ;      ж)  $y = (\lg x + 3\sqrt{x})^{\sqrt{x^5 + 3x^2}}$ .
8. а)  $y = x^7 + \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[4]{x^7}$ ;      б)  $y = \sqrt{x} \sin x + \frac{x^2 - 2 \cos x}{x^3 + 1}$ ;
- в)  $y = \operatorname{tg}^4 x + \sqrt{\operatorname{ctg}(x^3 + 1)}$ ;      г)  $y = \log_5 \frac{7x + 2}{x^2 + 5}$ ;



- д)  $5^x - 3\sqrt{y+1} + 2\cos(\sqrt{2-3x}) = 0$ ; е)  $x = \operatorname{arctg}^4 t, y = \sqrt{t} \lg(t-1)$ ;
- е)  $y = (8x^{10} - 7x^7)^{\operatorname{arctg} 4x}$ ; ж)  $y = (x - 2x^3)^{\sqrt[3]{x+x^2}}$ .
9. а)  $y = x^9 - \frac{4}{x^3} + 7\sqrt[6]{x^5}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{x}e^x + \frac{3-5\sin x}{\cos x + x^2}$ ;
- в)  $y = 7^{x^4+3x} - \operatorname{arctg}^7(\sqrt[5]{4})$ ; г)  $y = e^{\sin x + x^5 \cos x}$ ;
- д)  $\operatorname{ctg}(\sqrt{x + \sqrt[3]{y}}) + 5x^5 - e^{4y} = 0$ ; е)  $x = 7^{4t} - t, y = \log_3(t^4 + 4)$ ;
- е)  $y = (9x^{11} + 2x^3)^{5\ln x}$ ; ж)  $y = (\sin 3x + x^2)^{2x - x^3}$ .
10. а)  $y = 3x^2 - \frac{9}{x^5} + 2\sqrt[4]{x}$ ; б)  $y = \sqrt{x^3} \arcsin x - \frac{x^4 + 9x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$ ;
- в)  $y = 4\operatorname{ctg}^3 x + \sqrt{\operatorname{arctg} x^5}$ ; г)  $y = \sin^5 \frac{4x+1}{5-6x}$ ;
- д)  $y^5 \sin^3 x + \sqrt{x^4 + 5y^2} = 0$ ; е)  $x = \arcsin t^3, y = 2\sqrt{1+t^2}$ ;
- е)  $y = (10x^9 - 3x)^{\lg 4x}$ ; ж)  $y = (\cos 5x - 2\sqrt{x})^{x^4+1}$ .
11. а)  $y = 2x^3 + \frac{3}{x^4} - 9\sqrt[5]{x^3}$ ; б)  $y = x^4 e^x - \frac{x^4 + 5}{\lg x + 2}$ ;
- в)  $y = 5^{x^4-7x} + \ln^5(\sqrt[7]{3x})$ ; г)  $y = \cos^3(\sqrt{x}e^x)$ ;
- д)  $9^{3x+4y} + 2\sin^5 x + x\sqrt{y} = 0$ ; е)  $x = 2\sqrt[6]{t} + 3t, y = \lg^2(\sqrt[4]{3})$ ;
- е)  $y = (x^5 - 2\sqrt[3]{x})^{3\sin x}$ ; ж)  $y = (x + 4x)^{2-3x}$ .
12. а)  $y = 5x^5 - \frac{2}{x^6} + 3\sqrt[8]{x^7}$ ; б)  $y = \sqrt{x^9} \operatorname{tg} x + \frac{2x^3 - \lg x}{3+5x}$ ;
- в)  $y = e^{3x+x^4} - \log_4^5(\sqrt{x^6})$ ; г)  $y = \operatorname{tg}^4 \frac{6-7x}{8x-5}$ ;

- д)  $2y^7 + \arccos^3 x - \sqrt{5x+3y} = 0$ ; е)  $x = \log_7(t+1), y = t^4 \sin t$ ;
- е)  $y = (2x^6 + 7x)^{\cos 3x}$ ; ж)  $y = (e^{2x} - \sqrt[3]{x})^{2x^3+x}$ .
13. а)  $y = 3x^7 + \frac{9}{x^8} - 5\sqrt{x^2}$ ; б)  $y = x^5 \arcsin x - \frac{\arctg x}{1+x^2}$ ;
- в)  $y = 2\sqrt{\sin x} + \operatorname{arctg}^6 x^4$ ; г)  $y = \log_3(2 + 2xe^x)$ ;
- д)  $5 \cos x - \sin^3 y - \sqrt[4]{y} = 0$ ; е)  $x = \sqrt{t} \lg t, y = 3 \operatorname{arctg}^3 t$ ;
- е)  $y = (3x^7 - 5x^2)^{4 \operatorname{tg} x}$ ; ж)  $y = (\arccos x + 2)^{\sqrt{x+3x}}$ .
14. а)  $y = 6x^9 - \frac{5}{x} + \sqrt{x^5}$ ; б)  $y = x^8 \sin x - \frac{2x^3 + 3 \sin x}{3x^2 - 7 \cos x}$ ;
- в)  $y = \arccos x^5 - \ln^3(4 + 5)$ ; г)  $y = 3^{5x - \sqrt{x} \sin x}$ ;
- д)  $\arcsin(x^3 - 2y^2) - 3\sqrt{x}y = 0$ ; е)  $x = 3^{2t+1}, y = t^2 \ln^3 t$ ;
- е)  $y = (4x^8 + 3\sqrt[4]{x})^{\operatorname{ctg} 5x}$ ; ж)  $y = (x + \arcsin x)^{2x^6}$ .
15. а)  $y = 5x^2 - \frac{8}{x^3} + \sqrt[3]{x}$ ; б)  $y = x^5 \arctg x + \frac{4x + e^{-x}}{1 + x^5}$ ;
- в)  $y = \sin^5 x - 2 \operatorname{tg}^7(9 + 5)$ ; г)  $y = \log_8 \frac{9x-3}{2+\cos x}$ ;
- д)  $2 \log_5(y^2 + x^3) - 3x + 5\sqrt{y} = 0$ ; е)  $x = \arcsin^4 t, y = 2\sqrt{t} + \cos^8 t$ ;
- е)  $y = (5x^9 - 2x^4)^{\arcsin 9x}$ ; ж)  $y = (\ln x + x^2)^{3x+1}$ .
16. а)  $y = 5x^2 + \frac{4}{x} + \sqrt[3]{x^4}$ ; б)  $y = 7^x \lg x - \frac{x^2 - \cos x}{3 + \sin x}$ ;
- в)  $y = \operatorname{ctg}^8 x + 3 \operatorname{tg}^5(6 + 3)$ ; г)  $y = \arccos^4(5 \cos x)$ ;
- д)  $e^{5y-x} + 3 \operatorname{tg} x + x \ln y = 0$ ; е)  $x = 3t \operatorname{arctg} t^2, y = \lg(4 + 9)$ ;

- е)  $y = (6x^{10} + 2\sqrt[5]{x})^{5\arccos x}$ ; ж)  $y = (\sqrt{x} - 5\lg x)^{x^4 + 3x}$ .
17. а)  $y = x^8 - \frac{6}{x^4} + 5\sqrt[5]{x^3}$ ; б)  $y = 5^x \log_2 x - \frac{x^7 - 3\sin x}{x^8 + 4\cos x}$ ;
- в)  $y = 4\arcsin^6 x - e^{\sin^2 x}$ ; г)  $y = \ln(6 - 4x^2 \sin x)$ ;
- д)  $2x^5 - e^{4y} - 3\cos(4 + 2y^2) = 0$ ; е)  $x = 4\operatorname{ctg}^3 t^2, y = 3t^3 + 2\sin^5 t$ ;
- е)  $y = (7x - 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}$ ; ж)  $y = (\sin 6x + 7)^{4x - 5}$ .
18. а)  $y = x^9 - \frac{7}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^6}$ ; б)  $y = \cos x \arcsin x + \frac{2x^2 - x}{4^x + 1}$ ;
- в)  $y = \log_5(3x^5) + \operatorname{ctg}^4(x^3 + 1)$ ; г)  $y = \operatorname{tg}^5(x^2 - x \cos x)$ ;
- д)  $3\operatorname{tg} t(x^4 + 5y) + \lg(5 - y^2) = 0$ ; е)  $x = \sqrt[3]{t^2} + 3t, y = 2\arcsin^3 t$ ;
- е)  $y = (8x^2 + 3x)^{4\operatorname{arctg} x}$ ; ж)  $y = (x + \cos 3x)^{x^3 - x}$ .
19. а)  $y = x^6 + \frac{5}{x^3} - 4\sqrt[6]{x^7}$ ; б)  $y = 2x^5 \operatorname{arccotg} x - \frac{\arccos x}{\arcsin x - x^2}$ ;
- в)  $y = 3e^{x^5 - 4x} + \log_4^2(8 - 4x)$ ; г)  $y = \operatorname{ctg}^4 \frac{2x + 3}{4 - 5x}$ ;
- д)  $\sqrt[4]{x^5 + y^2} - 2e^{6x} + 3\operatorname{ctg} y = 0$ ; е)  $x = \ln(t^4 + 1), y = t^3 \cos t$ ;
- е)  $y = (9x^3 - 5x)^{4\ln x}$ ; ж)  $y = (\operatorname{tg} x - 8x)^{2x + 7}$ .
20. а)  $y = x^8 - \frac{6}{x^5} + 5\sqrt[4]{x^3}$ ; б)  $y = \ln x \operatorname{ctg} x - \frac{x^5 - 3e^x}{2 + x^4}$ ;
- в)  $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 4) + 2\arcsin^5 x^3$ ; г)  $y = 7^{2x^3 - x^2 \cos x}$ ;
- д)  $6y^5 + 5\operatorname{tg}^2(x + 4y) - 5^x = 0$ ; е)  $x = \operatorname{arccost}^5, y = \sqrt[4]{t} - \sin^6 t$ ;
- е)  $y = (10x^4 - \sqrt[6]{x})^{\lg 5x}$ ; ж)  $y = (x^4 + \operatorname{ctg} x)^{x^5 - \sqrt{x}}$ .

21. а)  $y = x^7 + \frac{2}{x^4} - 8\sqrt{x^5}$ ; б)  $y = 2x^5 \log_6 x + \frac{x^5 + 4}{5x + x^5}$ ;
- в)  $y = 4e^{x^5 - 7x} + 2\sqrt{\lg(x^3 + 4)}$ ; г)  $y = \operatorname{arccctg} \frac{9x - 4}{5 - 8x}$ ;
- д)  $5\sin^4 x + \ln y + 3\sqrt{yx^3} = 0$ ; е)  $x = \log_5(t + 1), y = t^2 \sqrt{\sin t}$ ;
- е)  $y = (x^5 + 6x^3)^{4\sin x}$ ; ж)  $y = (\arccos x - 2\sqrt{x})^{\sqrt{x+x^2}}$ .
22. а)  $y = 4x^8 - \frac{3}{x^5} + 5\sqrt[7]{x^4}$ ; б)  $y = 2\sqrt{x} \cos x - \frac{x^3 + 3\sin x}{2 - x^4}$ ;
- в)  $y = \operatorname{ctg}^4 x - 4\sqrt{\operatorname{tg}(x^4 + 2)}$ ; г)  $y = \log_7 \frac{8x + 4}{x^2 + 6}$ ;
- д)  $2\ln(x^2 + 5y^4) - 3\sqrt{y} + 5x^4 = 0$ ; е)  $x = \operatorname{arccctg}^9 t, y = t^2 \operatorname{tg} t$ ;
- е)  $y = (2x^6 - \sqrt[3]{x})^{\cos 8x}$ ; ж)  $y = (x - 2\arcsin x)^{x^3 - 8x}$ .
23. а)  $y = x^{10} + \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[5]{x^6}$ ; б)  $y = 5\sqrt[3]{x} 3^x - \frac{3\cos x - 5}{\sin x + x^3}$ ;
- в)  $y = 9^{x^5 - 4x} + 2\operatorname{arccctg}^6(x^4 + 7)$ ; г)  $y = e^{2\cos x - x^4 \sin x}$ ;
- д)  $\sqrt[4]{y^5} - 3x^3 + 5\sqrt{3x^3 + 4y^5} = 0$ ; е)  $x = 2^{3t} + 5t^3, y = \lg^3(x^2 + 4)$ ;
- е)  $y = (3x^7 + 7x^3)^{5\operatorname{tg} x}$ ; ж)  $y = (\operatorname{arccctg} x + x^6)^{\sqrt{x+4x}}$ .
24. а)  $y = 4x^3 + \frac{5}{x^6} - 3\sqrt{x^7}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{x^2} \arccos x + \frac{2x^3 + 5x}{x^4 - \operatorname{ctg} x}$ ;
- в)  $y = 5\operatorname{tg}^5 x - 2\sqrt{\operatorname{arccctg} x^4}$ ; г)  $y = \cos^4 \frac{5x - 2}{3 - 4x}$ ;
- д)  $3^x + 2\sqrt{y + 4} - \sin(x^2 + 3y^3) = 0$ ; е)  $x = \operatorname{arccctg}^5 t, y = t^5 \ln(t + 1)$ ;
- е)  $y = (4x^8 - \sqrt[4]{x})^{\operatorname{ctg} 3x}$ ; ж)  $y = (x - 3\operatorname{arccctg} x)^{\sqrt{x^2 + 5x^5}}$ .

