**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

**Методичні вказівки
для студентів економічних спеціальностей**

**КІРОВОГРАД
2012**

Вища математика. Ч. І: Методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей / Укл.: Гуцул В.І., Якименко С.М., Гончарова С.Я., Філімоніхіна І.І. – Кіровоград: КНТУ, 2012. – 162 с.

Перша частина методичної розробки містить основні положення теоретичного матеріалу з розділів вищої математики, які вивчаються на економічних спеціальностях. По кожній темі дані детальні пояснення та розглянуті типові приклади. Дані рекомендації по організації навчального процесу за кредитно-модульною системою.
Орієнтовано на студентів економічних спеціальностей.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол № 6 від 29.02.2012

Укладачі: Гуцул В.І. – канд. техн. наук, доц.
Якименко С.М. – канд. фіз.-мат. наук, доц.
Гончарова С.Я. – канд. фіз.-мат. наук, доц.
Філімоніхіна І.І. – канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою

<table>
<tr><th>№ теми</th><th>Теми</th><th>Методичні вказівки</th><th>Індивідуальні завдання</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Модуль 1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Матриці. Поняття числової матриці. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць. Транспонування матриць</td><td>§1.1</td><td>№1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Визначники. Обчислення визначників другого та третього порядків. Властивості визначників. Обчислення визначників вищих порядків. Обернена матриця. Ранг матриці</td><td>§1.2, 1.3</td><td>№2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Система лінійних рівнянь (основні поняття). Матричний запис системи. Метод Гауса. Метод Жордана-Гауса</td><td>§1.4</td><td rowspan="2">№3, 4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Невироджені системи. Матричний метод. Формули Крамера. Загальна схема дослідження та розв’язування системи лінійних рівнянь. Однорідні системи</td><td>§1.5-1.7</td></tr>
</table>

1	2	3	4
5	Вектори. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Розкладання вектора по базису. Поділ відрізка у даному відношенні	§2.1-2.4	№5
6	Скалярний добуток. Векторний добуток двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів	§2.5-2.7	№6
7	Пряма на площині. Основні рівняння прямої на площині. Кут між двома прямими	§2.8	№7
8	Площина у просторі. Основні рівняння площини у просторі. Кут між двома площинами	§2.9	№8
9	Пряма у просторі. Кут між прямою й площиною. Взаємне розміщення прямої й площини	§2.10, 2.11	
10	Функція. Границя функції. Нескінченно малі і нескінченно великі функції	§3.1-3.3	№9
11	Неперервність функцій. Порівняння нескінченно малих. Точки розриву	§3.4	№10
12	Комплексні числа**.** Різні форми запису комплексного числа. Дії над комплексними числами	§2.16, 4.1, 4.2	№11, 12
Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної			

1	2	3	4
13	Похідна функції (означення, властивості, таблиця похідних)	§5.1	№13
14	Диференціювання функцій (похідна складної; похідна від неявно заданої функції; логарифмічне диференціювання; похідна від параметрично заданої функції)	§5.2, 5.3	№14
15	Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень. Поняття про похідні вищих порядків	§5.4, 5.5	№15, 16
16	Застосування похідної до обчислення границь (правило Лопіталя). Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції	§6.1, 6.2	№17, 18
17	Дослідження функції на монотонність і точки екстремуму	§6.3	№19
18	Поняття невизначеного інтеграла (означення первісної і невизначеного інтегралу; таблиця інтегралів; властивості)	§7.1	№20
19	Методи інтегрування (заміна змінної і інтегрування частинами)	§7.2	№21
20	Інтегрування деяких функцій, які містять квадратний тричлен	§7.3	№22

1	2	3	4
21	Поняття визначеного інтеграла (означення; геометричний зміст; властивості)	§8.1	№23
22	Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона-Лейбніца). Методи інтегрування у визначеному інтегралі	§8.2	
23	Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії (площа плоскої фігури; довжини дуги)	§8.3-8.4	№24
24	Невласні інтеграли	§8.5	№25
Модуль 3. Диференціальне числення функції декількох змінних. Диференціальні рівняння			
25	Означення функції декількох змінних. Область визначення. Границя функції. Неперервність	§9.1, 9.2	№26
26	Частинні похідні. Повний диференціал. Застосування повного диференціалу до наближених обчислень	§9.3, 9.4	№27, 28
27	Частинні похідні вищих порядків	§9.5	№29
28	Екстремум функції. Абсолютний екстремум функції двох змінних у замкненій області	§9.6	№30, 31
29	Метод найменших квадратів	§9.7	№32

1	2	3	4
30	Диференціальні рівняння. (основні поняття). Диференціальні рівняння першого порядку	§10.1, 10.2	№33, 34
31	Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку	§10.3	№35
32	Лінійні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	§10.4-10.6	№36

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

§ 1.1. Матриці

Прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків і n стовпчиків, називається *числовою матрицею* розмірів m х n. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$, які утворюють матрицю, називаються її *елементами*. Для записаної матриці прийняті також наступні позначення: $A = (a_{ij})\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n});\ A_{m \times n} = (a_{ij})$.

Розглянемо основні види матриць. Якщо у матриці число рядків дорівнює числу стовпчиків і дорівнює n, то вона називається *квадратною матрицею* n-го порядку :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{11} , a_{22} , … , a_{nn} утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи a_{1n} , $a_{2\,n-1}$, … , a_{n1} – *побічну.*

Матрицею-рядком (*матрицею-стовпчиком*) називається матриця, яка складається з одного рядка (одного стовпчика).

Діагональною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. *Одиничною* називається діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначається одинична матриця через Е. Отже,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульовою називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Позначається вказана матриця літерою О.

Трикутною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Лінійними операціями над матрицями називаються операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число.

Додавати й віднімати можна тільки матриці однакових розмірів. *Сумою* двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, елементи якої визначаються за формулою $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Іншими словами, при додаванні (відніманні) двох матриць додаються (віднімаються) відповідні елементи цих матриць.

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число λ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, елементи якої визначаються за формулою $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Як бачимо, для того щоб помножити матрицю на число, необхідно всі елементи матриці помножити на це число.

Приклад 1. Знайти $2A - 3B + 4E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$2A - 3B + 4E = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 3\\ -6 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 12 & -5\end{pmatrix}.$$

Для лінійних операцій справедливі наступні *основні властивості:*

$$1)\ A+B=B+A;\ 2)\ (A+B)+C=A+(B+C);$$
$$3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;\ 4)\ A+O=A, 1\cdot A=A,$$

де λ – число, О – нульова матриця. Доведемо першу з них на прикладі квадратних матриць другого порядку:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22}\end{pmatrix}=B+A.$$

Розглянемо далі добуток двох матриць. Кажуть, що матриця А *узгоджена* з матрицею В, якщо число стовпчиків матриці А дорівнює числу рядків матриці В. Добуток АВ двох матриць визначений тільки тоді, коли матриця А узгоджена з матрицею В. *Добутком* матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj} \qquad (1.1)$$

або скорочено

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\ .$$

Як бачимо ,елемент c_{ij} матриці С дорівнює сумі добутків елементів *i*–го рядка матриці А на відповідні елементи *j*–го стовпчика матриці В.

Приклад 2. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайти добутки АВ і ВА, якщо вони існують.

Розв'язання. Добуток АВ існує (матриця А узгоджена з матрицею В), а добутку ВА не існує (матриця В не узгоджена з матрицею А). Використовуючи формулу (1.1), знайдемо елементи матриці $C=AB$:

$$c_{11}=2\cdot 0+(-1)\cdot(-2)=2, c_{12}=2\cdot 1+(-1)\cdot 3=-1, c_{13}=2\cdot 2+(-1)\cdot 4=0,$$
$$c_{21}=0\cdot 0+3\cdot(-2)=-6, c_{22}=0\cdot 1+3\cdot 3=9, c_{23}=0\cdot 2+3\cdot 4=12.$$

Можемо записати

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -6 & 9 & 12\end{pmatrix}.$$

Для добутку двох матриць справедливі наступні *властивості* (при умові, що відповідні добутки існують):

$$1)\ (AB)C)=A(BC);\ 2)\ A(B+C)=AB+AC;\ ,$$

$$3)\ OA=AO=O;\ 4)\ EA=AE=A,$$

де Е і О – одинична і нульова матриця відповідно.

На прикладі квадратних матриць другого порядку доведемо одну з рівностей четвертої властивості:

$$AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що у загальному випадку для добутку двох матриць $AB\neq BA$, тобто міняти місцями множники не можна (у прикладі 2 один з добутків узагалі не існує).

Якщо кожен рядок матриці А записати як стовпчик із тим самим номером, то отримаємо нову матрицю A^T, яка називається *транспонованою* до матриці А.

Приклад 3. Для заданої матриці А визначаємо транспоновану матрицю A^T :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для операції транспонування справедливі такі *властивості*:

$$1)\ (A^T)^T = A;\ 2)\ (A+B)^T = A^T + B^T;\ 3)\ (AB)^T = B^T A^T .$$

§ 1.2. Визначники

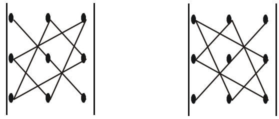
Важливою характеристикою *квадратної* матриці є її *визначник*. Визначник матриці – це число, яке отримують за допомогою певних дій над її елементами. Розглянемо тут лише методи обчислення визначників та деякі їхні властивості. Такі поняття, як порядок матриці, її елементи, головна й побічна діагональ переносяться і на відповідні їм визначники.

Визначники *другого* й *третього* порядків обчислюються відповідно за формулами :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (2.1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2.2)$$

Остання формула легко запам’ятовується за допомогою правила трикутників:



\+ -

На схемі зліва вказані правила утворення трьох перших добутків (вони беруться зі своїм знаком), а справа – трьох останніх (вони беруться із протилежним знаком).