25. а)  $y = 3x^4 - \frac{2}{x^5} + 4\sqrt[3]{x^5}$ ; б)  $y = 4x^7 e^x + \frac{x^3 - 4}{\ln x + 2}$ ;
- в)  $y = 3^{x^2 + 5x} - \lg^6(9 - 4x)$ ; г)  $y = \sin^4(\sqrt[3]{x} e^x + 3)$ ;
- д)  $2 \lg(\sqrt{y} - 3\sqrt[3]{x}) - 4x^4 + 2e^{5y} = 0$ ; е)  $x = 4^{7t} + 2t, y = \log_2(t^3 + 8)$ ;
- е)  $y = (5x^9 + 3x^2)^{7 \arcsin x}$ ; ж)  $y = (x + 2\sqrt{x})^{3x^4 + x}$ .
26. а)  $y = 7x^6 + \frac{3}{x^7} - 4\sqrt[4]{x^8}$ ; б)  $y = \sqrt{x^5} \operatorname{ctg} x - \frac{4x^4 + 2 \ln x}{1 - 4x}$ ;
- в)  $y = 5e^{4x + x^5} + 2 \log_8^3(x + x^2)$ ; г)  $y = \operatorname{ctg}^5 \frac{4 - 9x}{5x - 4}$ ;
- д)  $2y^7 \cos^2 x - 5\sqrt{y^4 + x^3} = 0$ ; е)  $x = \arccos t^4, y = 3\sqrt{3 + 4t^2}$ ;
- е)  $y = (6x - \sqrt{x})^{\arccos 9x}$ ; ж)  $y = (3 + e^x)^{x^5 - 3x^4}$ .
27. а)  $y = 6x^8 - \frac{5}{x^9} + 4\sqrt{x^9}$ ; б)  $y = 4x^7 \arccos x + \frac{2 \operatorname{arccot} x}{9 + x^2}$ ;
- в)  $y = 3\sqrt{\cos x} - 4 \operatorname{arctg}^5 x^6$ ; г)  $y = \log_4(4 + 5x^3 e^x)$ ;
- д)  $7^{4x - 3y} + 5 \cos^4 x + \sqrt{x} y^3 = 0$ ; е)  $x = 3\sqrt[5]{t^2} - 4t, y = \ln^3(6 + 2)$ ;
- е)  $y = (7x^2 + 5x)^{4 \operatorname{arctg} x}$ ; ж)  $y = (\lg x + 3)^{2x - \sqrt{x}}$ .
28. а)  $y = 5x^{10} - \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2}$ ; б)  $y = 2x^5 \cos x + \frac{3x^2 - 4 \cos x}{5 \sin x - 7x^3}$ ;
- в)  $y = \arcsin x^4 + 2 \lg^4(3 + 9)$ ; г)  $y = 5^{3x + \sqrt{x} \cos x}$ ;
- д)  $3y^8 + 4 \arcsin^2 x - 5\sqrt{3x + 5y} = 0$ ; е)  $x = 2 \sin t^2, y = \lg^3(2 + 3)$ ;
- е)  $y = (8x^3 + 3\sqrt[3]{x})^{\operatorname{arctg} 5x}$ ; ж)  $y = (x + 2 \lg x)^{x^4 + 4x}$ .
29. а)  $y = 6x^3 + \frac{9}{x^4} - 2\sqrt[3]{x^7}$ ; б)  $y = x^4 \operatorname{arctg} x - \frac{3e^x + 5}{2 - x^2}$ ;

$$в) y = \cos^4 x + 3 \operatorname{ctg}^9 \left( x^7 + 3 \right);$$

$$г) y = \log_5 \frac{2+3x}{1+\sin x};$$

$$д) 3 \sin x + 5 \cos^2 \left( \sqrt[3]{y} \right) - 2 \sqrt[3]{y} = 0;$$

$$е) x = t^2 \ln t, y = 9 \operatorname{arctg}^4 t;$$

$$е) y = (9x^4 - 7x) \lg x;$$

$$ж) y = \left( x^2 + 3 \sin x \right)^{4x^5 + x}.$$

$$30. а) y = 2x^7 - \frac{3}{x^5} - \sqrt[4]{x^5};$$

$$б) y = \sqrt{x} \ln x + \frac{x^2 + 3x}{x^3 - \cos x};$$

$$в) y = \log_5 (x^4 + \sqrt[3]{x} \sin x);$$

$$г) y = \sqrt{\arcsin(x^2 \cos x)};$$

$$д) \arccos \left( x^2 + y^5 \right) + 2\sqrt{y}x^4 = 0;$$

$$е) x = 5^{4t}, y = \sqrt[3]{t^2} \lg^5 t;$$

$$е) y = (10x^5 + \sqrt[8]{x}) \lg^{3x};$$

$$ж) y = \left( \cos 8x + 2x \right)^{8-5x}.$$

**Завдання 15.** Знайти похідні другого порядку.

$$1. а) y = 4e^{5x} - 3 \sin^2 x;$$

$$б) x = 5\sqrt{t} + \cos t, y = \arcsin t.$$

$$2. а) y = 2 \cos^3 x + 5^{4x};$$

$$б) x = 3t^4 - 4 \sin t, y = \arccos t.$$

$$3. а) y = \log_4 \left( x^4 + 1 \right) + 2\sqrt{x};$$

$$б) x = \sqrt[3]{t} - 5 \operatorname{tg} t, y = \operatorname{arctg} t.$$

$$4. а) y = 8x^3 + 3 \ln^4 x;$$

$$б) x = 2 \operatorname{ctg} t + 9, y = \operatorname{arctg} t.$$

$$5. а) y = 3 \arcsin \left( x^4 + 5 \right) e^{2x};$$

$$б) x = 2 \operatorname{tg} t, y = 4t^3 + 3^{4t}.$$

$$6. а) y = 5 \arccos^4 x + 3 \sqrt[3]{x^2};$$

$$б) x = \log_5 t, y = \sqrt{t} + 2e^{3t}.$$

$$7. а) y = 6 \operatorname{arctg} \left( -x^3 \right) + 5x;$$

$$б) x = 4 \ln t, y = 2 \sin t + \sqrt{t}.$$

$$8. а) y = 4x^4 - 3 \operatorname{arctg}^5 x;$$

$$б) x = 4^{\sin t}, y = t^5 + 5 \sqrt[3]{t}.$$

$$9. а) y = e^{\cos t} - 5x^7;$$

$$б) x = 3 \lg t, y = 2 \operatorname{tg} t + 3t^4.$$

$$10. а) y = 4 \sqrt[5]{x} - 5 \operatorname{tg} x;$$

$$б) x = \arcsin t, y = 9t^2 + 2^t.$$

$$11. а) y = \log_5 \left( x^3 + 5 \right) - 4x^5;$$

$$б) x = \arccos t, y = 3t^4 - 2 \cos t.$$



**Завдання 16.** Знайти диференціал функції і наближено обчислити її значення у заданій точці  $x$ .

$$1. y = \arcsin(x^2 - 1), x = 0,96.$$

$$2. y = \sqrt{x^3 + 1}, x = 2,05.$$

$$3. y = \arccos(-x^2), x = 2,94.$$

$$4. y = \sqrt[3]{x^2 + 2}, x = 5,05.$$

$$5. y = \arctg(x^2 - 26), x = 2,96.$$

$$6. y = \sqrt[4]{x^2 + 7}, x = 3,03.$$

$$7. y = \text{arcctg}(7 - x^2), x = 3,98.$$

$$8. y = \ln(x^3 - 7), x = 2,06.$$

$$9. y = \arcsin(x^2 - 1), x = 0,96.$$

$$10. y = \text{arctg}(x^5 + 5x), x = 0,04.$$

$$11. y = e^{x^2 - 5x}, x = 4,97.$$

$$12. y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right), x = 0,02.$$

$$13. y = e^{\sin 2x}, x = -0,06.$$

$$14. y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), x = 0,05.$$

$$15. y = \text{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), x = -0,04.$$

$$16. y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right), x = 0,03.$$

$$17. y = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 10}, x = 2,98.$$

$$18. y = \arcsin(x^4 - x^3), x = 1,06.$$

$$19. y = \sqrt[3]{3x^3 + 5x}, x = 0,95.$$

$$20. y = \arccos(x^3 - x^2), x = 1,04.$$

$$21. y = \sqrt[4]{3x^2 + x + 1}, x = 4,97.$$

$$22. y = \text{arctg}(x^3 - 3x), x = 1,02.$$

$$23. y = e^{x^4 - 5x}, x = -0,06.$$

$$24. y = \text{arcctg}(x^4 - 15), x = 2,05.$$

$$25. y = \text{arctg}(x^2 - 3x), x = 2,94.$$

$$26. y = \ln(x^2 - 15), x = 4,05.$$

$$27. y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right), x = -0,04.$$

$$28. y = \text{arcctg}(x^5 - x^4), x = 1,03.$$

$$29. y = e^{\sin 5x}, x = -0,02.$$

$$30. y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), x = 0,06.$$



### Деякі застосування похідної

**Завдання 17.** Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = f(x)$

в точці з абсцисою  $x_0$ .

1.  $y = x^3 - 2x, x_0 = 1.$

2.  $y = \sqrt{x^3 + 2x + 4}, x_0 = 0.$

3.  $y = \sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{6}.$

4.  $y = \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{3}.$

5.  $y = e^{x^2 + 3x}, x_0 = 0.$

6.  $y = \lg(x^2 + 2x + 10), x_0 = 0.$

7.  $y = (x - 3)^5, x_0 = 2.$

8.  $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}, x_0 = 1.$

9.  $y = \operatorname{tg}^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$

10.  $y = \operatorname{ctg}^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$

11.  $y = 2^{x^2 + x}, x_0 = 1.$

12.  $y = \log_4(x^2 + 3x + 4), x_0 = 0.$

13.  $y = (x - 7)^8, x_0 = 3.$

14.  $y = \sqrt[4]{2x^2 - x + 1}, x_0 = 3.$

15.  $y = \operatorname{arctg}^2 x, x_0 = 1.$

16.  $y = \operatorname{arctg}^2 x, x_0 = 1.$

17.  $y = \arcsin^2 x, x_0 = \frac{1}{2}.$

18.  $y = \arccos^2 x, x_0 = \frac{1}{2}.$

19.  $y = (x - 4)^8, x_0 = 1.$

20.  $y = \sqrt{3x^3 + 1}, x_0 = 2.$

21.  $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), x_0 = 0.$

22.  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), x_0 = 0.$

23.  $y = e^{x^3 - 2x + 1}, x_0 = 1.$

24.  $y = \log_2(x^2 - 2x - 1), x_0 = 3.$

25.  $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), x_0 = 0.$

26.  $y = \operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right), x_0 = 0.$

27.  $y = \sqrt[3]{3x^2 + x + 13}, x_0 = 2.$

28.  $y = \sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1}, x_0 = 4.$

29.  $y = (x - 3)^5, x_0 = 1.$

30.  $y = e^{2x^3 - 3x - 5}, x_0 = 1.$

**Завдання 18.** Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2 + 5x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{\sin^2 3x}$ .

2. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x^2 + 3x)$ .

3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(7x+1)}{x^2 + 3x + 5}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}$ .

4. а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos^3 x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) \operatorname{ctg} x$ .

5. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sqrt{2x^2 + 7x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x^2})$ .

6. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(4x + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^3 + 8x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - \cos x - 1}{\cos^2 x}$ .

7. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^3 x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\arctg x^2}$ .

8. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x - \sin 2x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)e^{-3x}$ .

9. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{x-2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x} - \frac{3}{\cos x - 1} \right)$ .

10. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg(4x-3)}{x-1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + x - \pi}{(x - \pi)^2}$ .

11. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x+1}}{2x+5}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{\sin \pi x + \pi x - \pi}$ .

12. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{4x+3}}{9x+7}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x^2} - \frac{3}{\ln(x+1)} \right)$ .

$$13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x^2 + 5x};$$

$$14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 - 3x};$$

$$15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - 1}{x - \frac{\pi}{2}};$$

$$16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x};$$

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 4x};$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}};$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x}{\sin x + 5x};$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\ln(3x + 1)};$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{3x}}{\arcsin 4x};$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{5^x - 5};$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(3x^2 - 2)};$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\lg(x^2 - 3)};$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x + 3}{e^{5x} + 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2 + \sin x - x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1) - 3x}{\sin^2 x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x} + 3x}{2x + e^{5x}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 3x \ln 4 - 1}{\sin^2 5x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{e^{4x} - 4x - 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x - 4x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \lg(5x^2 + x).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln\left(1 - \frac{\pi}{2} + x\right) \operatorname{tg} x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( 3 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \pi/2} \right).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{\sin^2 x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x \operatorname{arctg} x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\cos x} - \cos x - 1}{\cos^2 x}.$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 7x}{5x + 3^x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin x} - \frac{5}{x^2} \right).$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2^{3x}}{\sin 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{\sin 6x - 6x}.$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2^x - 8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x + x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2 x - 1}{x^2 - 8x + 12};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4}{\ln(x+1)} - \frac{3}{x^3} \right).$$

$$30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{\arcsin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sin x + x^3 - x}.$$

**Завдання 19.** Дослідити функцію на інтервали монотонності та точки екстремуму.

$$1. y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x.$$

$$2. y = x^3 - 5x^2 - 8x.$$

$$3. y = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x.$$

$$4. y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x.$$

$$5. y = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 10x.$$

$$6. y = -3x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 4x.$$

$$7. y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 15x.$$

$$8. y = x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 4x.$$

$$9. y = \frac{1}{3}x^3 - 16x + 5.$$

$$10. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2.$$

$$11. y = -x^3 - x^2 + 8x.$$

$$12. y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 3x.$$

$$13. y = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x.$$

$$14. y = -2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

$$15. y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x.$$

$$16. y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x.$$

$$17. y = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 12x.$$

$$18. y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

$$19. y = 3x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 10x.$$

$$21. y = -\frac{5}{2}x^3 - x^2 + 3x.$$

$$23. y = -\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x.$$

$$25. y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 12x.$$

$$27. y = 8x^3 + x^2 - 2x.$$

$$29. y = -x^3 - 5x^2 + 8x.$$

$$20. y = -2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 2x.$$

$$22. y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10x.$$

$$24. y = -\frac{5}{3}x^3 - 6x^2 + 9x.$$

$$26. y = 5x^3 - 2x^2 + 3x.$$

$$28. y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x.$$

$$30. y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x.$$

### Невизначений інтеграл

**Завдання 20.** Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

$$1. \text{ а) } \int \left( \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 5^x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( x^5 - \frac{3}{x^4} - 4x\sqrt{x} \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \ln(x+1) + 2e^{5x} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \frac{2}{4+9x^2} - (-3x)^5 \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 3x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\text{е) } \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$2. \text{ а) } \int \left( \frac{4}{x^2-16} + \frac{3}{\sin^2 x} - 3^x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( x^3 - x^2 \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^7} \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \cos(-2x) + (x+1)^9 \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} + 3e^{2x+1} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 4x^3 \sin x^4 dx;$$

$$\text{е) } \int \left( x^2 e^{x^3+1} + \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx.$$

$$3. \text{ а) } \int \left( \frac{2}{x^2+3} - \frac{5}{\sin^2 x} + \sin x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( (\sqrt{x})^3 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

- в)  $\int (\cos(-3x) - 2^{5x}) dx;$
- д)  $\int 5x^4 \sin x^5 dx;$
4. а)  $\int \left( \frac{5}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 7^x \right) dx;$
- в)  $\int \left( e^{4x+1} + \frac{3}{\cos^2 3x} \right) dx;$
- д)  $\int 7x^6 (x^7)^3 dx;$
5. а)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\cos^2 x} + e^x \right) dx;$
- в)  $\int (x+5x)^9 - 4^{1-2x} dx;$
- д)  $\int 6x^5 \sin(x^6+5) dx;$
6. а)  $\int \left( \frac{2}{x} - 3\sin x + 2 \cdot 5^x \right) dx;$
- в)  $\int \left( e^{3x-1} + \frac{3}{\sin^2(-2x)} \right) dx;$
- д)  $\int 3x^2 e^{x^3} dx;$
7. а)  $\int \left( 2\cos x - \frac{2}{\sin^2 x} + 4e^x \right) dx;$
- г)  $\int \left( \frac{2}{9+4x^2} - \frac{5}{\cos^2 3x} \right) dx;$
- е)  $\int \left( x(x^2+2)^8 - \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} \right) dx.$
- б)  $\int \left( 3x^2 - x^4 \sqrt{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx;$
- г)  $\int \left( \frac{2}{\sqrt{2-9x^2}} + \sin(1-5x) \right) dx;$
- е)  $\int \left( x^2 \cos x^3 + \frac{3}{x \ln^5 x} \right) dx.$
- б)  $\int \left( (x + \sqrt[3]{x})^2 + \frac{2}{x^5} \right) dx;$
- г)  $\int \left( \frac{2}{1+9x^2} - \frac{3}{2-4x} \right) dx;$
- е)  $\int \left( \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{\sin^2 x} \right) dx.$
- б)  $\int \left( x^3 - \sqrt{x^3} + \frac{4}{x^9} \right) dx;$
- г)  $\int \left( \frac{3}{5+16x^2} - \cos(x+3) \right) dx;$
- е)  $\int \left( \frac{x}{5x^2-4} + \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) dx.$
- б)  $\int \left( (x - \sqrt{x})^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx;$

$$b) \int \left( \frac{4}{3x+2} - \sin(-4x) \right) dx;$$

$$r) \int \left( \frac{2}{\sqrt{9x^2+5}} - 4^{1-3x} \right) dx;$$

$$d) \int (5x^4 + x^5) dx;$$

$$e) \int \left( \frac{3}{x \ln^5 x} + \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \right) dx.$$

$$8. a) \int \left( \frac{1}{4+x^2} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx;$$

$$b) \int \left( (x^2+1)^3 - \frac{4}{x^5} \right) dx;$$

$$b) \int (\ln(x+1) - 3(-4x)^8) dx;$$

$$r) \int \left( \frac{5}{4x^2-9} - 3^{2-5x} \right) dx;$$

$$d) \int 7x^6 \cos x^7 dx;$$

$$e) \int \left( \frac{x^4}{\sin^2(2x^5)} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \right) dx.$$

$$9. a) \int \left( 3 \sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx;$$

$$b) \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx;$$

$$b) \int \left( \frac{2}{\cos^2(x+1)} - \frac{3}{1-5x} \right) dx;$$

$$r) \int \left( \frac{3}{\sqrt{1-25x^2}} + (4x)^4 \right) dx;$$

$$d) \int \frac{5x^4}{3+x^2} dx;$$

$$e) \int \left( x^3 \cos(2x^4) + \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$10. a) \int \left( 5 \cdot 3^x - 2 \cos x + \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx;$$

$$b) \int \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right)^3 dx;$$

$$b) \int \left( e^{2x+3} - \frac{3}{\sin^2(-2x)} \right) dx;$$

$$r) \int \left( 3 \sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx;$$

$$d) \int 9x^8 (x^9)^3 dx;$$

$$e) \int \left( \frac{2^x}{3+2^x} + \frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)} \right) dx.$$

$$11. a) \int \left( \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x} - 4^x \right) dx;$$

$$b) \int \left( \frac{5}{x^3} - x^6 + 2x^2 \cdot \sqrt{x} \right) dx;$$

|   |   |
|---|---|
| в) $\int (\cos(x-3) + 3e^{3x}) dx;$   | г) $\int \left( \frac{5}{4x^2+9} + (x-3)^4 \right) dx;$                                 |
| д) $\int 4x^3 e^x dx;$  | е) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$   |
| 12. а) $\int \left( 5^x - \frac{2}{x^4-4} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx;$         | б) $\int \left( x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 + \frac{3}{x^6} \right) dx;$                    |
| в) $\int (e^{-7x} + 3 \sin(x+4x)) dx;$  | г) $\int \left( e^{2+5x} - \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx;$                         |
| д) $\int 5x^4 \cos x^5 dx;$   | е) $\int \left( x^3 e^{x^4} - \frac{2}{x \ln^4 x} \right) dx.$                          |
| 13. а) $\int \left( \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{5+x^2} - 5 \sin x \right) dx;$    | б) $\int \left( (x - \sqrt[3]{x})^2 - \frac{3}{x^2} \right) dx;$                        |
| в) $\int (e^{2x} - 3 \sin(x-5x)) dx;$   | г) $\int \left( \frac{3}{\sin^2 4x} + \frac{7}{4+9x^2} \right) dx;$                     |
| д) $\int 6x^5 \cos x^6 dx;$   | е) $\int \left( \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + x^2 (x^3 + 5)^9 \right) dx.$ |
| 14. а) $\int \left( 5^x + \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx;$  | б) $\int \left( x^5 \sqrt{x} + 5x^3 - \frac{3}{x^7} \right) dx;$                        |
| в) $\int \left( \frac{4}{\sin^2 2x} - 5e^{2-3x} \right) dx;$                        | г) $\int \left( \frac{5}{\sqrt{3-4x^2}} + 3 \cos 6x \right) dx;$                        |
| д) $\int 8x^7 (x^8) dx;$  | е) $\int \left( \frac{2}{x \ln^3 x} + 3x^3 \sin x^4 \right) dx.$                        |
| 15. а) $\int \left( 3e^x + \frac{4}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sqrt{x^2-9}} \right) dx;$ | б) $\int \left( \frac{1}{x^6} - (x + \sqrt{x})^3 \right) dx;$                           |



$$\begin{array}{ll}
\text{в) } \int (2^{-3x} + e^{-x}) dx; & \text{г) } \int \left( \frac{5}{3-5x} + \frac{4}{1+16x^2} \right) dx; \\
\text{д) } \int 7x^6 \cos(x^7) dx; & \text{е) } \int \left( \frac{2 \operatorname{ctg}^5 x}{\sin^2 x} - \frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}} \right) dx. \\
16. \text{ а) } \int \left( 5 \cos x + \frac{3}{x} - 5 \cdot 2^x \right) dx; & \text{б) } \int \left( \sqrt[4]{x^3} + 3x^4 - \frac{2}{x^7} \right) dx; \\
\text{в) } \int \left( \frac{2}{\cos^2(4x)} + e^{2+5x} \right) dx; & \text{г) } \int \left( 2 \sin(8x) - \frac{5}{3+9x^2} \right) dx; \\
\text{д) } \int 5x^3 e^{x^4} dx; & \text{е) } \int \left( \frac{x^4}{3x^5+1} + \frac{e^x}{e^{2x}-4} \right) dx. \\
17. \text{ а) } \int \left( 5e^x - 3 \sin x + \frac{6}{\cos^2 x} \right) dx; & \text{б) } \int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{-\sqrt{x}} \right) dx; \\
\text{в) } \int \left( 2 \cos(5x) - \frac{5}{3+4x} \right) dx; & \text{г) } \int \left( 5^{6x-5} + \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}} \right) dx; \\
\text{д) } \int 6x^5 (x^6)^9 dx; & \text{е) } \int \left( \frac{x^3}{\sin^2 x^4} - \frac{5}{x \ln^3 x} \right) dx. \\
18. \text{ а) } \int \left( \frac{3}{x} + 2e^x - \frac{5}{9+x^2} \right) dx; & \text{б) } \int \left( \frac{5}{x^6} - (x^3-2)^2 \right) dx; \\
\text{в) } \int (e^{3x} + \cos(5x)) dx; & \text{г) } \int \left( 5^{5-2x} + \frac{3}{9x^2-25} \right) dx; \\
\text{д) } \int 8x^7 (x^8)^3 dx; & \text{е) } \int \left( \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{x^5}{\cos^2(-2x^6)} \right) dx. \\
19. \text{ а) } \int \left( 5^x - 4 \cos x + \frac{6}{x^2+4} \right) dx; & \text{б) } \int \left( \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} \right)^2 dx;
\end{array}$$

$$\text{в) } \int \left( \frac{5}{2-3x} + \frac{4}{\sin^2(4+5x)} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \sqrt{1-9x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{6x^5}{4+x^6} dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{5 \operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} - 2x^4 \sin x^5 \right) dx.$$

$$20. \text{ а) } \int \left( 3 \sin x + \frac{5}{\sqrt{4-x^2}} + 3 \cdot 6^x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x} \right)^3 dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \frac{2}{\cos^2(4+4x)} + e^{2-5x} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \frac{3}{\sqrt{2+9x}} - \frac{5}{\sqrt{16x^2+11}} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 10x^9 \sqrt[4]{x+10} dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{x^4}{\sin^2(5+3)} \cdot \frac{5 \cdot 3^x}{3^{2x}+1} \right) dx.$$

$$21. \text{ а) } \int \left( 2^x + \frac{3}{9+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{5}{x^6} - x^4 \sqrt{x} + 2x^3 \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \frac{3}{2+5x} - 2 \sin(6x) \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \sqrt{7x} + \frac{3}{9-16x^2} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 5x^4 3^x dx;$$

$$\text{е) } \int \left( x^3 \sqrt[5]{x^4} - \cos^5 x \sin x \right) dx.$$

$$22. \text{ а) } \int \left( \frac{5}{x^2+36} - 4^x + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{3}{x^2} - x^3 \sqrt{x} + 2x^4 \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \sqrt[8]{-5x} + 2 \cos 3x \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( x^4 \cdot 5^{x^5} + \frac{6x^3}{2+x^4} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 7x^6 \sin x^7 dx;$$

$$\text{е) } \int \left( x^7 e^{x^8+2} - \frac{2}{x \ln^7 x} \right) dx.$$

$$23. \text{ а) } \int \left( 3 \sin x + \frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{3}{x^9} - \sqrt[3]{x} \right) dx;$$

$$\begin{array}{ll}
\text{в)} \int (6^x - 2 \cos(-5x)) dx; & \text{г)} \int \left( \frac{3}{\cos^2 4x} + \frac{5}{4x^2 - 25} \right) dx; \\
\text{д)} \int 8x^7 \sin x^8 dx; & \text{е)} \int \left( 4x^5 e^{1+x^6} - \frac{3}{\operatorname{tg}^5 x \cos^2 x} \right) dx. \\
24. \text{ а)} \int \left( \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}} + 5^x + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx; & \text{б)} \int \left( \frac{1}{x^6} - x\sqrt{x} + 5x^4 \right) dx; \\
\text{в)} \int \left( \frac{3}{\cos^2 5x} - 2^{3x+2} \right) dx; & \text{г)} \int \left( \frac{5}{\sqrt{4x^2 + 11}} - 3 \sin 2x \right) dx; \\
\text{д)} \int 9x^8 (-2x^9)^4 dx; & \text{е)} \int \left( x^6 \cos(x^7 - 3) + \frac{5 \ln^5 x}{x} \right) dx. \\
25. \text{ а)} \int \left( 3e^x + \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx; & \text{б)} \int \left( \frac{3}{x^4} + (-\sqrt{x})^2 \right) dx; \\
\text{в)} \int (3^{-5x} + 5 \cos 3x) dx; & \text{г)} \int \left( \frac{3}{4x^2 - 1} + \frac{2}{5 + 6x} \right) dx; \\
\text{д)} \int 8x^7 \sin(-x^8) dx; & \text{е)} \int \left( \frac{x^5}{\sqrt{5 + 3x^6}} - \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{\sin^2 x} \right) dx. \\
26. \text{ а)} \int \left( 3 \cdot 4^x - 5 \sin x + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx; & \text{б)} \int \left( \sqrt[4]{x} + 2x^3 - \frac{5}{x^5} \right) dx; \\
\text{в)} \int \left( 3^{2x+1} - \frac{5}{\sin^2(x-2)} \right) dx; & \text{г)} \int \left( 2 \cos(x+2x) - \frac{4}{3 + 4x^2} \right) dx; \\
\text{д)} \int 5x^4 e^{x^5} dx; & \text{е)} \int \left( \frac{4^x}{2 + 4^{2x}} - \frac{5x^3}{2x^4 - 7} \right) dx. \\
27. \text{ а)} \int \left( \frac{5}{\sin^2 x} + 3 \cdot 6^x - 4 \cos x \right) dx; & \text{б)} \int \left( \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - (x + \sqrt[3]{x})^3 \right) dx;
\end{array}$$

$$\text{в) } \int \left( 2 \sin(x+1) - \frac{5}{3x+2} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( 5^{2x-3} - \frac{4}{\sqrt{25x^2+3}} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 8x^7 (8-2^x) dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{2x^4}{\cos^2 x^5} - \frac{5 \ln^3 x}{x} \right) dx.$$

$$28. \text{ а) } \int \left( \frac{3}{x} - 5 \cdot 3^x + \frac{4}{x^2+16} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{3}{x^8} - 2(x^4+2)^3 \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left( (x-3x)^7 - 5 \sin(x-5x) \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( 5^{4x-7} + \frac{3}{16x^2+9} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 10x^9 \cos x^{10} dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{3}{\operatorname{tg}^5 x \cos^2 x} - \frac{2x^6}{\sin^2 x^7} \right) dx.$$

$$29. \text{ а) } \int \left( 5^x - \frac{3}{x^2-36} - 5 \sin x \right) dx; \quad \text{б) } \int \left( \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} \right)^2 dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \frac{4}{3x+5} - \frac{3}{\cos^2(x-1)} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( (x-5x)^7 + \frac{2}{\sqrt{36x^2+5}} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{9x^8}{2+x^9} dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{3 \operatorname{tg}^7 x}{\sin^2 x} - 2x^5 \cos x^6 \right) dx.$$

$$30. \text{ а) } \int \left( 5 \cos x - 4 \cdot 8^x + \frac{2}{\sqrt{x^2-3}} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left( \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x} \right)^2 dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \frac{5}{\sin^2(x+1)} - 5^{6x+1} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left( \frac{4}{\sqrt{2-9x}} + \frac{3}{\sqrt{4+25x^2}} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 4x^3 (x-3x^4)^7 dx;$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{x^5}{\cos^2 x^6} + \frac{3^x}{3^{2x}-49} \right) dx.$$

**Завдання 21.** Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

1. а)  $\int x e^{2x} dx$  ;

б)  $\int (x^2 + 1) \cos x dx$  .

2. а)  $\int x \sin 3x dx$  ;

б)  $\int x^2 e^{2x} dx$  .

3. а)  $\int (2x + 1) \cos x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cdot 3^x dx$  .

4. а)  $\int x \cdot 2^x dx$  ;

б)  $\int x^2 \sin 3x dx$  .

5. а)  $\int (1 - 3x) \cdot 4^x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cos 2x dx$  .

6. а)  $\int x^3 \ln 2x dx$  ;

б)  $\int (1 + x^2) e^x dx$  .

7. а)  $\int x^2 \log_3 x dx$  ;

б)  $\int (2 - x^2) \sin x dx$  .

8. а)  $\int x^5 \ln 3x dx$  ;

б)  $\int (4 + x^2) \cos x dx$  .

9. а)  $\int x \cdot 5^{2x} dx$  ;

б)  $\int x^2 \sin 5x dx$  .

10. а)  $\int (1 + 3x) \cos 2x dx$  ;

б)  $\int x^2 e^{1-4x} dx$  .

11. а)  $\int (2 - 5x) \sin x dx$  ;

б)  $\int (2 + 3x^2) e^x dx$  .

12. а)  $\int x e^{5x} dx$  ;

б)  $\int (1 - 2x^2) \cos 2x dx$  .

13. а)  $\int (2 + 3x) \sin 2x dx$  ;

б)  $\int (5 - x^2) e^{3x} dx$  .

14. а)  $\int (1 - 2x) \cos 4x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cdot 4^x dx$  .

15. а)  $\int x \cdot 7^x dx$  ;

б)  $\int (5 + x^2) \sin 4x dx$  .

16. a)  $\int (2 + 5x) \cdot 3^x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cos 5x dx$  .

17. a)  $\int x^2 \ln 3x dx$  ;

б)  $\int (x^2 + 5)e^{3x} dx$  .

18. a)  $\int x^6 \log_4 2x dx$  ;

б)  $\int (3 + x^2) \sin 2x dx$  .

19. a)  $\int x^6 \ln 2x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cos 6x dx$  .

20. a)  $\int x \cdot 7^{2x} dx$  ;

б)  $\int x^2 \sin 7x dx$  .

21. a)  $\int (2 + 4x) \cos 3x dx$  ;

б)  $\int (1 - 4x^2)e^x dx$  .

22. a)  $\int (2 - 3x) \sin 5x dx$  ;

б)  $\int (1 + 4x^2)e^{2x} dx$  .

23. a)  $\int (5 + 2x) \cdot 6^x dx$  ;

б)  $\int (2 + x^2) \sin 3x dx$  .

24. a)  $\int (3 - 2x) \cos 4x dx$  ;

б)  $\int (1 + 2x^2)e^{4x} dx$  .

25. a)  $\int (2 + x) \sin 4x dx$  ;

б)  $\int x^2 \cdot 5^x dx$  .

26. a)  $\int x \cdot 9^x dx$  ;

б)  $\int (1 - 7x^2) \cos 2x dx$  .

27. a)  $\int (3 + 4x) \cdot 5^x dx$  ;

б)  $\int (2 + 3x^2) \sin 2x dx$  .

28. a)  $\int x^{10} \ln 2x dx$  ;

б)  $\int (x^2 + 3)e^{4x} dx$  .

29. a)  $\int x^2 \lg x dx$  ;

б)  $\int (4 - 5x^2) \cos 3x dx$  .

30. a)  $\int x^7 \ln 5x dx$  ;

б)  $\int x^2 \sin 6x dx$  .

**Завдання 22.** Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен.

1. а)  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$  ;

б)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2 - 2x - 4}} dx$  .

2. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 8x + 20}}$  ;

б)  $\int \frac{4x+3}{x^2 - 3x + 4} dx$  .

3. а)  $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 2}$  ;

б)  $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x^2 - 12x + 10}} dx$  .

4. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 25}}$  ;

б)  $\int \frac{2x-3}{x^2 - 10x + 26} dx$  .

5. а)  $\int \frac{dx}{5x^2 + 10x + 1}$  ;

б)  $\int \frac{3x-2}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx$  .

6. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 12x + 27}}$  ;

б)  $\int \frac{5x-4}{2x^2 - 12x + 20} dx$  .

7. а)  $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 2}$  ;

б)  $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2 + 8x + 32}} dx$  .

8. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$  ;

б)  $\int \frac{3x-2}{4x^2 + 24x - 3} dx$  .

9. а)  $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$  ;

б)  $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} dx$  .

10. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}$  ;

б)  $\int \frac{9x+1}{3x^2 - 6x + 2} dx$  .

11. а)  $\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 3}$  ;

б)  $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$  .

12. а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 14x + 40}}$  ;

б)  $\int \frac{5x+2}{2x^2 - 12x + 3} dx$  .

$$13. \text{ a) } \int \frac{dx}{3x^2 + 42x + 1};$$

$$\text{б) } \int \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 + 10x + 29}} dx.$$

$$14. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 12x + 32}};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x + 1}{4x^2 + 16x + 3} dx.$$

$$15. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5};$$

$$\text{б) } \int \frac{9x - 2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx.$$

$$16. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 24x + 1}};$$

$$\text{б) } \int \frac{7x - 4}{x^2 - 5x + 2} dx.$$

$$17. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{б) } \int \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 4}} dx.$$

$$18. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 16}};$$

$$\text{б) } \int \frac{3x + 4}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

$$19. \text{ a) } \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 1};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x - 3}{\sqrt{4x^2 + 12x + 8}} dx.$$

$$20. \text{ a) } \int \frac{dx}{5x^2 - 10x - 1};$$

$$\text{б) } \int \frac{2x - 3}{\sqrt{-6x - x^2 - 5}} dx.$$

$$21. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x - 5}{2x^2 + 12x + 10} dx.$$

$$22. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 1};$$

$$\text{б) } \int \frac{5x + 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} dx.$$

$$23. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 17}};$$

$$\text{б) } \int \frac{2x - 3}{4x^2 - 24x - 2} dx.$$

$$24. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 3};$$

$$\text{б) } \int \frac{5x - 6}{\sqrt{x^2 + 10x + 34}} dx.$$

$$25. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}};$$

$$\text{б) } \int \frac{9x - 2}{3x^2 - 18x - 1} dx.$$



$$26. \text{ a) } \int \frac{dx}{5x^2 + 10x + 2};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx.$$

$$27. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}};$$

$$\text{б) } \int \frac{2x+5}{2x^2+12x+1} dx.$$

$$28. \text{ a) } \int \frac{dx}{3x^2-42x-1};$$

$$\text{б) } \int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx.$$

$$29. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+65}};$$

$$\text{б) } \int \frac{x+4}{4x^2-16x+1} dx.$$

$$30. \text{ a) } \int \frac{dx}{x^2-4x+5};$$

$$\text{б) } \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-18x+80}} dx.$$

### Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла

**Завдання 23.** Обчислити визначені інтеграли.

$$1. \text{ a) } \int_0^1 x^6(1+x^7)^5 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 2^x dx;$$

$$2. \text{ a) } \int_0^1 \left( \frac{2}{1+9x^2} + \frac{3}{2-4x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx;$$

$$3. \text{ a) } \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^3 \ln 2x dx;$$

$$4. \text{ a) } \int_0^1 x^4 (x^5-1) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} (x-x^2) \sin x dx;$$

$$5. \text{ a) } \int_0^1 5^{2x+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^5 \ln 3x dx;$$

$$6. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^4}{3+x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 5^{2x} dx;$$

$$7. \text{ a) } \int_0^1 x^8 (1+x^9)^5 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx;$$

$$8. \text{ a) } \int_0^1 x^3 e^x dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (2-5x) \sin x dx;$$

$$9. \text{ a) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x e^{5x} dx;$$

$$10. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{1+2x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} (1+3x) \sin 2x dx;$$

$$11. \text{ a) } \int_0^1 x^7 (x^8 - 1) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 \cdot 4^x dx;$$

$$12. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} x \sin 4x dx;$$

$$13. \text{ a) } \int_0^1 x^3 e^{x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/5} x \cos 5x dx;$$

$$14. \text{ a) } \int_0^1 x^5 (x^6 - 1) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 x^2 \ln 3x dx;$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^3 \log_4 2x dx;$$

$$16. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^5}{4+x^6} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} x \cos 6x dx;$$

$$17. \text{ a) } \int_0^1 x^9 (x^{10})^4 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 7^{2x} dx;$$

$$18. \text{ a) } \int_0^1 x^4 \cdot 3^{x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (3x) \cos 3x dx;$$

$$19. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt{4+5x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{3x} dx;$$

$$20. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (x) \sin 3x dx;$$

$$21. \text{ a) } \int_0^1 x^8 (x^9 - 1)^7 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (2x) e^{4x} dx;$$

$$22. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt[4]{1-x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (x) \sin 3x dx;$$

$$23. \text{ a) } \int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (-7x) \cos 2x dx;$$

$$24. \text{ a) } \int_0^1 x^7 (x^8 - 1)^3 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (x) 5^x dx;$$

$$25. \text{ a) } \int_0^{\pi/5} \sin 5x dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^9 \ln 2x dx;$$

$$26. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^8}{2+x^9} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (-5x) \cos 3x dx;$$

$$27. \text{ a) } \int_0^1 x^3 (-3x^4)^3 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} x \sin 6x dx;$$

$$28. \text{ a) } \int_0^1 x^2 \cdot 2^{x^3} dx ;$$

$$\text{ б) } \int_0^{\pi/2} (x+1) \cos x dx ;$$

$$29. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} ;$$

$$\text{ б) } \int_0^1 (1+3x) e^{2x} dx ;$$

$$30. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}} ;$$

$$\text{ б) } \int_1^2 x^2 \ln 3x dx ;$$

**Завдання 24.** Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

$$1. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0 ;$$

$$\text{ б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} .$$

$$2. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = \sqrt{-x}, y = 1 ;$$

$$\text{ б) } \rho = 2 \cos \varphi, \rho = \cos \varphi .$$

$$3. \text{ a) } y = e^x, y = 1 - x, x = 1 ;$$

$$\text{ б) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } y = \ln x, y = 1 - x, y = 1 ;$$