Приклад 1. Обчислити визначники даних матриць :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи формули (2.1), (2.2) дістаємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot(-3) = 22,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot(-5) - 3\cdot 2\cdot(-5) - \\ -1\cdot 0\cdot 0 - 4\cdot 1\cdot 4 = 12 + 30 - 16 = 26.$$

Окрім вже використаного позначення, визначник матриці A може позначатися також символом det A або Δ.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який одержимо з даного за допомогою викреслювання рядка й стовпчика, що містять цей елемент (i-го рядка і j-го стовпчика). *Алгебраїчне доповнення* A_{ij} елемента a_{ij} визначається формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}\,. \qquad (2.3)$$

Приклад 2. Для матриці B з попереднього прикладу обчислити M_{11}, M_{32}, A_{11}, A_{32}.

Розв'язання.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 8; \, A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-12) = 1 \, .$$

Властивості визначників :

1. Визначник матриці A дорівнює визначнику транспонованої матриці A^{T}.

2. Визначник матриці дорівнює нулю, якщо: а) вона містить нульовий рядок або нульовий стовпчик; б) два її рядка (стовпчика) пропорційні або однакові.

3. Спільний множник одного рядка (стовпчика) виноситься за знак визначника.

4. Якщо поміняти місцями два рядки або стовпчика, то знак визначника зміниться на протилежний.

5. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на будь-яке число.

6. Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їхні алгебраїчні доповнення.

7. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Доведемо третю властивість (розглянемо визначник другого порядку):

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Розглянемо два метода *обчислення визначника n–го порядку*. Ці методи базуються на двох останніх властивостях визначників.

Метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика (шоста властивість) дозволяє поступово знижувати порядок визначників. Об'єм обчислень буде найменшим, якщо визначник розкладати за елементами рядка або стовпчика, що містить найбільше число нулів.

Приклад 3. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник по другому стовпчику:

$$\det A = 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = 2 \cdot A_{22} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13}) =$$

$$= 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2(-16 + 3 \cdot 14) = 52.$$

Суть *методу зведення визначника до трикутного вигляду* полягає у наступному: спочатку, використовуючи властивості, перетворюємо даний визначник до трикутного вигляду, а потім обчислюємо останній як добуток елементів головної діагоналі.

Приклад 4. Обчислити визначник попереднього прикладу методом зведення до трикутного вигляду.

Розв'язання. Нижче здійснена наступна послідовність дій: поміняли місцями 1-й і 2-й стовпчики; поміняли місцями 1-й і 2-й рядки; поміняли місцями 2-й і 3-й стовпчики; помножили 2-й рядок на –2 і додали до 3-го; помножили 2-й рядок на –1 і додали до 4-го;

помножили 3-й рядок на $5/4$ і додали до 4-го; перемножили елементи головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -26/4 \end{vmatrix} = 52.$$

§ 1.3. Обернена матриця. Ранг матриці

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо виконуються рівності : $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Квадратна матриця називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля. Нехай задана невироджена матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка визначається за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

де $\det A$ – визначник матриці А; $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn}$ – алгебраїчні доповнення відповідних елементів.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} і зробити перевірку, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для матриці третього порядку формула (3.1) має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці й алгебраїчні доповнення елементів:

$$\det A = 11,\ A_{11} = 5,\ A_{12} = -18,\ A_{13} = 2,\ A_{21} = 0,$$

$$A_{22} = 11,\ A_{23} = 0,\ A_{31} = -3,\ A_{32} = 2,\ A_{33} = 1.$$

Підставимо знайдені значення в записану формулу і зробимо перевірку:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Існує й інший метод обчислення оберненої матриці. Укажемо коротко його суть. Дану невироджену матрицю А перетворюємо до одиничної. Одночасно ті ж самі дії виконуємо над одиничною матрицею того ж порядку. Матриця, яка отримується з одиничної, є оберненою A^{-1}.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці A з попереднього прикладу (другим методом).

Розв'язання. Складаємо блокову матрицю, яка містить елементи заданої матриці A (записуються зліва від вертикальної риски) і елементи одиничної матриці E (записуються справа від вертикальної риски). Тут і надалі в фігурних дужках вказані дії, які виконуються над рядками матриці при переході від попередньої до наступної. Запис в перших дужках потрібно розуміти так: перший рядок переписується без змін; помноживши перший рядок вихідної матриці на -2 і додавши до другого, отримуємо другий рядок наступної матриці; помноживши перший рядок вихідної матриці на 2 і додавши до третього, дістаємо третій рядок наступної матриці. Виконуємо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{c} (-3/11)R_3 + R_1 \\ (2/11)R_3 + R_2 \\ (1/11)R_3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/11 & 0 & -3/11 \\ 0 & 1 & 0 & -18/11 & 1 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 0 & 1/11 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/11 & 0 & -3/11 \\ -18/11 & 1 & 2/11 \\ 2/11 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо далі поняття рангу матриці й один із методів його обчислення. Нехай задана матриця A розмірів $m \times n$. Деяким чином виберемо k рядків і k стовпчиків цієї матриці. З елементів, що належать вибраним рядкам і вибраним стовпчикам (стоять на перетині цих рядків і стовпчиків) складаємо визначник k–го порядку. Указаний визначник називається мінором k–го порядку матриці А.

Приклад 3. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

обчислити один мінор другого й один мінор третього порядків.

Розв'язання.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 36.$$

Мінор M_1 складається з елементів матриці А, що стоять на перетині 2, 3–го рядків і 2, 3–го стовпчиків, а мінор M_2 – 1,2,3–го рядків і 1,3,4–го стовпчиків.

Рангом матриці називається найбільший порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Позначається ранг символом *r* (або *r(A)*).

З даного означення випливає, що ранг матриці завжди не більший її меншого розміру.

Елементарними перетвореннями матриці будемо називати наступні дії:

1) множення будь–якого рядка або стовпчика матриці на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рядка або стовпчика матриці іншого, помноженого на будь–яке число;

3) перестановка місцями двох рядків або стовпчиків.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Ранг матриці можна обчислити наступним чином: за допомогою елементарних перетворень зводимо дану матрицю до трапецієвидної (або до трикутної) форми:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3k} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює числу ненульових рядків останньої матриці.

Приклад 4. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи елементарні перетворення, зводимо матрицю до трапецієвидної форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як остання матриця має два ненульових рядки, то $r(A) = 2$.

§ 1.4. Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса. Метод Жордана-Гауса

Нехай задана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = h_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = h_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі; $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}$ – числові коефіцієнти при невідомих; $h_1, h_2, ..., h_m$ – вільні члени (числа). Для системи (4.1) можна виписати наступні *основні матриці* :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

де A – основна матриця (або матриця) системи, X – матриця-стовпчик невідомих, H – матриця-стовпчик вільних членів. За допомогою вказаних матриць система (4.1) може бути представлена у вигляді:

$$AX = H. \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) є матричною формою запису системи (4.1).

Приклад 1. Виписати основні матриці для системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Якщо матрицю A доповнити стовпчиком вільних членів, то дістанемо *розширену матрицю* системи:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

Елементарними перетвореннями системи (4.1) будемо називати наступні дії :

1)множення будь–якого рівняння системи на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на будь–яке число;

3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Елементарні перетворення системи не змінюють її розв’язків. Іншими словами, після застосування до системи елементарних перетворень отримаємо систему, еквівалентну даній.

Розглянемо один з основних методів розв’язування системи лінійних рівнянь, а саме *метод Гауса* (або *метод послідовного виключення невідомих*). Нехай задана система (4.1). На першому кроці, використовуючи елементарні перетворення, виключаємо невідому x_1 з усіх рівнянь, окрім першого (першим повинно стояти рівняння, яке обов’язково містить невідому x_1). На другому кроці виключаємо невідому x_2 з усіх рівнянь, окрім перших двох (у другому рівнянні ця невідома повинна бути) і т.д. Після чергового кроку одне з рівнянь може перетворитися у числову тотожність $0 = 0$. Такі рівняння відкидаються. Можлива ситуація, коли одне з рівнянь приймає вигляд $0 = c$, де с – відмінне від нуля число. У цьому випадку остання система, а, отже, і система (4.1) несумісна, тобто не має розв’язків. Якщо система сумісна, то після виконання вказаних дій (прямого ходу методу Гауса), будемо мати :

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = q_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = q_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

або

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p + .. + b_{1n}x_n = q_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2p}x_p + \ldots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{pp}x_p + \ldots + b_{pn}x_n = q_p. \end{cases} \tag{4.6}$$

Підкреслимо, що системи (4.1) і (4.6) (або (4.5)) еквівалентні.

Система (4.5) *визначена*, тобто має єдиний розв’язок. З останнього рівняння цієї системи знаходимо невідому x_n. Підставляємо знайдене значення у передостаннє рівняння і знаходимо x_{n-1}. Продовжуючи подібним чином (обернений хід методу Гаусса), знайдемо усі невідомі.

Система (4.6) *невизначена*. Вона має нескінченну множину розв’язків. У цьому випадку необхідно вводити *основні* (або *базисні*) і *вільні* невідомі. Для системи (4.6) невідомі x_1, x_2, …, x_p – основні, а невідомі x_{p+1}, x_{p+2}, …, x_n – вільні. Введемо позначення $x_{p+1} = c_1,\ x_{p+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-p}$.Система (4.6) приймає вигляд :

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p = q_1 - b_{1p+1}c_1 - \ldots - b_{1n}c_{n-p}, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2p}x_p = q_2 - b_{2p+1}c_1 - \ldots - b_{2n}c_{n-p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{pp}x_p = q_p - b_{pp+1}c_1 - \ldots - b_{pn}c_{n-p}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Розв’язуємо останню систему (вона подібна системі (4.5)) відносно основних невідомих x_1, x_2,…, x_p .

Приклад 2. Розв'язати дані системи методом Гауса :

$$\text{а)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+6x_2-3x_3=1 \end{cases}, \text{б)}\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_2-x_3=1, \end{cases} \text{в)}\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_3=2, \\ -2x_2+3x_3=-8. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Помножимо перше рівняння системи на –3 і додамо до другого:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 0=-14. \end{cases}$$

Система не має розв'язків.

б) На практиці зручно працювати не з самою системою, а з її розширеною матрицею, виконуючи елементарні перетворення над її рядками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -3R_1+R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 2R_2+R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_2-4x_3=-14, \\ -9x_3=-27. \end{cases}$$

Здійснюємо обернений хід методу Гауса:

$-9x_3=-27, \quad x_3=3;$

$-x_2-4\cdot 3=-14, \quad x_2=2;$

$x_1+2+3=6, \quad x_1=1.$

Таким чином, система має єдиний розв’язок $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

в) Аналогічно попередньому, дістаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система (рівняння $0 = 0$ відкидається)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ \quad -2x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2 вважаємо основними, а невідому x_3 – вільною. Уведемо позначення $x_3 = c_1$. Система приймає вигляд :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 + c_1, \\ \quad -2x_2 = -8 - 3c_1. \end{cases}$$

Знаходимо основні невідомі:

$$-2x_2 = -8 - 3c_1,\ x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1; \quad x_1 + 4 + \frac{3}{2}c_1 = 5 + c_1,\ x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1.$$

Дана система має нескінченну множину розв’язків

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1, \quad x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1, \quad x_3 = c_1,$$

де c_1 – будь-яке дійсне число.

Метод Жордана-Гауса є модифікацією методу Гауса. По суті він одночасно реалізує прямий і обернений хід методу Гауса. Наведемо наступні основні моменти цього методу:

1) На першому кроці виписуємо розширену матрицю системи і вибираємо так званий *ключовий елемент* (ненульовий елемент

основної матриці). Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то відповідна невідома автоматично стає основною. Рядок і стовпчик, які містять ключовий елемент, називаються *ключовим рядком* і *ключовим стовпчиком* відповідно. Використовуючи елементарні перетворення, переходимо до матриці, у якій на місці ключового елемента стоїть одиниця, а решта елементів ключового стовпчика дорівнюють нулю.

2) На кожному наступному кроці ключовий елемент вибираємо так, щоб ключовий рядок і ключовий стовпчик не повторювалися.

Приклад 3. За допомогою методу Жордана-Гауса знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Вибрані ключові елементи будемо підкреслювати двома рисками. Маємо

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ -4R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & \underline{\underline{-10}} & 5 & -25 \\ 0 & -7 & 4 & -18 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{matrix} (2/10)\,R_2 + R_1 \\ -(1/10)R_2 \\ -(7/10)\,R_2 + R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1/2}} & -1/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_3 + R_2 \\ 2R_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

§ 1.5. Невироджені системи лінійних рівнянь. Матричний метод. Формули Крамера

Розглянемо систему (число рівнянь дорівнює числу невідомих)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Для системи (5.1) маємо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

Якщо визначник матриці А відмінний від нуля, то система (5.1) називається *невиродженою*. У випадку, коли detA = 0, кажуть, що система *вироджена*.

Нехай система (5.1) є невиродженою. Перепишемо її у матричній формі :

$$AX = H. \qquad (5.3)$$

Так як $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши рівняння (5.3) на матрицю A^{-1} зліва, отримаємо

$$X = A^{-1}H. \qquad (5.4)$$

Якщо невироджена система (5.1) розв'язується за допомогою формули (5.4), то кажуть, що вона розв'язана *матричним методом*. При застосуванні цього методу необхідно знаходити обернену матрицю A^{-1}.

На основі формули (5.4) легко отримати формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (5.5)$$

де $\Delta = \det A$ – визначник матриці системи; Δ_1 – визначник, який дістанемо з визначника Δ за допомогою заміни першого стовпчика стовпчиком вільних членів; Δ_2 – визначник, який дістанемо з визначника Δ за допомогою заміни другого стовпчика стовпчиком вільних членів і т.д.

Приклад. Задана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язати її: а) за формулами Крамера; б) матричним методом .

Розв'язання. а) Обчислюємо потрібні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

Застосовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1 \,.$$

б) Знаходимо спочатку обернену матрицю A^{-1} (див § 1.3.):

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Застосовуємо формулу (5.4):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1.$

§ 1.6. Критерій сумісності та загальна схема дослідження і розв'язування системи лінійних рівнянь

Нехай задана система лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Питання про існування розв'язків цієї системи розв'язується сформульованою нижче теоремою.

Теорема Кронеккера–Капеллі (*критерій сумісності* системи лінійних рівнянь): для сумісності системи (6.1) необхідно й достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Наведемо *загальну схему* дослідження й розв'язування системи лінійних рівнянь (6.1).

1) Визначаємо $r(A)$ – ранг матриці і $r(\overline{A})$ - ранг розширеної матриці системи. Якщо $r(A) \neq r(\overline{A}),$ то система несумісна (на цьому дослідження закінчується). Якщо ж $r(A) = r(\overline{A}) = r,$ то переходимо до наступного кроку.

2) Виділяємо *базисний мінор* матриці А, тобто відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

3) Виписуємо ті рівняння системи (6.1), числові коефіцієнти яких

(частина або усі) утворюють базисний мінор. Складена таким чином система еквівалентна системі (6.1). Якщо ранг матриці r дорівнює числу невідомих n, то здобута система невироджена, має єдиний розв'язок і може бути розв'язана будь-яким методом. Якщо ж $r < n$, то переходимо до наступного кроку.

4) Виділяємо *основні* (*базисні*) і *вільні* невідомі. Невідомі, коефіцієнти при яких увійшли у базисний мінор, вважаємо основними. Решту n-r невідомих вважаємо вільними. Вільні невідомі позначимо через $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ і переносимо у праві частини рівнянь. Розв'язуємо отриману систему відносно основних невідомих будь-яким методом (система невироджена).

Приклад. Дослідити систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

й у випадку сумісності розв'язати її.

Розв'язання. Знайдемо ранг розширеної матриці (див § 1.3). Елементарні перетворення виконуємо тільки над рядками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(\overline{A}) = 2$ (число ненульових рядків). Остання матриця визначає також і ранг матриці системи. Він дорівнює числу ненульових рядків указаної матриці без останнього стовпчика (без стовпчика вільних членів). У відповідності зі сказаним $r(A)=2$. Таким чином, $r(\overline{A})=r(A)=2.$ Отже, система сумісна.

Так як при знаходженні рангу матриці перетворення виконувалися тільки над рядками, то далі можна розглядати систему, яка відповідає останній матриці, тобто систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ \quad -10x_2+5x_3-3x_4=-11. \end{cases}$$

Виділяємо базисний мінор, тобто відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}=-10\neq 0.$$

Так як базисний мінор утворений з коефіцієнтів при x_1 і x_2 перших двох рівнянь системи, то x_1 і x_2 – основні невідомі. Вільні невідомі x_3 та x_4 позначаємо через c_1 і c_2 відповідно. Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1+3x_2=5+c_1-c_2, \\ \quad -10x_2=-11-5c_1+3c_2. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо

$$x_2=(11+5c_1-3c_2)/10.$$

Підставивши x_2 в перше рівняння, визначаємо x_1:

$$x_1=(17-5c_1-c_2)/10 .$$

Таким чином, система має нескінченну множину розв’язків $((17-5c_1-c_2)/10, (11+5c_1-3c_2)/10, c_1, c_2)$, де c_1, c_2 – будь-які дійсні числа.

§ 1.7. Однорідні системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Система (7.1), у якої вільні члени всіх рівнянь дорівнюють нулю, називається *однорідною системою лінійних рівнянь*. Відмітимо деякі особливості цієї системи. Вона завжди сумісна, так як має, принаймні, один розв'язок :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0. \tag{7.2}$$

Якщо ранг r матриці системи дорівнює числу невідомих n, то нульовий розв'язок (7.2) буде єдиним. Якщо ж $r < n$, то система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків. Таку систему можна розв'язувати методом Гауса або за загальною схемою (починаючи з другого пункту).

Нехай у системі (7.1) число рівнянь m дорівнює числу невідомих n. У цьому випадку матриця А системи буде квадратною і якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок, а якщо $\det A = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати однорідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці системи:

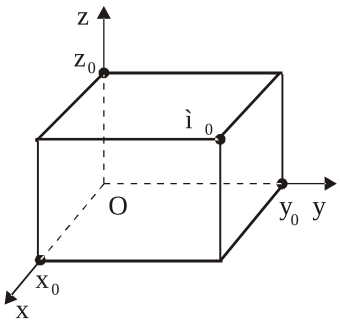
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Так як $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Розділ 2. Елементи аналітичної геометрії

§ 2.1. Декартова прямокутна система координат. Довжина відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні

Декартова прямокутна система координат *Oxyz* складається з трьох взаємно перпендикулярних осей (*осей координат*) *Ox, Oy, Oz*. На вказаних осях визначений масштаб, вони виходять з однієї точки *O* *(початку координат)* і утворюють *праву трійку* (для спостерігача, що знаходиться на осі *Oz* у точці з додатнім значенням, поворот на найменший кут від осі *Ox* до осі *Oy* здійснюється проти руху годинникової стрілки). Площини *Oxy, Oyz, Oxz* називаються *координатними площинами*. Осі *Ox, Oy* і *Oz* називаються, також, осями *абсцис, ординат і аплікат* відповідно.



Ðèñ.1

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і точка M_0 (рис. 1). Побудуємо три площини, що проходять через точку M_0, перпендикулярно координатним осям *Ox*, *Oy*, *Oz* і перетинають їх у точках x_0, y_0, z_0 відповідно. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 називається *координатами* точки M_0 у прямокутній системі координат *Oxyz*; у цьому випадку пишуть $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Відстань між двома точками M_1 (x_1, y_1, z_1) і M_2 (x_2, y_2, z_2) у просторі може бути знайдена за формулою

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.1.)$$

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і дві точки M_1 (x_1, y_1, z_1) і M_2 (x_2, y_2, z_2). Якщо точка $M(x,y,z)$ належить відрізку M_1M_2 і $\left|M_1M\right| : \left|MM_2\right| = \lambda$, то

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.2.)$$

Формули (1.2.) дозволяють за відомими координатами двох точок знаходити координати третьої. У частинному випадку, коли M – *середина відрізка* ($\lambda = 1$), маємо

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (1.3.)$$

Приклад. Точки *A (0;1;3), B (-3;4;5), C (5;0;1)* є вершинами трикутника. Знайти довжину медіани *AE* і координати точки перетину медіан трикутника *ABC*.