$$\text{ б) } \rho = 3 \sin 3\varphi .$$

$$5. \text{ a) } y = -\sqrt{x}, y = -\frac{1}{2}x ;$$

$$\text{ б) } \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} .$$

$$6. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x ;$$

$$\text{ б) } \rho = 2(1 + \cos \varphi) .$$

$$7. \text{ a) } y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2 ;$$

$$\text{ б) } \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} .$$

$$8. \text{ a) } y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2 ;$$

$$\text{ б) } \rho = 6 \cos \varphi .$$

$$9. \text{ a) } y = e^x, y = 1 - x, y = e ;$$

$$\text{ б) } \begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases} .$$

$$10. \text{ a) } y = x^3, y = 2 - x, y = 0 ;$$

$$\text{ б) } \rho = 3(1 - \cos \varphi) .$$

11. a)  $y = x^2, y = x + 2$ ;      б)  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
12. a)  $y = x^2, y = x + 6$ ;      б)  $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = \sin \varphi$ .
13. a)  $y = x^3, y = -x, y = 1$ ;      б)  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ .
14. a)  $y = x^2, y = x, x = 2$ ;      б)  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .
15. a)  $y = -x^2, y = x - 2$ ;      б)  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ .
16. a)  $y = -x^3, y = -x^2$ ;      б)  $\rho = 4 \cos \varphi$ .
17. a)  $y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0$ ;      б)  $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$ .
18. a)  $y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 2$ ;      б)  $\rho = 6 \sin 4\varphi$ .
19. a)  $y = x^3, y = -x, x = -1$ ;      б)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
20. a)  $y = 3^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 3$ ;      б)  $\rho = 6 \cos \varphi$ .
21. a)  $y = x^3, y = -x, y = -1$ ;      б)  $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ .
22. a)  $y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = 4$ ;      б)  $\rho = 4 \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi$ .
23. a) и  $y = -x^3, y = x, x = 1$ ;      б)  $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$ .
24. a)  $y = \frac{1}{x^2}, y = -x, y = 4$ ;      б)  $\rho = 4 \sin 2\varphi$ .

25. а)  $y = -x^3, y = x, x = -1$ ; б)  $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ .
26. а)  $y = e^x, y = \left(\frac{1}{e}\right)^x, y = e$ ; б)  $\rho = 8\cos 2\varphi$ .
27. а)  $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = 8$ ; б)  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
28. а)  $y = -x^3, y = x, y = 1$ ; б)  $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$ .
29. а)  $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = -8$ ; б)  $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ .
30. а)  $y = -x^3, y = x, y = -1$ ; б)  $\rho = 4\sin \varphi, \rho = 2\sin \varphi$ .

**Завдання 25.** Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються).

1. а)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$ ; б)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 8}$ .
2. а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ .
3. а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$ .
4. а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$ ; б)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}$ .
5. а)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$ ; б)  $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2}$ .

$$6. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}.$$

$$7. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \sin x}.$$

$$8. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$9. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^4 - 16}.$$

$$10. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-3} \sin x^{-2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x^5} dx.$$

$$11. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^5 x}};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$12. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(3x^2 + 6x) dx}{x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 34};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$14. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 8x + 12};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{(x^2 - 1) dx}{x^3 - 3x - 18}.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{x^2 dx}{(x^3 - 64)^2}.$$

$$16. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^6 e^{x^7} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}.$$

$$17. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 14}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \sin 2x}.$$

$$18. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$$

$$19. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-4x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{(x^3 - 1) dx}{x^4 - 4x - 8}.$$

$$20. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-4} \cos x^{-3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^3 + 4x + 1}{x^4} dx.$$

$$21. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln^3 x}};$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 2x - 24}.$$

$$22. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(5x^4 + 1) dx}{x^5 + x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x (1 - \operatorname{tg} x)}.$$

$$23. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 10x + 50};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \operatorname{ctg} x)}.$$

$$24. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 8}.$$

$$25. \text{ a) } \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-3}^0 \frac{x dx}{x^2 - 9}.$$

$$26. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^4 e^{x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}.$$

$$27. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 80}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \sin 3x}.$$



$$28. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \cos 3x}.$$

$$29. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-6x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{(x^3 - 2x) dx}{x^4 - 4x^2 - 45}.$$

$$30. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-5} \sin x^{-4} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^5} dx.$$

### Диференціальне числення функції декількох змінних

**Завдання 26.** Для даних функцій вказати область визначення та побудувати її на координатній площині.

$$1) z = x^2 - y + \frac{\ln x}{\sqrt{x+y-1}}.$$

$$2) z = 5^x - \ln(x^2 + y^2 - 16).$$

$$3) z = \sqrt{2x-3y} + \lg\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

$$4) z = e^x - \log_x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - 1\right).$$

$$5) z = \sqrt{x} + y^3 + e^{\sqrt{2x+y+6}}.$$

$$6) z = \cos y - \lg(y - x^2 + 5x - 6).$$

$$7) z = xy - \sqrt{x-5y} + \frac{6}{\sqrt{4x+y-8}}.$$

$$8) z = 5 - x^2 + 3y^2 + \log_{x-3y+6} x.$$

$$9) z = 3x + \arcsin(x + 5y - 9).$$

$$10) z = e^{xy} - \arccos(x^2 + y^2).$$

$$11) z = \sqrt{x} + \ln(y - 1 - x^2).$$

$$12) z = \frac{\ln y}{\sqrt{2y+3x-6}} + \sqrt[3]{x}.$$

$$13) z = \lg x - \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}.$$

$$14) z = 3y + \arcsin y - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$15) z = e^x - \log_{x-5y-10} x.$$

$$16) z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} - \ln(x - y).$$

- 17)  $z = y^5 - \arccos x + \sqrt{y}$ .      18)  $z = xy - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} + \log_x y$ .
- 19)  $z = \sin x - \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 9y^2 - 36}}$ .      20)  $z = \arcsin x - \arcsin y$ .
- 21)  $z = y^2 + \sqrt{x - 3y - 9} - \ln x$ .      22)  $z = 1 - \lg(x^2 + 5y^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{y - 1}}$ .
- 23)  $z = \arcsin x - \sqrt{4x + 3y - 12}$ .      24)  $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - \log_x(x - 5)$ .
- 25)  $z = \operatorname{tg} y + 4\sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36}} - 1$ .      26)  $z = x^2 + \frac{\sqrt{x + y}}{\lg(x^2 + y^2 - 25)}$ .
- 27)  $z = y^3 + \log_x(x + 5y - 15)$ .      28)  $z = \sin y + 4\sqrt{x - 3y + 6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- 29)  $z = e^{\sqrt{x}} + \arcsin y$ .      30)  $z = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4}}$ .

**Завдання 27.** Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  та диференціал функції  $dz$ .

- 1)  $z = e^{x^3 + y^2} + xy - \sqrt{x}$ .      2)  $z = 3\cos^3(x + 2y) \ln x$ .
- 3)  $z = \arcsin^2(x^2 + y^3) + 3^y$ .      4)  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2} - x^3 + \sqrt{y}$ .
- 5)  $z = xe^{-xy} + \ln(x + 4y)$ .      6)  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{ctg}(xy) + 2y$ .
- 7)  $z = \sqrt{y} + \operatorname{tg}(x + y) - x^3$ .      8)  $z = xe^{xy} + 3y^2 - \sqrt{\frac{x}{y}}$ .
- 9)  $z = 5x^2 + 3y^2 - \operatorname{ctg}(x - y)$ .      10)  $z = \frac{x}{x^2 + y^3} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{y^2}$ .
- 11)  $z = \operatorname{arctg}^2 x + e^y - \sin^3(y)$ .      12)  $z = (x^2 + y^3)^{\frac{2}{3}} - \lg x + 5y$ .
- 13)  $z = 5x - 3y^2 + \cos^2(x^3 + y)$ .      14)  $z = y^4 - 3^{x+y} - \sin \frac{x}{y}$ .

15)  $z = 5x^2 - 4y^5 + \frac{1}{\operatorname{tg}(xy)}$ .

16)  $z = x^4 + \cos^2 y - \ln(x+y)$ .

17)  $z = \lg(x^2 - y) + \sqrt{x} + 5y^2$ .

18)  $z = \sqrt[5]{y^4} + 3^x - (2x+3y)^{10}$ .

19)  $z = \sqrt{x^2 + y^3} - x^4 + e^{2y}$ .

20)  $z = 2y - \cos^2 x + \frac{1}{x+3y}$ .

21)  $z = \arccos(x^2 - y^5) + 3y^4$ .

22)  $z = (y^2 + 5x)^6 - \frac{1}{x^3}$ .

23)  $z = \frac{1}{y} + x^4 - \sqrt[3]{4x-3y}$ .

24)  $z = 6x^7 - \sqrt{y} + \ln(x+y)$ .

25)  $z = \operatorname{tg}(xy) + 3x^3 + y^2$ .

26)  $z = x^5 + \sqrt[4]{y^3} - \ln(x^2 - \sqrt{y})$ .

27)  $z = \sqrt[3]{x+6y^2} + e^{x+y} - x$ .

28)  $z = 2x^4 - 5\sqrt[3]{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ .

29)  $z = 5x - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \sin^3(xy)$ .

30)  $z = \ln(x^2 + y^2) + \sqrt{x}$ .

**Завдання 28.** Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції  $z$  за вказаних значень аргументів  $x$  та  $y$ .

1)  $z = \sqrt{x^3 + y^2}$ ;

$x = 2,05$ ;

$y = 0,98$ .

2)  $z = \sqrt[3]{x^4 + y^3}$ ;

$x = 0,07$ ;

$y = 0,95$ .

3)  $z = x^{2y}$ ;

$x = 1,04$ ;

$y = 2,94$ .

4)  $z = \arctg(x^2 + y^4)$ ;

$x = 0,95$ ;

$y = 0,08$ .

5)  $z = \arcsin(x^3 + y^3 - 9)$ ;

$x = 0,96$ ;

$y = 2,03$ .

6)  $z = \sqrt[4]{x^2 + y^4} + 6$ ;

$x = 2,97$ ;

$y = 1,05$ .

7)  $z = \arccos(x^3 + y^2 - 17)$ ;

$x = 2,07$ ;

$y = 2,92$ .

8)  $z = \sqrt{x^3 + y^4} + 2$ ;

$x = 1,06$ ;

$y = 0,91$ .

9)  $z = \operatorname{arccctg}(3x + y^4 - 27)$ ;

$x = 3,97$ ;

$y = 2,03$ .

10)  $z = (x-4)^{3y}$ ;

$x = 4,95$ ;

$y = 3,04$ .

11)  $z = \sqrt[3]{x^4 + y^5 - 21}$ ;

$x = 2,05$ ;

$y = 1,94$ .

12)  $z = \arcsin(x^5 + y - 7)$ ;

$x = 1,06$ ;

$y = 5,98$ .

- 13)  $z = \sqrt[4]{4x + y^6 - 3}$ ;  $x = 4,94$ ;  $y = 2,03$ .
- 14)  $z = \arctg(3x^2 - 2y^3 + 6)$ ;  $x = 4,06$ ;  $y = 2,98$ .
- 15)  $z = (4x - 11)^{y^2}$ ;  $x = 2,93$ ;  $y = 2,05$ .
- 16)  $z = \operatorname{arcctg} \frac{x^2 - 15}{y^3 + 1}$ ;  $x = 4,04$ ;  $y = 0,07$ .
- 17)  $z = \sqrt{3y^3 - 4x^5}$ ;  $x = 1,96$ ;  $y = 4,02$ .
- 18)  $z = \sqrt[3]{4y + x^4 + 32}$ ;  $x = 2,98$ ;  $y = 3,04$ .
- 19)  $z = (3x - 5)^{y^3}$ ;  $x = 2,05$ ;  $y = 0,96$ .
- 20)  $z = \arccos(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3)$ ;  $x = 1,03$ ;  $y = 3,94$ .
- 21)  $z = \arctg \frac{y^2 - 23}{x^3 - 25}$ ;  $x = 2,97$ ;  $y = 5,06$ .
- 22)  $z = \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 8}{y^2 - 3y + 1}}$ ;  $x = 2,02$ ;  $y = 3,04$ .
- 23)  $z = (3x - 8)^{2y+3}$ ;  $x = 3,05$ ;  $y = 0,94$ .
- 24)  $z = \ln(y^3 + x^3 - 8)$ ;  $x = 0,98$ ;  $y = 2,03$ .
- 25)  $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4 - 1}$ ;  $x = 1,05$ ;  $y = 2,99$ .
- 26)  $z = \arcsin(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + 1)$ ;  $x = 0,96$ ;  $y = 8,02$ .
- 27)  $z = \arctg(18 - y^3 - x^2)$ ;  $x = 3,03$ ;  $y = 2,04$ .
- 28)  $z = (9 - 2x)^{1-3y}$ ;  $x = 3,95$ ;  $y = 1,03$ .
- 29)  $z = \ln(x^5 - y^3 + 1)$ ;  $x = 0,98$ ;  $y = 1,04$ .
- 30)  $z = \sqrt[3]{2y^3 - x^4 + 17}$ ;  $x = 1,97$ ;  $y = 0,06$ .

**Завдання 29.** Довести, що  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ , якщо:

$$1) u = -\ln x + \frac{1}{2} x^2 e^y + x; \quad v = \frac{1}{2} xy^2 - xe^y; \quad w = -\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{6} y^3.$$

$$2) u = x \ln x + \frac{1}{6} x^3 \sin y; \quad v = -\frac{x}{y} - y \ln x + x; \quad w = x \sin y + \ln y.$$

$$3) u = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} y - \frac{1}{4} e^{2x}; \quad v = -\frac{y}{x} + x \ln \cos y + 6y; \quad w = \frac{1}{2} y^2 e^{2x} - \frac{y^2}{2x^2}.$$

$$4) u = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{9} \cos 3x; \quad v = \frac{1}{3} y \sin 3x + x \ln y; \quad w = -\frac{1}{12} y^4 - y \ln y.$$

$$5) u = \frac{1}{9} e^{3x} + y \cos x; \quad v = -\frac{1}{3} y e^{3x} + \frac{x}{2y^2}; \quad w = \frac{1}{6} y^3 \cos x + \frac{1}{2y} + 6y.$$

$$6) u = -\frac{1}{6} x^3 \operatorname{tg} y + \frac{y}{6x^2}; \quad v = x e^y - \frac{1}{2} x^2 \ln \cos y; \quad w = x^3 - \frac{y^3}{6x^4} - e^y.$$

$$7) u = \frac{4}{15} \sqrt{(x+y)^5} - y e^x; \quad v = \frac{1}{2} y^2 e^x + \frac{x}{3y^3}; \quad w = \frac{1}{6y^2} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+y)^5}.$$

$$8) u = -\sin x + \frac{1}{2} x^2 \cos y; \quad v = y \cos x + \frac{1}{3} x e^{3y}; \quad w = \cos y - \frac{1}{9} e^{3y}.$$

$$9) u = \ln \sin x - x^2 y^3; \quad v = \frac{1}{2} x y^4 - \frac{1}{2} y x^4; \quad w = x^3 y^2 - \frac{y}{2 \cos x} + \frac{y^2}{2 \sin^2 x}.$$

$$10) u = \sin^2(x+y) - \frac{x^2}{2y}; \quad v = x \ln y + y \ln x; \quad w = \cos^2(x+y) - \frac{y^2}{2x} + \operatorname{tg} x.$$

$$11) u = \arcsin 3x - \frac{1}{2} y x^2; \quad v = \frac{1}{2} x^2 2^y \ln 2 - \frac{3y}{\sqrt{1-9x^2}}; \quad w = \frac{1}{6} y^3 - x 2^y.$$

$$12) u = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{arctg} x; \quad v = \frac{2y}{\sin^2 2x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}; \quad w = \frac{y^2 x}{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{y}.$$

$$13) u = \frac{1}{30} x^6 + y^2 \ln x; \quad v = -\frac{y^3}{3x} + x \cos y; \quad w = -\sin y - \frac{1}{2} x^4 y^2 + \operatorname{tg}^3 x^2.$$

$$14) u = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} - \frac{3}{2} e^{2y} x^2; \quad v = \frac{3}{2} e^{2y} x - \frac{1}{20} x^5 y^4; \quad w = \frac{1}{20} x^4 y^5 - \frac{1}{2} y^2 \sqrt{x}.$$

$$15) u = -\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x^2 \sin y; \quad v = \frac{y}{1+x^2} + \frac{1}{12} y^4 x^3; \quad w = -\frac{1}{20} y^5 x^2 - \sin y.$$

$$16) u = 2 \arcsin x + y^2 e^x; \quad v = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3} y^3 e^x; \quad w = y \ln^2 x - \frac{1}{6} y^4 e^x.$$

$$17) u = \frac{9}{28} \sqrt[3]{x^7} + \frac{e^{xy}}{y^2}; \quad v = -\frac{1}{2} x \cos^2 y; \quad w = \frac{1}{4} \sin 2y - \frac{1}{2} y^2 \sqrt[3]{x} - \frac{e^{xy}}{x^2}.$$

$$18) u = \frac{1}{x} + \frac{\cos xy}{y^2}; \quad v = -\frac{\cos 8y}{8y} - 4xy^5; \quad w = \frac{2}{3} y^6 - \frac{y^2}{x^3} + \operatorname{tg} x - \frac{\cos xy}{x^2}.$$

$$19) u = -\frac{\ln x}{y} - \frac{1}{4} e^{2x}; \quad v = \frac{\ln y}{x} - x \operatorname{tg} y - \ln x; \quad w = \frac{1}{2} y^2 e^{2x} - \ln \cos y.$$

$$20) u = -\ln \sin x + \frac{4}{15} \sqrt{x^5 y}; \quad v = y \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} x e^{3y}; \quad w = -\frac{4}{15} \sqrt{xy^5} - \frac{1}{9} e^{3y}.$$

$$21) u = \frac{\ln x}{y^2} - \operatorname{arctg} x - 2y; \quad v = 6y^5 x + \frac{y}{1+x^2}; \quad w = \cos x - \frac{\ln y}{x^2} - y^6.$$

$$22) u = \arcsin x + \frac{1}{6} x^3 y; \quad v = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + 5\sqrt{y}; \quad w = \frac{1}{y} - \frac{1}{6} xy^3 + 3.$$

$$23) u = \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{6y^2} - x \operatorname{tg} y; \quad v = e^y \ln x - \frac{y}{\cos^2 x}; \quad w = x \ln y - \frac{e^y}{x} + 2y.$$

$$24) u = \operatorname{ctg} x - \frac{x^4}{6y^3} + y^3; \quad v = \frac{y}{\sin^2 x} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x; \quad w = \frac{x^2}{y} - \operatorname{arccos} y.$$

$$25) u = \frac{1}{6} x^3 - y \sin x; \quad v = \frac{1}{2} y^2 \cos x - \frac{x}{1+y^2}; \quad w = y - \frac{1}{2} xy^2 - \operatorname{arctg} y.$$

$$26) u = \frac{1}{6} x^3 \sqrt{y} - \ln \cos x; \quad v = -\frac{1}{3} x^2 \sqrt{y^3} + e^{x+y}; \quad w = -e^{x+y} - \frac{y^2}{2 \cos^2 x}.$$

$$27) u = -y^2 x^2; \quad v = \frac{2}{3} x \sqrt{(2y+1)^3}; \quad w = \frac{1}{6} y^4 - \frac{2}{15} \sqrt{(2y+1)^5} + y \ln x.$$

$$28) u = \frac{y^2}{3x^2} - \frac{1}{15} \sqrt{(2x+y)^5}; \quad v = \frac{2}{15} \sqrt{(2x+y)^5} - y; \quad w = -\frac{y^4}{6x^4}.$$

$$29) u = y^2 \ln x - 4e^{\frac{x}{2}}; \quad v = 2ye^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{\cos^2 y} + 3x; \quad w = \operatorname{tg} y + \frac{y^4}{12x^2} - y \lg x.$$

$$30) u = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} \sin y - \frac{1}{30} x^6; \quad v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cos y; \quad w = \frac{1}{2} y^2 x^4.$$

**Завдання 30.** Дослідити функції на екстремум:

$$1) z = \frac{3}{2} x^2 - 5xy + y^2 - 8x + 7y. \quad 2) z = 2x^2 - xy + \frac{3}{2} y^2 + 3x - 9y.$$

$$3) z = \frac{5}{2} x^2 - xy - \frac{1}{2} y^2 - 9x + 3y. \quad 4) z = \frac{1}{2} x^2 + 2xy + \frac{11}{2} y^2 - 2x + 3y.$$

$$5) z = \frac{3}{2} x^2 + 2xy - \frac{9}{2} y^2 + 3x + 2y. \quad 6) z = \frac{1}{2} x^2 + 4xy - \frac{5}{2} y^2 - 16x - y.$$

$$7) z = \frac{3}{2} x^2 + 5xy - \frac{1}{2} y^2 - x + 17y. \quad 8) z = \frac{1}{2} x^2 + 2xy - \frac{1}{2} y^2 - 4x + 7y.$$

$$9) z = x^2 + 7xy - \frac{11}{2} y^2 - 17x - 24y. \quad 10) z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - 18x + 15y.$$

$$11) z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 16x + 22y. \quad 12) z = 4x^2 + xy + y^2 + 13x + 9y.$$

$$13) z = \frac{5}{2} x^2 + 4xy - 3y^2 + 6x + 14y. \quad 14) z = 2x^2 + xy + \frac{1}{2} y^2 + 2x + 5y.$$

$$15) z = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 18y. \quad 16) z = 6x^2 + xy - y^2 + 6x - 12y.$$

$$17) z = 2x^2 - xy - y^2 - 28x + 7y. \quad 18) z = \frac{1}{2} x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x - 2y.$$

$$19) z = x^2 + xy + y^2 + x - 4y. \quad 20) z = \frac{3}{2} x^2 - 10xy - 5y^2 - 7x + 1.$$

$$21) z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x + 6y. \quad 22) z = \frac{1}{2} x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x - 4y.$$

$$23) z = x^2 + 3xy + 5y^2 + 5x + 2y. \quad 24) z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 16x - 2y.$$

$$25) z = 2x^2 + 3xy + y^2 + x. \quad 26) z = 4x^2 - xy + 2y^2 + 17x - 6y.$$

$$27) z = \frac{1}{2}x^2 + xy - y^2 + 4x - 11y. \quad 28) z = 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x.$$

$$29) z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x - 4y. \quad 30) z = x^2 - 3xy + 5y^2 - 14x + 21y.$$

**Завдання 31.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = f(x, y)$  в області  $D$ , яка обмежена осями координат та вказаною прямою.

$$1) z = x^2 - 3xy - 12x + 18y; \quad y = 14 - 2x.$$

$$2) z = 2x^2 + 3xy + 2x - 3y; \quad y = 2x - 6.$$

$$3) z = x^2 + 3xy - x + 3y; \quad y = x + 2.$$

$$4) z = 3x^2 + 2xy - 10x - 4y; \quad y = x - 3.$$

$$5) z = x^2 - 3xy + 2x + 6y; \quad y = 4 - x.$$

$$6) z = x^2 - xy + 3x; \quad y = 4 - 2x.$$

$$7) z = 3x^2 - 2xy - 16x + 6y; \quad y = 10 - 2x.$$

$$8) z = x^2 + 3xy + x + 6y; \quad y = 2x - 8.$$

$$9) z = 2x^2 - 2xy - 2y; \quad y = -2x - 8.$$

$$10) z = x^2 + 3xy - x - 3y; \quad y = -x - 2.$$

$$11) z = 3x^2 - 4xy + 4x + 8y; \quad y = -2x - 6.$$

$$12) z = 4x^2 - 2xy - 2x + 2y; \quad y = 6 - 2x.$$

$$13) z = 2x^2 - xy - 2x + y; \quad y = 4 - 2x.$$

$$14) z = x^2 + xy + x + 2y; \quad y = 2x + 8.$$

$$15) z = x^2 + 3xy + 2x - 6y; \quad y = x - 4.$$



- 16)  $z = 2x^2 + 5xy - 2x + 10y;$        $y = x + 5.$
- 17)  $z = x^2 + 2xy + 2x - 2y;$        $y = x - 4.$
- 18)  $z = 3x^2 - 3xy - 3x + 6y;$        $y = 6 - x.$
- 19)  $z = 2x^2 - xy - 11x + 3y;$        $y = 5 - x.$
- 20)  $z = x^2 - 3xy - x - 3y;$        $y = -2x - 4.$
- 21)  $z = 2x^2 + 2xy - 6x - 4y;$        $y = 2x - 6.$
- 22)  $z = x^2 + 3xy + 10x + 6y;$        $y = -x - 5.$
- 23)  $z = x^2 - 2xy + 2x - 6y;$        $y = -6 - x.$
- 24)  $z = 3x^2 + 4xy - 2x - 4y;$        $y = 2x - 3.$
- 25)  $z = x^2 - 3xy - 5x + 12y;$        $y = 10 - 2x.$
- 26)  $z = 2xy + y^2 + 2x - 2y;$        $y = x - 4.$
- 27)  $z = xy + 2y^2 - 3y;$        $y = 4 - 2x.$
- 28)  $z = 3xy - 4y^2 - 3x - y;$        $y = 5 - x.$
- 29)  $z = 2xy + 3y^2 - 2x - 2y;$        $y = x + 5.$
- 30)  $z = x^2 - 4xy - 2x + 20y - 10;$        $y = 8 - x.$

**Завдання 32.** З досліду між величинами  $x$  та  $y$  була встановлена залежність, яка наведена в таблиці. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійну функцію  $y=ax+b$ . На координатній площині  $Oxy$  відмітити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму.