Розв'язання. Точка *E* –середина відрізка *BC*. Знайдемо її координати за формулами (1.3.):

$$x = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad y = \frac{4+0}{2} = 2, \quad z = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Довжина медіани –це відстань між точками *A(0;1;3;)* і *E (1;2;3;)*. Використовуючи формулу (1.1.), дістанемо

$$\left|AE\right| = \sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(3-3)^2} = \sqrt{2}.$$

Нехай *P* –точка перетину медіан, тоді, як відомо, $\left|AP\right| : \left|PE\right| = 2:1$. Для визначення координат точки *P* застосовуємо формулу (1.2.) ($\lambda = 2$):

$$x = \frac{0+2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1+2\cdot 2}{1+2} = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{3+2\cdot 3}{1+2} = \frac{9}{3}.$$

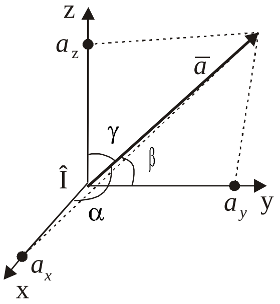
§ 2.2. Означення векторної величини. Основні поняття

Величина, яка характеризується тільки числовим значенням, називається *скалярною*. Скалярними величинами є вага, відстань і т.д. Величина, яка характеризується числовим значенням і напрямом, називається *векторною*. Прикладами таких величин можуть бути швидкість, сила і т.д. *Геометричний вектор* –це напрямлений відрізок. Будь–яку векторну величину можна представити у вигляді геометричного вектора, а тому далі будуть вивчатися тільки останні. Позначається вектор однією малою, або двома великими буквами з рискою зверху, наприклад, $\overline{a}$, $\overline{AB}$ (*A* –початок вектора, *B* - кінець).

Два вектора вважаються *рівними*, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих, мають однакову довжину і однаково напрямлені. З даного означення випливає, що далі будуть вивчатися *вільні* вектори, тобто вектори, які допускають паралельний перенос. Два вектора називаються *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих. Вектор, який має однакову довжину з вектором $\overline{a}$, колінеарний йому, але протилежно напрямлений, називається *протилежним* вектору $\overline{a}$ і позначається $\overline{a}$. Три вектора називаються *колінеарними*, якщо вони розміщені в одній площині або на паралельних площинах. *Нульовим* вектором $\overline{0}$ називається вектор, довжина якого дорівнює нулю. Напрям нульового вектора не визначений.

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і дві точки A (x_1, y_1, z_1) і B (x_2, y_2, z_2). *Координатами* вектора $\overline{AB}$ називають упорядковану трійку чисел $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Якщо a_x, a_y, a_z –координати вектора $\overline{AB}$, то пишуть $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ або

$\overline{AB} = \overline{a}(a_x, a_y, a_z)$. Відмітимо, що координати вектора – це його проекції на координатні осі. Рівні вектори мають рівні координати, а колінеарні вектори – пропорційні.



Ðèñ.2

Модуль (довжина) вектора $\overline{a}$ (a_x, a_y, a_z) позначається $|\overline{a}|$ і обчислюється за формулою

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.1.)$$

Напрям вектора $\overline{a}$ (a_x, a_y, a_z) у просторі задається за допомогою кутів α, β, γ, які цей вектор утворює з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно (рис. 2). Косинуси вказаних кутів називаються *напрямними косинусами* вектора. Легко бачити, що вони визначаються рівностями

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad (2.2.)$$

З формул (2.1.) і (2.2.) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.3.)$$

Приклад. Задані точки А (2;-1;3) і В (4;3;4). Знайти координати, модуль і напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати вектора (від координат кінця віднімаємо координати початку):

$$\overline{AB} = (4-2; 3-(-1); 4-3) = (2;4;1).$$

На основі формул (2.1.) і (2.2.) маємо:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{21}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

§ 2.3. Лінійні операції над векторами

Операції *додавання*, *віднімання* векторів і *множення вектора на число* називаються *лінійними операціями* над векторами. Додавати два вектори можна за правилом *паралелограма* (рис.3) або за правилом *трикутника* (рис.4).

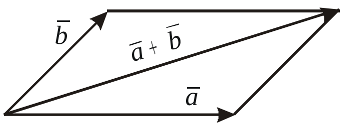


Рис. 3

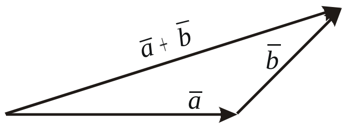


Рис. 4

Операція *віднімання* векторів визначається рівністю

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b}), \tag{3.1}$$

де $-\bar{b}$ – вектор, протилежний до вектора $\bar{b}$.

На основі формули (3.1) операція віднімання зводиться до операції додавання двох векторів. Різницю двох векторів можна знаходити, також, за правилом трикутника (рис. 5). При додаванні декількох векторів зручно використовувати правило многокутника (рис.6).

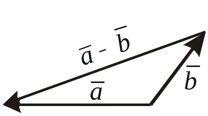


Рис. 5

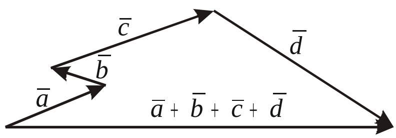


Рис. 6

Добутком додатної (від'ємної) сталої k на вектор $\bar{a}$ є вектор

$\bar{b} = k\bar{a}$, який однаково (протилежно) напрямлений з вектором $\bar{a}$ і модуль якого дорівнює $|k|\cdot|\bar{a}|$ (якщо $|k|>1$, то довжина вектора $\bar{a}$ збільшується у $|k|$ раз; якщо $|k|<1$, то довжина вектора $\bar{a}$ зменшується у $1/|k|$ раз).

Приклад 1. Нижче для заданих векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ побудовано вектор $\bar{d} = \bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}$.

Основні властивості лінійних операцій (k, l –числа):

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$; 2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;

3) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$; 4) $(k+l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$;

5) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$; 6) $k(l\bar{a}) = (kl)\bar{a}$;

7) $1\cdot\bar{a} = \bar{a}$, $(-1)\cdot\bar{a} = -\bar{a}$, $0\cdot\bar{a} = \bar{0}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то при додаванні (відніманні) двох векторів їхні відповідні координати додаються (віднімаються). Для того щоб помножити вектор на число, на це число необхідно помножити всі координати даного вектора. Для векторів $\bar{a}$ (a_x, a_y, a_z), $\bar{b}$ (b_x, b_y, b_z) і сталої k можемо записати

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \tag{3.2.}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z), \tag{3.3.}$$

$$k\bar{a} = (ka_x, ka_y, ka_z). \tag{3.4.}$$

Приклад 2. Задані вектори $\bar{a}$ (2;0;5), $\bar{b}$ (3;1;-2) і $\bar{c}$ (-1;1;0).

Знайти вектор $\overline{d} = \overline{a} - 2(\overline{b} + \overline{c}) + 3(\overline{a} - \overline{b})$.

Розв'язання. Використовуючи властивості лінійних операцій (розкриваємо дужки і зводимо подібні за звичайними правилами), маємо:

$$\overline{d} = \overline{a} - 2\overline{b} - 2\overline{c} + 3\overline{a} - 3\overline{b} = 4\overline{a} - 5\overline{b} - 2\overline{c};$$
$$4\overline{a} = (8;0;20), \quad 5\overline{b} = (15;5;-10), \quad 2\overline{c} = (-2;2;0);$$
$$\overline{d} = (8 - 15 + 2; 0 - 5 - 2; 20 + 10 - 0) = (9;-7;30).$$

§ 2.4. Лінійна залежність векторів. Базис

Нехай у просторі задані три ненульових вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$. Якщо рівність $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 -$ числа$)$

$$\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = \overline{0} \qquad (4.1.)$$

можлива тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то кажуть, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ *лінійно незалежні*. Якщо існує трійка чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля і для яких виконується рівність (4.1.), то вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *лінійно залежні*. В останньому випадку один із трьох векторів може бути представлений через лінійну комбінацію двох інших, наприклад, $c = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

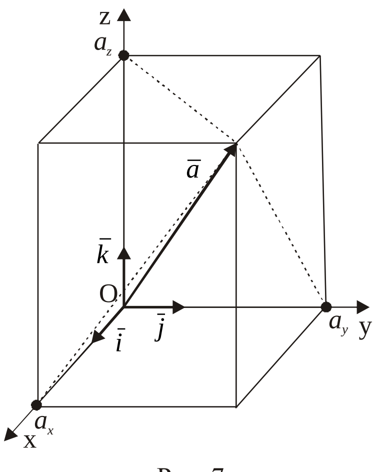


Рис. 7

Якщо ненульові вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ лінійно незалежні, то упорядкована трійка цих векторів є *базисом* у просторі. Будь–який інший вектор $\overline{d}$ може бути представлений через лінійну комбінацію базисних векторів:

$$\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} \ . \qquad (4.2.)$$

Упорядкована трійка чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називається координатами вектора $\bar{d}$ у базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Координати вектора, що були визначені у §2.2. є його координатами у ортонормованому базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис.7). Напрями останніх векторів співпадають із напрямками координатних осей, а їхні довжини дорівнюють одиниці, тобто $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Іншими словами, якщо вектор $\bar{a}$ представлений у вигляді

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad (4.3.).$$

то упорядкована трійка чисел a_x , a_y , a_z є його координатами, які були визначені у § 2.2. Надалі координати вектора $\bar{a}$ часто будуть задаватися у формі (4.3).

Нехай вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ задані своїми координатами у базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (цей базис взято для визначеності; можна було взяти будь-який інший):

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\ , \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\ ,$$

$$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}\ , \quad \bar{d} = d_x\bar{i} + d_y\bar{j} + d_z\bar{k}\ .$$

Визначимо умову, при якій вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис і знайдемо координати вектора $\bar{d}$ у цьому базисі.

Перепишемо векторну рівність (4.1.) у координатній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = 0, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = 0. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Однорідна система (4.4) має єдиний нульовий розв'язок (див. § 1.7) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$ при умові, що визначник системи відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.5)$$

Нерівність (4.5) і є шуканою умовою того, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис.

Припустимо, що умова (4.5) виконується. Знайдемо координати вектора $\overline{d}$ у базисі $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Перепишемо рівність (4.2) у координатній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Розв'язавши невироджену систему (4.6) будь-яким методом, знайдемо координати $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Приклад. Вектори $\overline{a}(1;3;2)$, $\overline{b}(2;-1;0)$, $\overline{c}(0;1;1)$, і $\overline{d}(4;8;7)$ задані у деякому базисі. Довести, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{d}$ у цьому базисі.

Розв'язання. Доведемо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис (перевіримо умову (4.5)):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 .$$

Запишемо систему (4.6):

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4, \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 8, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера: $\Delta = -3$, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -9$; $\lambda_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$, $\lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-3}{-3} = 1$, $\lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-9}{-3} = 3.$

Отже, $\overline{d} = 2\overline{a} + \overline{b} + 3\overline{c}$.

§ 2.5. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ можна перемножити двома способами. В одному випадку результатом буде число (скаляр), *а* у іншому – вектор. Відповідно визначаються скалярний і векторний добуток двох векторів.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається *число*, яке дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними. Позначається скалярний добуток одним із символів $\overline{a}\overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $(\overline{a}, \overline{b})$. Таким чином:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi, \tag{5.1}$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Скалярний добуток можна задати, також, за допомогою проекцій одного вектора на інший:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{a} \cdot пр_{\bar{a}}\bar{b} = \bar{b} \cdot пр_{\bar{b}}\bar{a} \qquad (5.2)$$

Якщо, принаймні, один із двох даних векторів нульовий, то скалярний добуток вважається рівним нулю.

Приклад 1. Відомо, що $|\bar{a}| = 5,$ $|\bar{b}| = 10$ і кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює 60°. Знайти скалярний добуток $\bar{a}\bar{b}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (5.1), маємо:

$$\bar{a}\bar{b} = 5 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 25.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a};$

2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b}), \ \alpha \in R;$

3) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c};$

4) $\bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2.$

Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, дістанемо

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) визначає скалярний добуток у *координатній формі*. Як бачимо, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат.

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}(3;0;4)$ і $\bar{b}(2;5;-3)$

Розв'язання. $\bar{a}\bar{b} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) = -6.$

З рівності (5.1) безпосередньо випливає формула для обчислення *кута* між двома ненульовими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \tag{5.4}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{5.5}$$

З останніх формул отримаємо умову *ортогональності* (перпендикулярності) двох нульових векторів:

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \tag{5.6}$$

або

$$\bar{a}_x \bar{b}_x + \bar{a}_y \bar{b}_y + \bar{a}_z \bar{b}_z = 0\,. \tag{5.7}$$

Приклад 3. Точки *A (-3;0;1), B (2;4;-5), C (0;2;3)* є вершинами трикутника. Знайти $\angle A$ трикутника *ABC*.

Розв'язання. Визначимо спочатку координати потрібних нам векторів:

$\overline{AB} = \bar{a}(5;4;-6)\,, \quad \overline{AC} = \bar{b}(3;2;2).$

Застосовуючи формулу (5.5), дістанемо

$$\cos\angle A = \frac{5\cdot 3 + 4\cdot 2 + (-6)\cdot 2}{\sqrt{25+16+36}\sqrt{9+4+4}} = \frac{11}{\sqrt{1309}} \approx 0{,}30;$$

$\angle A \approx \arccos 0{,}3 \approx 72{,}5^\circ.$

§ 2.6. Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка ненульових векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається правою, якщо після зведення її до спільного початку для спостерігача, що знаходиться на кінці вектора $\bar{c}$, поворот на найменший кут від вектора

$\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки. *Векторним добутком* двох неколінеарних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається *вектор* $\overline{c}$, який визначається наступними трьома правилами:

1) довжина вектора $\overline{c}$ задається формулою

$$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi, \tag{6.1}$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$; 2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$; 3) вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис.8).

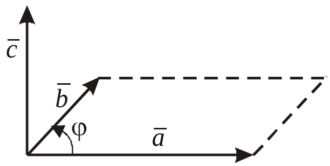


Рис. 8

Перше правило визначає довжину вектора $\overline{c}$, а два останні –його напрям. Легко бачити, що добуток правої частини формули (6.1) дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Отже, довжина вектора $\overline{c}$ дорівнює площі вказаного паралелограма.

Вважається, що векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору.

Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ будемо позначати $\overline{a} \times \overline{b}$ або $[\overline{a}, \overline{b}]$.

Властивості векторного добутку:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$;

2) $(\alpha\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\alpha\overline{b}) = \alpha(\overline{a} \times \overline{b}), \quad \alpha \in R$;

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$;

4) якщо векторний добуток двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює нульовому вектору, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ *колінеарні*.

Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

Тоді:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{6.2}$$

або

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

Площа паралелограма й *площа трикутника*, побудованих на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, обчислюються наступним чином:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}, \qquad S_{пар} = |\bar{c}|, , \qquad S_{тр} = 0{,}5|\bar{c}|. \tag{6.4}$$

Приклад. Задані два вектори $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ і $\bar{b} = \bar{j} - 2\bar{k}$. Знайти: а) вектор, перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$; б) площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Розв'язання. а) Відмітимо, що задача не має єдиного розв'язку, тобто існує нескінченне число колінеарних векторів, які задовольняють умовам цієї задачі. Одним із таких векторів є векторний добуток (див. означення):

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

б) Використовуючи (6.4), отримаємо

$S_{тр} = 0{,}5\sqrt{1+4+1} = 0{,}5\sqrt{6}$ (кв. од.).

§ 2.7. Мішаний добуток векторів

Скалярний добуток векторів $\overline{a}\times\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається *мішаним добутком* векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ і позначається $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ або $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. Таким чином, у відповідності з означенням, можемо записати

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}\,. \tag{7.1}$$

Властивості мішаного добутку:

1) мішаний добуток не змінюється, якщо в ньому поміняти місцями операції векторного й скалярного добутку:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c});$$

2) мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b};$$

3) при перестановці місцями будь–яких двох векторів мішаний добуток змінює знак на протилежний.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c},\quad \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a},\quad \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}.$$

Якщо вектори $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\overline{b}(b_x,b_y,b_z)$ і $\overline{c}(c_x,c_y,c_z)$ задані своїми координатами, то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{7.2}$$

Модуль мішаного добутку некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отже, об'єм паралелепіпеда й піраміди, побудованих на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ можуть бути знайдені за формулами:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|, \qquad V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|. \qquad (7.3)$$

Приклад 1. Точки $A_1(-3;2;5)$, $A_2(0;1;-2)$, $A_3(2;0;1)$, $A_4(4;3;5)$ є вершинами чотирикутної піраміди. Знайти її об'єм.

Розв'язання. Використовуючи (7.3), дістаємо:

$\overline{A_1A_2} = \bar{a}(3;-1;-7)$, $\overline{A_1A_3} = \bar{b}(5;-2;-4)$, $\overline{A_1A_4} = \bar{c}(7;1;0)$;

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 5 & -2 & -4 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -93; \; V_{пір} = |-93|/6 = 15{,}5 \text{ (куб. од).}$$

Використовуючи поняття мішаного добутку, *умову компланарності* (лінійної залежності) трьох ненульових векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ можна представити у вигляді

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0. \qquad (7.4).$$

Якщо мішаний добуток трьох ненульових векторів відмінний від нуля, то ці вектори *утворюють базис* у просторі (лінійно незалежні).

Приклад 2. При якому значенні параметра α вектори $\bar{a}(2;0;3)$, $\bar{b}(0;1;\alpha)$, і $\bar{c}(-1;2;5)$ компланарні ?

Розв'язання. Використовуємо умову компланарності (7.4):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad 13 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{13}{4}.$$

§ 2.8. Пряма на площині

Нехай на площині задані прямокутна система координат Oxy і лінія L. Рівняння

$$F(x,y)=0 \tag{8.1}$$

називається *рівнянням лінії* L, якщо координати x, y будь–якої точки цієї лінії задовольняють даному рівнянню, а координати будь–якої іншої точки площини – не задовольняють.

У цьому параграфі розглянемо найбільш просту лінію – пряму. Наведемо основні рівняння прямої на площині. Відмітимо, що у загальному випадку рівнянням прямої на площині є *лінійним рівнянням* відносно змінних x і y (змінні x і y входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються).

Загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax+By+C=0. \tag{8.2}$$

Вектор $\overline{n}(A,B)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних x і y, розміщений перпендикулярно до прямої (рис. 9) і називається її *нормаллю*. Можливі наступні частинні випадки рівняння (8.2): $A=0$ (відсутня змінна x) – пряма паралельна осі Ox; $B=0$ (відсутня змінна y) – пряма паралельна осі Oy; $C=0$ – пряма проходить через початок координат.

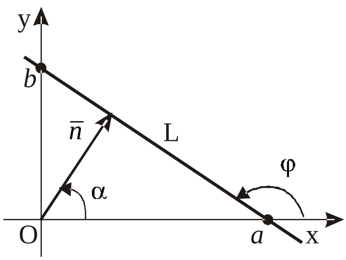


Рис.9

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y=kx+b, \tag{8.3}$$

де $k = tg\varphi$ – *кутовий коефіцієнт* прямої (рис.9), b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy. Для того щоб від загального рівняння (8.2) перейти до рівняння (8.3), необхідно розв’язати перше відносно змінної y.

Приклад 1. Пряма на площині задана рівнянням $3x-3y+5=0$. Визначити кут φ, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі Ox.