| № вар. | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | $x_3$ | $y_3$ | $x_4$ | $y_4$ | $x_5$ | $y_5$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|
| 1  | 1  | 4  | -1 | 3  | 0  | -1 | -2 | -1 | -3  | -1 |
| 2  | -4 | -2 | -2 | -3 | -3 | -4 | 2  | -4 | 1   | -5 |
| 3  | 4  | 4  | 2  | 3  | 1  | 1  | 3  | 1  | 0   | -2 |
| 4  | -2 | 4  | -1 | 2  | 0  | 1  | 1  | 1  | 2   | -1 |
| 5  | 7  | 4  | 5  | 3  | 4  | 1  | 1  | -1 | 2   | -3 |
| 6  | 2  | 4  | 3  | 2  | 5  | 1  | 6  | -2 | 8   | -3 |
| 7  | 4  | 4  | 3  | 2  | 1  | 2  | 0  | -1 | -2  | -2 |
| 8  | 6  | 5  | 5  | 3  | 4  | 2  | 5  | 0  | 3   | -1 |
| 9  | -6 | 4  | -4 | 3  | -5 | 1  | -3 | 1  | -1  | -2 |
| 10 | -4 | 5  | -3 | 2  | -1 | 2  | 0  | 0  | 1   | 0  |
| 11 | 8  | 4  | 9  | 3  | 7  | 1  | 6  | -2 | 4   | -3 |
| 12 | 5  | 4  | 6  | 2  | 8  | 1  | 7  | -1 | 10  | -3 |
| 13 | -7 | 4  | -6 | 3  | -4 | 1  | -2 | 2  | -1  | 0  |
| 14 | -7 | 1  | -6 | -2 | -3 | -4 | -5 | -5 | -2  | -6 |
| 15 | 0  | 0  | 2  | -2 | 3  | -4 | 5  | -3 | 6   | -5 |
| 16 | -2 | -2 | 0  | -3 | -1 | -4 | 1  | -4 | 3   | -6 |
| 17 | -6 | 2  | -5 | 0  | -3 | -2 | -4 | -3 | -2  | -4 |
| 18 | 6  | 7  | 1  | 6  | -2 | 6  | -1 | 4  | -3  | 4  |
| 19 | 2  | 5  | 0  | 3  | -2 | 1  | -2 | -1 | -4  | -2 |
| 20 | -3 | 5  | -1 | 4  | 2  | 4  | 3  | 2  | 4   | 2  |
| 21 | 1  | 1  | -2 | 0  | -3 | -2 | -5 | -3 | -4  | -4 |
| 22 | -2 | 3  | -1 | 1  | 0  | -3 | 1  | -1 | 2   | -3 |
| 23 | 6  | 2  | 4  | 0  | 3  | -2 | 5  | -3 | 2   | -4 |
| 24 | -6 | 6  | -7 | 4  | -9 | 2  | -8 | 1  | -10 | 0  |
| 25 | 1  | 2  | -1 | 0  | -2 | -2 | -3 | -3 | -5  | -4 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|---|
| 26 | -3 | -3 | -2 | -3 | -1 | -1 | 0  | 1 | 2  | 3 |
| 27 | 1  | -2 | 2  | -1 | 3  | 1  | 4  | 3 | 5  | 5 |
| 28 | -6 | -3 | -4 | -1 | -3 | 2  | -2 | 3 | -1 | 5 |
| 29 | -2 | -1 | -1 | 1  | 0  | 3  | 2  | 6 | 3  | 7 |
| 30 | 5  | -1 | 4  | 1  | 3  | 4  | 1  | 5 | 0  | 7 |

### Диференціальні рівняння

**Завдання 33.** Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку.

- $\frac{x}{\sin y} dx - y(1+x^2)dy = 0$  ;
  - $y' = \frac{3^x}{(3y^2+1)(y^3+y)^4}$  ;
  - $y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}$  ;
  - $y' = \frac{x+y+3}{2x+2y-1}$  ;
  - $y' = \frac{4x-5y-1}{x+4y-16}$  ;
  - $y' - \frac{y}{x} = x \sin x \cos^5 x$  .
- $x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0$  ;
  - $y' = \frac{\cos x \cos^5 y}{\sin^3 x \sin y}$  ;
  - $y' = \frac{x}{y} \sec \frac{3y}{x} + \frac{y}{x}$  ;
  - $y' = \frac{2-x-y}{3x+3y-1}$  ;
  - $y' = \frac{5x-y+17}{3x+5y-1}$  ;
  - $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$  .
- $\frac{x}{\cos y} dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} dy = 0$  ;
  - $y' = \frac{x^2 \cos x^3}{y \sin 3y}$  ;
  - $y' = \frac{x}{y} \operatorname{cosec} \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$  ;
  - $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}$  ;

- д)  $y' = \frac{2x - y + 7}{x + 2y - 4}$ ;      е)  $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .
4. а)  $x(y^2 + 4y + 5) \ln x dx - dy = 0$ ;    б)  $y' = \frac{y^2 + 4y + 20}{(x+1)\ln(x+1)}$ ;
- в)  $y' = \frac{x}{y} e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$ ;      г)  $y' = \frac{2x + 2y - 5}{7 - x - y}$ ;
- д)  $y' = \frac{7x - 11y - 24}{2x + 7y - 17}$ ;      е)  $xy' - y = \frac{x^2(4x + 3)}{x^2 + 8x + 25}$ .
5. а)  $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{1 + y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy$ ;      б)  $y' = \frac{y^5 + 3y^2}{(5y^4 + 6y)\cos^2 7x}$ ;
- в)  $y' = \frac{2x + y}{x - y}$ ;      г)  $y' = \frac{x + y + 10}{5x + 5y - 1}$ ;
- д)  $y' = \frac{-5x + 4y + 15}{6x - 5y - 18}$ ;      е)  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x \sin^2 4x$ .
6. а)  $(y^2 + 3y)dx + \frac{(2y + 3)}{x^2 \ln x} dy = 0$ ;    б)  $y' = \frac{\cos^2 2x}{y(y^3 + 2)}$ ;
- в)  $y' = \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^3 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ ;      г)  $y' = \frac{4x + 4y + 1}{x + y - 3}$ ;
- д)  $y' = \frac{-3x + 4y + 22}{2x - 3y - 16}$ ;      е)  $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x$ .
7. а)  $dx - xye^y \ln^2 x dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{x^3(3 + x^2)}{\sin^2 6y}$ ;
- в)  $y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ ;      г)  $y' = \frac{6x + 6y - 5}{3 - 2x - 2y}$ ;
- д)  $y' = \frac{x + 2y + 9}{8x + y + 13}$ ;      е)  $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2(6x - 1)}{x^2 - 10x + 21}$ .

8. а)  $\frac{\sin x dx}{3y^2 + 2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3 + 2y} dy$ ; б)  $y' = \frac{x^4 \ln x}{3y^2 e^{y^3}}$ ;
- в)  $y' = \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ ; г)  $y' = \frac{3x + 3y - 9}{7 - x - y}$ ;
- д)  $y' = \frac{2x - 3y + 7}{5x + 4y + 6}$ ; е)  $xy' - 2y = x^4 e^{2x}$ .
9. а)  $\frac{\cos x}{y} dx = 5^y (\sin^2 x + 1) dy$ ; б)  $y' = \frac{x^5 (1 + x^3)}{5y^4 \sin y^5}$ ;
- в)  $y' = \frac{2y^2 - 5xy + 2x^2}{xy}$ ; г)  $y' = \frac{3 + x - y}{2 - x + y}$ ;
- д)  $y' = \frac{x + y + 5}{4x + y + 2}$ ; е)  $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x e^{\cos x}$ .
10. а)  $\frac{\sin x dx}{y^2 + y} = (\cos^2 x - 9) \ln y dy$ ; б)  $y' = \frac{\sqrt{x}(3 + x^2)}{7y^6 \cos y^7}$ ;
- в)  $y' = \frac{x^2}{y^2 + 2xy + 13x^2} + \frac{y}{x}$ ; г)  $y' = \frac{7x - 7y - 1}{x - y + 4}$ ;
- д)  $y' = \frac{x - 2y + 9}{5x - y}$ ; е)  $y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x e^{\sin x}$ .
11. а)  $\frac{3x^2 + 1}{3^y} dx + \frac{1}{(x^3 + x)^4} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y}(2 + y^3)}$ ;
- в)  $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ ; г)  $y' = \frac{3 - 2x + 2y}{8x - 8y + 1}$ ;
- д)  $y' = \frac{x - 2y - 12}{12x + y + 6}$ ; е)  $y' - \frac{y}{x} = x^2 \cos x$ .
12. а)  $\frac{\cos x}{\ln y} dx = (y^3 + y^2) \sin^2 x dy$ ; б)  $y' = \frac{\sqrt[4]{x}(x^3 + 3)}{\cos y \sin^5 y}$ ;

- в)  $x^2 y' = y^2 - 3xy - 5x^2$ ;      г)  $y' = \frac{3x + 3y - 4}{1 - 9x - 9y}$ ;
- д)  $y' = \frac{-x - 2y + 7}{4x - y - 28}$ ;      е)  $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + x^2}$ .
13. а)  $\sin x \sin^3 y dx = \cos^5 x \cos y dy$ ;      б)  $y' = x e^{3x} \sqrt{4 - 9y^2}$ ;
- в)  $xyy' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2$ ;      г)  $y' = \frac{2x + 2y - 1}{3 - 6x - 6y}$ ;
- д)  $y' = \frac{2x + 3y - 1}{x + 4y + 6}$ ;      е)  $y' - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$ .
14. а)  $\frac{x}{\cos y^3} dx - \frac{y^2}{\sin 3x} dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{1}{y e^{5y} (1 + 4x^2)}$ ;
- в)  $xyy' = x^2 \operatorname{cosec} \frac{7y}{x} + y^2$ ;      г)  $y' = \frac{4x + 4y + 5}{1 - 12x - 12y}$ ;
- д)  $y' = \frac{x + 2y - 4}{2x + y + 1}$ ;      е)  $y' - \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} y = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 6x + 34}}$ .
15. а)  $(y + 1) dx = \frac{x^2 + 4x + 20}{\ln(y + 1)} dy$ ;      б)  $y' = \frac{x(\sqrt{x} - 3) \cos^2 y^5}{5y^4}$ ;
- в)  $xyy' = x^2 e^{-\frac{3y}{x}} + y^2$ ;      г)  $y' = \frac{5x + 5y + 4}{15x + 15y - 8}$ ;
- д)  $y' = \frac{5x - 14y - 11}{3x - 10y - 5}$ ;      е)  $y' - \frac{4y}{4x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1} \cos^2 x$ .
16. а)  $\cos^2 4y dx = \frac{x^5 + 3x^2}{5x^4 + 6x} dy$ ;      б)  $y' = \frac{x(x^2 + 2) \sin^2 y^4}{4y^3}$ ;
- в)  $xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y$ ;      г)  $y' = \frac{x + y + 8}{3x + 3y + 1}$ ;

- д)  $y' = \frac{-3x+4y+6}{2x-3y-3}$ ;      е)  $y' + 3x^2y = e^{-x^3} \sin^2 4x$ .
17. а)  $\frac{x}{\cos^2 2y} dx + \frac{1}{x^2+3} dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2+2)(y^3-1)}$ ;  
 в)  $xy' = 5x \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^2 \frac{y}{x} + y$ ;      г)  $y' = \frac{2x-2y-5}{3-x+y}$ ;  
 д)  $y' = \frac{x+2y-1}{x+4y+3}$ ;      е)  $y' - 5x^4y = e^{x^5} \sin x \cos^3 x$ .
18. а)  $\frac{1}{y^2} dx - \frac{2+y^3}{\sin^2 4x} dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{3x^2 e^{x^3}}{y^2(\sqrt{y}+7)}$ ;  
 в)  $xy' = 4x \sec^2 \frac{4y}{x} + y$ ;      г)  $y' = \frac{3x+3y+2}{x+y-9}$ ;  
 д)  $y' = \frac{3x+10y+2}{2x+3y+5}$ ;      е)  $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{tgx} \cos^3 x$ .
19. а)  $\frac{3e^{x^3}}{\ln y} dx - \frac{y^4}{x^2} dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{xe^{3x} \sin^2 y^5}{5y^4}$ ;  
 в)  $xy' = 5x \operatorname{cosec}^2 \frac{2y}{x} + y$ ;      г)  $y' = \frac{x+y-3}{5x+5y-1}$ ;  
 д)  $y' = \frac{x+2y-1}{3x+y-8}$ ;      е)  $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = e^{tgx} x \sin 2x$ .
20. а)  $\frac{5 \sin x^5}{y^3} dx + \frac{1+y^5}{x^4} dy = 0$ ;      б)  $y' = \frac{x(1+y^2) \sin x}{y}$ ;  
 в)  $xyy' = 2y^2 + 4xy + x^2$ ;      г)  $y' = \frac{2x-2y+3}{10x-10y-2}$ ;  
 д)  $y' = \frac{3x+2y}{4x+3y+1}$ ;      е)  $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x} \sin^3 x$ .

21. а)  $\frac{7 \cos x^7}{\sqrt{y}} dx - \frac{2+y}{x^6} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy \ln x}$ ;
- в)  $xy' = \frac{x^3}{y^2 + 6xy + 25} + y$ ; г)  $y' = \frac{3x+3y-7}{5-9x-9y}$ ;
- д)  $y' = \frac{-x+4y-6}{8x-y+17}$ ; е)  $y' - \frac{y}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} x \ln x$ .
22. а)  $\frac{\sqrt{x}}{\sin y} dx - \frac{\cos^2 y}{3+x^2} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{x \cos x}{y \sqrt{1+y^2}}$ ;
- в)  $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y$ ; г)  $y' = \frac{4x-4y+3}{7+x-y}$ ;
- д)  $y' = \frac{x-2y-11}{x+y+4}$ ; е)  $y' - \frac{3 \sin x}{\cos^4 x} y = x^3 e^{\cos^{-3} x} \ln x$ .
23. а)  $\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{y}} dx + \frac{y^4+7}{\cos x} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{1}{y(x^2+4x+5) \ln y}$ ;
- в)  $xy' = \frac{y^2-5xy+25x^2}{x}$ ; г)  $y' = \frac{y-x+5}{3x-3y+2}$ ;
- д)  $y' = \frac{2x+y}{5x+2y+3}$ ; е)  $y' - 3x^2 y \cos x^3 = e^{\sin x^3} 5^{4x}$ .
24. а)  $\frac{1}{y} dx = \sqrt{4-9x^2} e^{5y} dy$ ; б)  $y' = \frac{x \sqrt[3]{1+x^2}}{y^3 \ln y}$ ;
- в)  $2yy' = x \sec \frac{7y}{x} + \frac{2y^2}{x}$ ; г)  $y' = \frac{y+3x-1}{5-2y-6x}$ ;
- д)  $y' = \frac{x+y+2}{x+4y-1}$ ; е)  $y' + \frac{5x^4+1}{x^5+x} y = \frac{\sin^2 4x}{x^5+x}$ .



25. а)  $xe^{3x}(1+4y^2)dx = dy$ ; б)  $y' = \frac{2x+3}{y^2(x^2+3x+1)\ln y}$ ;
- в)  $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}$ ; г)  $y' = \frac{2x-y+5}{4x-2y+3}$ ;
- д)  $y' = \frac{-3x+10y+21}{2x-3y-14}$ ; е)  $y' + 2y \sin 2x = \frac{e^{\cos 2x}}{x^2+8x}$ .
26. а)  $\frac{5x^4}{y} dx = (\sqrt{y}+4)\cos^2 x^5 dy$ ; б)  $y' = xye^x \ln^2 y$ ;
- в)  $4yy' = xe^{-\frac{y}{x}} + \frac{4y^2}{x}$ ; г)  $y' = \frac{x+4y-1}{3-x-4y}$ ;
- д)  $y' = \frac{-5x+2y+7}{3x-5y-8}$ ; е)  $y' - 4y \cos 4x = xe^{\sin 4x} \cos 3x$ .
27. а)  $\frac{4x^3}{y+1} dx = (y^2+2)\sin x^4 dy$ ; б)  $y' = \frac{3x^2(\cos^2 y+1)e^{x^3}}{\sin y}$ ;
- в)  $5y' = 2 \sec \frac{y}{x} \sin^6 \frac{y}{x} + 5 \frac{y}{x}$ ; г)  $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}$ ;
- д)  $y' = \frac{-x+3y-9}{4x-y+3}$ ; е)  $y' + \frac{7x^6+2x}{x^7+x^2} y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^7+x^2}$ .
28. а)  $\frac{x^2+2}{\ln y} dx - \frac{y^3}{x^3+1} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{x5^x(\sin^2 y+4)}{\cos y}$ ;
- в)  $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2 \frac{y}{x}$ ; г)  $y' = \frac{x+2y-1}{3x+6y+5}$ ;
- д)  $y' = \frac{-x-y+3}{5x-y-9}$ ; е)  $y' - \frac{9x^8-4x^3}{x^9-x^4} y = \frac{x^9-x^4}{x^2-4x}$ .
29. а)  $\frac{x^3}{y^2} dx + \frac{3e^{y^3}}{\sqrt{x+5}} dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{x^5(\cos^2 y-9)\ln x}{\sin y}$ ;

$$в) 5y' = 6\sec^2 \frac{8y}{x} + 5 \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{3x - y + 4}{2 - 3x + y};$$

$$д) y' = \frac{2x + 11y + 3}{x + 2y - 2};$$

$$е) y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = e^{-\cos^{-1} x} \sin 5x.$$

$$30. а) \frac{5}{y \sin^2 x^5} dx = \frac{e^{3y}}{x^4} dy;$$

$$б) y' = \frac{x^9 (\sin^2 y - 4) \ln x}{\cos y};$$

$$в) 7y' = 5 \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + 7 \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{3 + 2x - 5y}{5y - 2x + 4};$$

$$д) y' = \frac{2x - 9y + 2}{3x + 2y + 3};$$

$$е) y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}.$$

**Завдання 34.** Розв'язати задачу Коші.

$$1. y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x, \quad y(\pi/4) = 8.$$

$$2. y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi.$$

$$3. \frac{\sin x dx}{3y^2 + 2} = (\cos^2 x + 1) e^{y^3 + 2y} dy, \quad y(0) = 0.$$

$$4. y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x e^{\cos x}, \quad y(\pi/6) = 2.$$

$$5. y' = \frac{x^2}{y^2 + 2xy + 13x^2} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$6. y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y(2 + y^3)}}, \quad y(0) = 1.$$

$$7. y' = \frac{3x + 3y - 4}{1 - 9x - 9y}, \quad y(0) = 1.$$

$$8. xy y' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2, \quad y(5) = \pi.$$

$$9. \frac{x}{\cos y^3} dx - \frac{y^2}{\sin 3x} dy = 0, \quad y(\pi/6) = 0.$$

$$10. y' - \frac{4y}{4x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1} \cos^2 x, \quad y(0) = 2.$$

$$11. xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y, \quad y(6) = \pi.$$

$$12. y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2 + 2)(y^3 - 1)}, \quad y(1) = 0.$$

$$13. y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{\operatorname{ctgx}} \cos^3 x, \quad y(\pi/2) = 4.$$

$$14. y' = \frac{x + y - 3}{5x + 5y - 1}, \quad y(0) = 2.$$

$$15. yy' = x(1 + y^2) \sin x, \quad y(0) = 0.$$

$$16. y' - \frac{y}{1 + x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} x \ln x, \quad y(1) = 5.$$

$$17. xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y, \quad y(1) = e.$$

$$18. y' = \frac{1}{y(x^2 + 4x + 5) \ln y}, \quad y(1) = e.$$

$$19. y' = \frac{y + 3x - 1}{5 - 2y - 6x}, \quad y(0) = 2.$$

$$20. 3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}, \quad y(15) = \pi.$$

$$21. y' = xy e^x \ln^2 y, \quad y(0) = e.$$

$$22. y' = \frac{5 - x + 3y}{2x - 6y + 1}, \quad y(0) = 1.$$

$$23. 2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2 \frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi.$$

$$24. y' = \frac{x^5 (\cos^2 y - 9) \ln x}{\sin y}, \quad y(1) = \pi/2.$$

$$25. y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}, \quad y(0) = 2.$$

$$26. y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2.$$

$$27. x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0, \quad y(0) = e.$$

$$28. y' = \frac{4x + 4y + 1}{3 - x - y}, \quad y(0) = 1.$$

$$29. y' = \frac{x}{y} e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(4) = -1.$$

$$30. \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy, \quad y(1) = 0.$$

**Завдання 35.** Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків за допомогою зниження порядку.

$$1. \quad \text{а) } y''' = 6x + xe^{2x};$$

$$\text{б) } y'' + y' \operatorname{tg} x = \sec x.$$

$$2. \quad \text{а) } y^{(4)} = 8 \cos 2x + 3x^2;$$

$$\text{б) } (x^3 + x^2)y'' - (3x^2 + 2x)y' = 0.$$

$$3. \quad \text{а) } y''' = \sqrt{x} + 9x \cos 3x;$$

$$\text{б) } y'' + 2y'^2 \operatorname{tg} y = 0.$$

$$4. \quad \text{а) } y^{(4)} = 12 \sin 3x + 2^x;$$

$$\text{б) } (1 - y^2)y'' + yy'^2 = 0.$$

$$5. \quad \text{а) } y''' = (2x + 1)^{-3} - xe^{3x};$$

$$\text{б) } y'' = \sqrt{1 - y^2}.$$

$$6. \quad \text{а) } y^{(4)} = 4^x + 5x^{-4};$$

$$\text{б) } y'' - 2y'^2 \operatorname{ctg} y = 0.$$

7. a)  $y''' = x \ln x + 12 \sin 3x$ ;      б)  $y'' - y' \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec} x$ .
8. a)  $y^{(4)} = 3x^{-5} - 8 \cos 2x$ ;      б)  $(x^2 + 4x + 5)y'' = -(2x + 4)y'$ .
9. a)  $y''' = x \sin 2x - 5x^{-3}$ ;      б)  $(1 + y^2)y'' - 2yy'^2 = 0$ .
10. a)  $y^{(4)} = 2 \cdot 3^x - 27(2 - 3x)^{-4}$ ;      б)  $y'' \sin 2x + 2y' = 0$ .
11. a)  $y''' = x^2 \ln x + 4e^{2x}$ ;      б)  $y'' - \frac{2}{x}y' = \frac{3}{x}$ .
12. a)  $y^{(4)} = 3 \cdot 4^x - 25 \sin 5x$ ;      б)  $(y^2 + 3)y'' - yy'^2 = 0$ .
13. a)  $y''' = 6x^{-4} - 12x^2 \ln x$ ;      б)  $y'' = 1 + y'^2$ .
14. a)  $y^{(4)} = 24x^{-5} - 81 \cdot 5^{3x}$ ;      б)  $(y^3 - y^2)y'' = (2y - 3y^2)y'^2$ .
15. a)  $y''' = x - 16x \sin 4x$ ;      б)  $y'' \sin 2x - 2y' = 0$ .
16. a)  $y^{(4)} = 60x^{-6} - 32e^{-2x}$ ;      б)  $y'' - y'^2 \operatorname{ctg} y = 0$ .
17. a)  $y''' = \frac{1}{8}x \sin \frac{1}{2}x - 6$ ;      б)  $(x^2 - 4x + 3)y'' = (4 - 2x)y'$ .
18. a)  $y^{(4)} = (\frac{1}{2}x + 5)^{-4} - 9^{2x}$ ;      б)  $(y^2 + 8y + 17)y'' = (y + 4)y'^2$ .
19. a)  $y''' = \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{2}x + 12$ ;      б)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = 0$ .
20. a)  $y^{(4)} = (4 - \frac{1}{2}x)^{-5} + 9 \cdot 10^{3x}$ ;      б)  $(y^5 - 2y^2)y'' = (4y - 5y^4)y'^2$ .
21. a)  $y''' = 2 \cos^2 x - 3e^{-x}$ ;      б)  $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = 0$ .
22. a)  $y^{(4)} = 120x^{-7} + 2 \sin^2 x$ ;      б)  $y'' \sin 2y = 2(1 - 3 \cos^2 y)y'^2$ .
23. a)  $y''' = \sin^2 x \cos x$ ;      б)  $(x^5 + x^3)y'' = (5x^4 + 3x^2)y'$ .
24. a)  $y^{(4)} = xe^{-2x}$ ;      б)  $y'' \sin 2y = 2(3 \sin^2 y - 1)y'^2$ .
25. a)  $y''' = \cos^2 x \sin x$ ;      б)  $xy'' - 3y' = 4$ .

26. а)  $y^{(4)} = x \sin(1 - 2x)$ ;                      б)  $y'' + y'^2 \operatorname{tg} y = 0$ .
27. а)  $y''' = \cos^3 x$ ;                                      б)  $y'' + 2y' \operatorname{ctg} x = 0$ .
28. а)  $y^{(4)} = x \cos(3 + 2x)$ ;                      б)  $(y^2 + 4y + 5)y'' = (2y + 4)y'^2$ .
29. а)  $y''' = \sin^3 x$ ;                                      б)  $y'' = y' \operatorname{ctg} x$ .
30. а)  $y^{(4)} = xe^{3+2x}$ ;                                      б)  $(y^2 - 6y + 8)y'' = (2y - 6)y'^2$ .

**Завдання 36.** Розв'язати лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1.  $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10$ .                      2.  $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$ .
3.  $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9$ .                      4.  $y'' - 4y' + 29y = 6xe^{-x}$ .
5.  $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2$ .                      6.  $y'' - 6y' + 10y = 4xe^{-2x}$ .
7.  $y'' + 9y = 9x^2 - 8$ .                                      8.  $y'' - 4y' + 5y = 10xe^{3x}$ .
9.  $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}$ .                              10.  $y'' + 6y' + 13y = 5x - 26x^2$ .
11.  $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}$ .                              12.  $y'' - 4y' + 40y = 6xe^{-x}$ .
13.  $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2$ .                      14.  $y'' - 10y' + 26y = 5xe^x$ .
15.  $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x$ .                      16.  $y'' - 6y' - 7y = 14xe^{-3x}$ .
17.  $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2$ .                      18.  $y'' + 4y' + 40y = 10xe^{4x}$ .
19.  $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x$ .                      20.  $y'' - 2y' - 8y = 16xe^{-2x}$ .
21.  $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21$ .                      22.  $y'' - 2y' - 35y = 25xe^{-5x}$ .
23.  $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2$ .                      24.  $y'' - 10y' + 29y = 36xe^{3x}$ .
25.  $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}$ .                      26.  $y'' + 8y' + 20y = 18 - 20x^2$ .
27.  $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}$ .                              28.  $y'' - 8y' + 25y = 20xe^{4x}$ .

$$29. y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}.$$

$$30. y'' + y' - 42y = 48xe^{-4x}.$$

### Рекомендована література

1. Апатёнок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1990.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Вид. центр “Академія”, 2003.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За редакцією Г.Л.Кулініча. – К.,1992.
4. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи і моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высш. шк., 1986; Ч. 1,2.
6. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.
7. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.