Розв’язання. Перейдемо від заданого загального рівняння до рівняння з кутовим коефіцієнтом (розв’язуємо дане рівняння відносно y): $y = x - 5/3$. Отже, $k = tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку з даним кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{8.4}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої; x_0, y_0 – координати точки, яка належить прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{8.5}$$

де x_1, y_1; x_2, y_2 – координати даних точок.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно до даного вектора:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l}, \tag{8.6}$$

де x_0, y_0 – координати точки, яка належить прямій; k, l – координати даного вектора, який паралельний до прямої (вектор $\bar{q}(k,l)$ називається *напрямним вектором прямої*).

Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{8.7}$$

де x_0, y_0 – координати даної точки, через яку проходить пряма; A, B – координати вектора, який перпендикулярний до прямої, тобто координати нормалі прямої.

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{8.8}$$

де a, b – відповідно абсциса й ордината точок перетину прямої з осями координат (рис. 9). Рівняння (8.8) легко здобувається із загального рівняння (8.2). Для цього достатньо поділити останнє на вільний член з оберненим знаком, тобто на $-C$ (мається на увазі, що $C \neq 0$).

Нормальне рівняння прямої:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{8.9}$$

де α – кут, який утворює нормаль прямої з додатнім напрямом осі Ox (рис.9); p – відстань до прямої від початку координат. Для того щоб перейти від загального рівняння (8.2) до нормального (8.9), необхідно поділити перше на число $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (знак береться оберненим знаку вільного члена C).

Відстань d від даної точки $M_0(x_0, y_0)$ до даної прямої $Ay + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8.10}$$

Приклад 2. Точки $A(1;1)$, $B(2;7)$, $C(4;3)$ є вершинами трикутника.

Знайти: а) рівняння сторони AB; б) рівняння й довжину висоти CD; в) рівняння медіани AE; г) рівняння прямої, яка проходить через точку C й паралельна стороні AB.

Розв'язання. а) Використовуючи рівняння (8.5), маємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{7-1},\ 6(x-1)=1(y-1),\ 6x-y-5=0.$$

б) Застосовуємо рівняння (8.7). Шукана пряма проходить через точку $C(4;3)$ і її нормаллю є вектор $\overline{AB}=\overline{n}(1;6)$. Отримуємо:

$$1(x-4)+6(y-3)=0,\ x+6y-22=0.$$

Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(4;3)$ до прямої AB. На основі формули (8.10), маємо

$$|CD|=\frac{|6\cdot 4-1\cdot 3-5|}{\sqrt{6^2+(-1)^2}}=\frac{16}{\sqrt{37}}.$$

в) Знайдемо спочатку координати точки E – середини сторони BC: $x_E=(2+4)/2=3$, $y_E=(7+3)/2=5$. Використовуючи рівняння (8.5), знайдемо рівняння медіани AE:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{5-1},\ 4(x-1)=2(y-1),\ 4x-2y-2=0,\ 2x-y-1=0.$$

г) Застосовуємо рівняння (8.6) $(\overline{AB}=\overline{q}(1;6))$:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{6},\ 6(x-4)=1(y-3),\ 6x-y-21=0.$$

Нехай дві прямі задані загальними рівняннями або рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0; \qquad (8.11)$$

$$y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2. \qquad (8.12)$$

Один із двох кутів між цими прямими знаходиться відповідно за допомогою формули:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \qquad (8.13)$$

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (8.14)$$

Другий кут ψ доповнює кут φ до 180°, тобто $\psi = 180^0 - \varphi$.

Умови паралельності для прямих (8.11) і (8.12) мають відповідно вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \; k_1 = k_2; \qquad (8.15)$$

умови перпендикулярності:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \; k_1 k_2 = -1. \qquad (8.16)$$

Приклад 3. На площині задані три прямі: $x + 2y + 5 = 0$, $3x - 7 = 0$, $2x + by + 1 = 0$. Знайти кут між двома першими прямими й визначити при якому значенні параметра b перша й третя прямі перпендикулярні.

Розв'язання. Так як прямі задані загальними рівняннями, то для знаходження кута використовуємо формулу (8.13):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 0}{\sqrt{1+4}\sqrt{9+0}} = \frac{3}{3\sqrt{5}}.$$

Значення параметра b знаходимо на основі першої з умов (8.16):

$$1\cdot 2 + 2\cdot b = 0, \; b = -1.$$

§ 2.9. Площина у просторі

Рівняння

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (9.1)$$

називається *рівнянням поверхні* S у прямокутній системі координат $Oxyz$, якщо координати x, y, z будь–якої точки цієї поверхні задовольняють вказаному рівнянню, а координати будь–якої іншої точки – не задовольняють.

Розглянемо основні рівняння й поняття для *площини* у просторі.

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{9.2}$$

де A, B, C – координати ненульового вектора $\bar{n}$, який перпендикулярний до площини і називається її *нормаллю*. Можливі наступні частинні випадки рівняння (9.2):

1. Один із коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю – площина паралельна відповідній координатній осі. Наприклад, рівняння $2x + 5z - 7 = 0$ описує площину, яка паралельна осі Oy.
2. Вільний член D дорівнює нулю – площина проходить через початок координат.
3. Один із коефіцієнтів A, B, C і вільний член D дорівнюють нулю – площина проходить через відповідну координатну вісь. Наприклад, площина $x + 5y = 0$ проходить через вісь Oz.
4. Два з трьох коефіцієнтів A, B, C дорівнюють нулю – площина паралельна відповідній координатній площині. Наприклад, площина $4z + 3 = 0$ паралельна координатній площині Oxy.
5. Рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ є відповідно рівнянням координатних площин Oyz, Oxz, Oxy.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{9.3}$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить площина; A, B, C - координати вектора (нормалі), який перпендикулярний до площини.

Приклад 1. Задана площина $2x-3y+z-1=0$ й точка $M_0(3;0;-2)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку і паралельна до даної площини.

Розв'язання. Так як площини паралельні, то вектор $\bar{n}(2;-3;1)$, який є нормаллю даної площини, буде також і нормаллю шуканої площини. Використовуючи формулу (9.3), запишемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n}(2;-3;1)$:

$$2(x-3)-3(y-0)+1(z+2)=0, \; 2x-3y+z-4=0.$$

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{9.4}$$

де $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ – координати трьох точок, що не лежать на одній прямій і через які проходить площина.

Рівняння площини у відрізка:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{9.5}$$

де a, b, c – відповідно абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями координат. Рівняння (9.5) є найбільш зручним для побудови площини. Для того, щоб із загального рівняння (9.2) отримати рівняння у відрізках (9.5), достатньо розділити перше на вільний член з оберненим знаком, тобто на $-D$ (мається на увазі, що

$D \neq 0$).

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;3;-1)$, $M_3(4;0;1)$. Визначити точки перетину цієї площини з осями координат і побудувати її.

Розв'язання. Застосуємо формулу (9.4):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 3-2 & -1-0 \\ 4-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-x - 4y - 5z + 10 = 0\,.$$

Перейдемо від отриманого загального рівняння до рівняння площини у відрізках (розділимо на -10):

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{2{,}5} + \frac{z}{2} = 1\,.$$

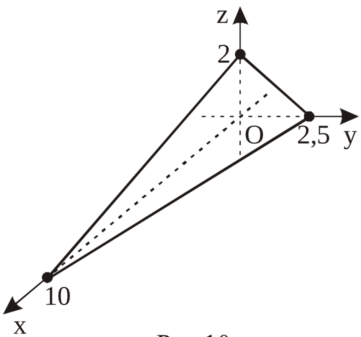


Рис.10

Отже, $(10;0;0)$, $(0;2{,}5;0)$, $(0;0;2)$ – точки перетину площини з осями координат. Використовуючи знайдені точки, будуємо площину (рис.10) (будуємо трикутник який визначає розміщення площини у просторі).

Нормальне рівняння площини:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = o, \tag{9.6}$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\bar{n}$, p – відстань від початку координат до площини. Для того щоб, від загального рівняння (9.2) перейти до нормального (9.6), потрібно розділити перше на число $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (знак береться оберненим знаку вільного члена).

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9.7}$$

Приклад 3. задана площина $2x+3y-z+5=0$. Знайти відстань до площини від: а) початку координат; б) точки $M_0(4;5;6)$.

Розв'язання. а) Знайдемо нормальне рівняння площини. Розділимо задане загальне рівняння на число $-\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=-\sqrt{14}$:

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0.$$

Отже, $p=5/\sqrt{14}$ – відстань від початку координат до площини.

б) Використовуючи формулу (9.7), дістанемо

$$d=\frac{|2\cdot 4+\cdot 3\cdot 5-6+5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

Нехай задані дві площини:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кут між заданими площинами (один із двох) дорівнює куту між їхніми нормалями $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ й обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{9.8}$$

другий кут ψ доповнює кут φ до 180^0, тобто $\psi = 180^0 - \varphi$.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{9.9}$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{9.10}$$

Приклад 4. Знайти кут між площинами $3x + y - 1 = 0$ і $x - 4y + 5z = 0$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу (9.8):

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 0\cdot 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{420}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{420}\right) \approx 92{,}8^0.$$

§ 2.10. Пряма у просторі

Наведемо основні рівняння прямої у просторі у прямокутній системі координат $Oxyz$.

Загальні рівняння:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Пряма (10.1) є прямою перетину двох *непаралельних* площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Канонічні рівняння:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{10.2}$$

де x_0, y_0, z_0 – координати даної точки, яка належить прямій; l, m, n –

координати даного ненульового вектора $\overline{q}$, який паралельний прямій. Вектор $\overline{q}(l,m,n)$ називається *напрямним* вектором прямої.

Приклад 1. задані точки $A(2;-1;3)$, $B(1;2;5)$, $C(4;4;7)$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно вектору $\overline{BC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати напрямного вектора (вектора $\overline{BC}$) і застосуємо формулу (10.2):

$$\overline{BC}=\overline{q}(3;2;2);\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \tag{10.3}$$

де x_1,y_1,z_1; x_2,y_2,z_2 – координати двох даних точок, через які проходить пряма.

Параметричні рівняння:

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt, \tag{10.4}$$

де x_0,y_0,z_0 – координати даної точки, що належить прямій; l,m,n – координати даного напрямного вектора прямої.

Нехай задані загальні рівняння (10.1). Для того щоб отримати канонічні рівняння (10.2), необхідно визначити координати деякої точки M_0, яка належить прямій і координати напрямного вектора $\overline{q}$. Одну з координат точки M_0 задаємо довільно (нас влаштовує будь-яка точка прямої). Підставляємо цю координату в рівняння (10.1) і розв'язуємо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими. За напрямний вектор $\overline{q}$ можна взяти векторний добуток нормалей

$\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ даних площин, тобто $\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ (цей вектор перпендикулярний до нормалей обох площин, а, отже, паралельний прямій їх перетину).

Для того, щоб від канонічних рівнянь (10.2) перейти до параметричних (10.4), потрібно кожен дріб формули (10.2) прирівняти до параметра t і розв'язати здобуті рівняння відносно змінних x, y, z відповідно.

Приклад 2. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 7 = 0, \\ 5x - y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

Знайти канонічні та параметричні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати x_0, y_0, z_0 деякої точки прямої. Нехай $z_0 = 0$. Тоді:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 7 = 0, \\ 5x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо напрямний вектор прямої:

$$\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5\bar{i} - 19\bar{j} - 11\bar{k} .$$

Запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;3;0)$ і паралельна вектору $\bar{q}(5;-19;-11)$:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-19} = \frac{z}{-11} .$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-1}{5} = t , \ \frac{y-3}{-19} = t , \ \frac{z}{-11} = t ; \quad x = 5t + 1 , \ y = -19t + 3 , \ z = -11t .$$

§2.11. Пряма і площина

Нехай у просторі задані пряма

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (11.1)$$

і площина

$$Ax+By+Cz+D=0\,. \qquad (11.2)$$

Кутом між прямою й площиною називається гострий кут між прямою і її проекцією на цю площину. Кут φ між прямою (11.1) і площиною (11.2) визначається за формулою

$$\sin\varphi\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,. \qquad (11.3)$$

У*мова паралельності* прямої й площини (умова перпендикулярності нормалі $\bar{n}(A,B,C)$ і напрямного вектора $\bar{q}(l,m,n)$):

$$Al+Bm+Cn=0\,. \qquad (11.4)$$

Умова перпендикулярності прямої й площини (умова паралельності нормалі $\bar{n}(A,B,C)$ і напрямного вектора $\bar{q}(l,m,n)$):

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}\,. \qquad (11.5)$$

Якщо умова (11.4) не виконується, то пряма з площиною перетинаються й мають одну спільну точку. Один із методів знаходження *координат точки перетину прямої й площини* розглянемо на наступному прикладі.

Приклад. Пряма й площина задана відповідно рівняннями

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+4}{0}\,,\ 4x-2y+z+3=0\,.$$

Знайти: а) кут між прямою й площиною; б) точку перетину прямої й площини.

Розв'язання. а) Застосувавши формулу (11.3), маємо

$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 4 + 5\cdot(-2) + 0\cdot 1|}{\sqrt{9+25+0}\sqrt{16+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{714}} \approx 0{,}075\,; \quad \varphi = \arcsin 0{,}075 \approx 4{,}3^0\,.$$

б) Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{3} = t\,,\ \frac{y}{5} = t\,,\ \frac{z+4}{0} = t\,;\ x = 3t+2\,,\ y = -19t+3,\ z = -4\cdot$$

Знайдемо значення t, при якому координати точки прямої будуть задовольняти, також, і рівнянню площини (підставляємо відповідні вирази для x, y, z в рівняння площини):

$$4(3t+2) - 2\cdot 5t + (-4) + 3 = 0\,,\quad 2t + 7 = 0 \Rightarrow t = -7/2\,.$$

Обчислюємо координати точки перетину:

$$x = 3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + 2 = -\frac{17}{2}\,,\ y = 5\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{35}{2}\,,\ z = -4\cdot$$

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

§ 3.1. Поняття границі функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і нехай точка a належить або не належить цій множині. Число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці a (або при $x \to a$), якщо для будь-якого (скільки завгодно малого) числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X,\, x \neq a$, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для вказаної границі прийняте позначення $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Приклад 1. Довести що $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5.$

Розв'язання. Нехай ε – довільне додатне число. Доведемо, що для нього існує відповідне δ (знайдемо це δ). У нашому випадку $f(x)=3x+2,\ a=1,\ A=5.$ Розглянемо нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Маємо

$$\left|(3x+2)-5\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|3(x-1)\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|x-1\right|<\varepsilon/3.$$

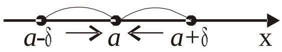
Отже, $\delta=\varepsilon/3$ (враховано, що $|x-a|=|x-1|$).

Число А називається *правою (лівою)* границею функції $f(x)$ в точці *a,* якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in X$, які задовольняють умові $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Для вказаних границь прийняті позначення (перша – права, друга – ліва):

$$\lim_{x\to a+} f(x)=A,\ \lim_{x\to a-} f(x)=A.$$

Зрозуміло, що у випадку правої границі змінна *x* наближається до числа *a,* залишаючись справа від нього, а у випадку лівої – зліва (рис. 11). Права і ліва границя називаються також *односторонніми.*

Між границею функції і її односторонніми границями в даній точці існує простий зв'язок: число А є границею функції $f(x)$ в точці *a* тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують обидві односторонні границі, причому



Ðèñ.11

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=A.$$

Число А називається границею функції $f(x)$ при x→∞, якщо для будь якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in X$, які задовольняють умові $|x|>\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначається вказана границя $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A.$

Наведемо *основні властивості* границі функції. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$. Тоді:

1). $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\pm C;$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=BC;$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{B}{C}, C\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=kB, k=const;$

5) $\lim\limits_{x\to a} k=k, k=const.$

Вказані властивості залишаються в силі для односторонніх границь і при $x\to\infty$.

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(5e^x+3\cos x+2x^2-10)$.

Розв'язання. Тут достатньо застосувати наведені властивості границь і підставити замість змінної x її граничне значення:

$$\lim_{x\to 0}(5e^x+3\cos x+2x^2-10)=5\lim_{x\to 0} e^x+3\lim_{x\to 0}\cos x+2\lim_{x\to 0} x^2-$$
$$-\lim_{x\to 0}10=5\cdot e^0+3\cos 0+2\cdot 0^2-10=5+3-10=-2$$

§ 3.2 Нескінченно мала і нескінченно велика функції

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці a, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Функція $f(x)$, яка визначена на X, називається *нескінченно великою* в точці $x=a$,якщо для будь якого (наскільки завгодно великого) числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх

$x \in X, x \neq a$, які задовольняють умові $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>\varepsilon$. Для вказаної функції прийняте позначення $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Подібні означення даються при $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$.

Між нескінченно малими і нескінченно великими існує наступний зв'язок : якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to a$, то $1/f(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$; якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$, то $1/\alpha(x)$ – нескінченно велика при $x \to a$. У зв'язку зі сказаним більш детально розглянемо одну з цих функцій, а саме, нескінченно малу.

Основні властивості нескінченно малих функцій ($x \to a$, $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$):

1) алгебраїчна сума декількох нескінченно малих функцій є нескінченно малою ;

2) добуток нескінченно малих функцій є нескінченно малою;

3) добуток нескінченно малої на обмежену функцію є нескінченно малою.

Розглянемо правила порівняння двох нескінченно малих функцій. Нехай $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ – дві нескінченно малі функції при $x \to a$, ($x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$) і нехай $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)/\beta(x))=A$. Тоді:

1) якщо $A=0$, то $\alpha(x)$ є нескінченно малою *більш високого порядку*, ніж $\beta(x)$;

2) якщо A – будь-яке відмінне від нуля число ,то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими *одного порядку*_;

3) якщо A=1, то $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ є *еквівалентними* нескінченно

малими й у цьому випадку пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x)/(\beta(x))^n) = A$, де А – будь-яке відмінне від нуля число, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *n-го порядку* відносно $\beta(x)$.

Приклад 1. Функції $\alpha(x) = x^2 - 4$ і $\beta(x) = x - 2$ є нескінченно малими одного порядку в точці $x = 2$, так як

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Нехай $\alpha(x), \beta(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$ – нескінченно малі функції в точці $x = a$. Тоді, якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ в точці $x = a$ і існує границя $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x) / \beta(x))$, то також існує границя $\lim\limits_{x \to a} (\alpha_1(x) / \beta_1(x))$, причому

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Вказана властивість еквівалентних нескінченно малих функцій може використовуватися при обчисленні границь. Вона дозволяє замінювати нескінченно малі функції еквівалентними їм нескінченно малими. Корисно пам’ятати наступні пари нескінченно малих (при x→0): $\sin x \sim x,\ \ tgx \sim x,\ \ \arcsin x \sim x,\ \ arctgx \sim x,\ \ \ln(1+x) \sim x,\ \ 1 - \cos 2x \sim 2x^2$.

Приклад 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\ln^2(1+x)} = \left\{ \dfrac{0}{0} \right\} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2.$

§3.3 Деякі типові прийоми обчислення границь та дві чудові границі

Суть обчислення границь функцій (якщо вони існують) полягає у тому, що шляхом перетворень вони зводяться до деяких стандартних або найпростіших границь. Нехай $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, $k=const$. До вказаних найпростіших границь можна віднести наступні рівності:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\left\{\frac{0}{\infty}\right\}=0,\ \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=\left\{\frac{\infty}{0}\right\}=\infty,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{\varphi(x)}=\left\{\frac{k}{\infty}\right\}=0,\ \lim_{x\to a}\frac{k}{\alpha(x)}=\left\{\frac{k}{0}\right\}=\infty.$$

Укажемо тепер типи границь, для обчислення яких обов'язково необхідні перетворення. Іншими словами, наведемо *основні види невизначеностей*:

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}.$$

Деякі стандартні прийоми обчислення границь розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10}{x^3+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{2+x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7}-x)$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу 0/0. Необхідно чисельник і знаменник даного дробу розкласти на лінійні множники (точніше, у чисельнику й знаменнику потрібно вилучити множник $x-5$). Нагадаємо, що квадратний тричлен розкладається на лінійні множники за наступною формулою:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена. Можемо записати

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-2}{x+5}=\frac{3}{8}.$$

б) Маємо невизначеність типу ∞/∞. У подібних прикладах необхідно чисельник і знаменник даного дробу поділити на x^n, де n – найбільший показник степеня змінної x в усьому виразі. У нашому випадку ділимо на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10}{x^3+x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{10}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

в)Аналогічно попередньому, поділивши на x^2, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{2+x-x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-1}=-5.$$

г) Маємо невизначеність типу $\infty-\infty$. Помножимо й поділимо даний вираз на суму $\sqrt{x^2-3}+x$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7}-x)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-7}-x)(\sqrt{x^2-7}+x)}{\sqrt{x^2-7}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-7})^2-x^2}{\sqrt{x^2-7}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7-x^2}{\sqrt{x^2-7}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7}{\sqrt{x^2-7}+x}=0\ .$$

Якщо $P_n(x)$ *і* $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно, то границя $\lim\limits_{x\to\infty}(P_n(x)/Q_m(x))$ визначається за наступним правилом: 1) якщо $n>m$, то границя відношення дорівнює нескінченності; 2) якщо $n<m$, то границя дорівнює нулю; 3) якщо $n=m$, то границя

дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях *х*. У останньому прикладі границі б) і в) можна було б обчислити за вказаним правилом.

Першою чудовою границею називають рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.1}$$

У більш загальному випадку, якщо $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1. \tag{3.2}$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x^2}$.

Розв'язання. Застосовуючи першу чудову границю, дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=50\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=50\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=50\cdot 1=50.$$

Другою чудовою границею називають кожну з двох наступних рівностей:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad (e\approx 2.72). \tag{3.3}$$

Узагальненням формул (3.3) є наступне співвідношення:

$$\lim_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e. \tag{3.4}$$

де $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$.

Друга чудова границя використовується для розкриття невизначеностей типу 1^{∞}.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{7x}$.

Розв'язання. Ця границя обчислюється за допомогою стандартних перетворень з застосуванням другої чудової границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{7x}=\left\{1^{\infty}\right\}\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\right)^{7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4}{2x-1}\cdot 7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{28x}{2x-1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{28x}{2x-1}}=e^{14}.$$

На останньому кроці перетворень використано те, що границю основи й границю показника даної функції можна обчислювати окремо, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \qquad (3.5)$$

Усі вказані методи і прийоми обчислення границь функцій можуть застосовуватися і для обчислення границь числових послідовностей. Загальний член числової послідовності $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$можна розглядати як функцію цілочисельного аргументу.

Приклад 4. Обчислити границю числової послідовності

$$\frac{4}{3},\frac{13}{6},\ldots,\frac{3n^2+1}{n^2+2},\ldots$$

Розв'язання .У даному випадку границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника і знаменника:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{3}{1}=3.$$

§ 3.4 Неперервність функцій. Класифікація точок розриву

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. Кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна* в точці x_0, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{4.1}$$

Використовуючи зв'язок між границею й односторонніми границями, умову неперервності (4.1) можна переписати у вигляді:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0). \tag{4.2}$$

Якщо функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то кажуть, що x_0 є *точкою розриву* (або в точці x_0 функція терпить розрив). Розрізняють декілька типів точок розриву, а саме:

1) точка x_0 називається *точкою усувного розриву,* якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, вони рівні між собою, але не рівні значенню функції у цій точці (функція може бути невизначеною у точці x_0) ;

2) точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, але вони не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$.

3) точка x_0 називається *точкою розриву другого роду*, якщо у цій точці не існує (дорівнює нескінченності) хоча б одна з односторонніх границь.

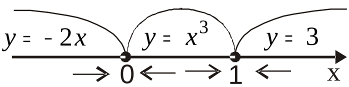
Кажуть, що функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), якщо вона неперервна у кожній точці цього інтервалу.

Відмітимо, що кожна з основних елементарних функцій неперервна у області її визначення.

Приклад. Дослідити функції на неперервність, визначити характер точок розриву (якщо вони є) та схематично зобразити їх графіки.

а) $f(x)=\begin{cases} -2x & при \quad x<0, \\ x^3 & при \quad 0\le x\le 1, \\ 3 & при \quad x>1, \end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання. а) Дана функція визначена на всій числовій прямій, але на трьох указаних інтервалах вона задається різними аналітичними виразами . Так як у кожній



Ðèñ.12

внутрішній точці інтервалів (-∞; 0), [0;1], (1;∞) функція неперервна (ці інтервали входять в область визначення відповідних елементарних функцій), то точками розриву можуть бути тільки граничні точки інтервалів, тобто $x_1=0\; і\; x_2=1$. Перевіримо виконання умови неперервності (4.2) у кожній з цих точок. Розглянемо спочатку точку $x_1=0$ (рис.12):

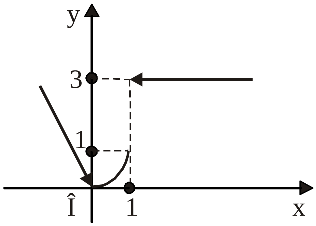
$$\lim_{x\to x_1-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-2x)=0, \quad \lim_{x\to x_1+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^3=0, \quad f(x_1)=0^3=0\,.$$

Так як $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)=0$, то в точці $x_1=0$ функція неперервна. Розглянемо далі точку $x_2=1$:

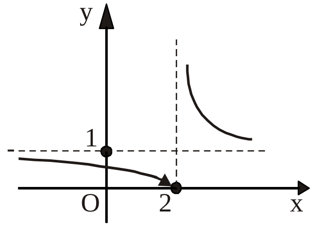
$$\lim_{x\to x_2-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^3=1, \quad \lim_{x\to x_1+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^3=0, \quad f(x_1)=0^3=0\,.$$

Так як односторонні границі існують, але не рівні між собою, то в точці $x_2 = 1$ функція терпить розрив першого роду.

Будуємо схематичний графік функції (рис.13).



Ðèñ.13



Ðèñ.14

б) Дана функція визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x_0 = 2$, яка є точкою розриву функції. Для з'ясування характеру розриву знайдемо односторонні границі функції в цій точці. При обчисленні границі зліва (справа) зручно зробити заміну змінної $x = 2-\alpha, \alpha > 0$ $(x = 2+\alpha, \alpha > 0)$.Очевидно, що умова $x \to 2-$ $(x \to 2+)$ еквівалентна умові $\alpha \to 0$. Виконаємо вказані дії:

$$\lim_{x\to 2-} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{\begin{matrix} x = 2-\alpha, & \alpha > 0; \\ x \to 2- \Leftrightarrow & \alpha \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{2-\alpha-2}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{3^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{\begin{matrix} x = 2+\alpha, & \alpha > 0; \\ x \to 2+ \Leftrightarrow & \alpha \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{2+\alpha-2}} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{\alpha}} = \infty.$$

Так як одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності, то $x_0 = 2$ – точка розриву другого роду. Будуємо схематичний графік функції (рис.14).

Розділ 4. Комплексні числа

§ 4.1. Означення та різні форми запису комплексного числа

Множину комплексних чисел можна розглядати як розширення множини дійсних чисел. Вважаємо, що з від'ємного числа добувається квадратний корінь і введемо позначення $i = \sqrt{-1}$. Указане число i називається *уявною одиницею*.

Комплексне число z визначається рівністю

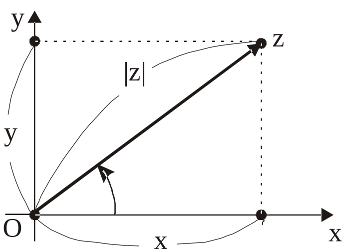
$$z = x + iy \text{ (або } z = x + yi \text{)}, \qquad (1.1)$$

де x, y – дійсні числа, i – уявна одиниця. Числа x і y називаються відповідно *дійсною* й *уявною* частинами числа z і для них прийняті позначення:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \qquad (1.2)$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то $z = x + 0 \cdot i = x$. Отже, множина дійсних чисел міститься у множині комплексних чисел (це комплексні числа із нульовою уявною частиною).

Число $\bar{z} = x - yi$ називається *спряженим* до числа $z = x + yi$.



Ðèñ.15

Нехай задана площина із прямокутною системою координат Oxy. Кожному комплексному числу $z = x + yi$ можна поставити у відповідність точку $M(x, y)$ даної площини, і, обернено, кожній точці $M(x, y)$ можна поставити у відповідність число $z = x + yi$. Площина, кожна точка якої розглядається як комплексне число, називається *комплексною площиною*, при цьому вісь Ox називається дійсною віссю, а вісь *Oy* – уявною віссю. Надалі не будемо робити різниці між комплексним числом і його зображенням на комплексній площині.

Нехай задані комплексна площина *Oxy* і число $z = x + yi$ на цій площині (рис.15). Вектор, початком якого є точка *O*, а кінцем – точка *z*, називається радіус-вектором числа *z*. Довжина радіус-вектора числа *z* називається його модулем (позначається |z|) і обчислюється за формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.3}$$

Очевидно, що $0 \le |z| < \infty$. Кут, який утворює радіус-вектор числа *z* із віссю *Ox*, називається *аргументом* цього числа й позначається *Arg z*. У загальному випадку *Arg z* приймає нескінченне число значень, а саме:

$$Arg\, z = \varphi + 2k\pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, k \in Z, \tag{1.4}$$

де $\varphi = \arg z$ - *головне значення* аргументу. Далі, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі тільки його головне значення. Для аргументу φ маємо (рис.15):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.5}$$

Приклад 1. Розв’язати рівняння $2z^2 - 2z + 5 = 0$ на множині комплексних чисел.

Розв’язання. Використавши формулу для знаходження коренів квадратного рівняння і означення комплексного числа, будемо мати

$$z_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{4} = \frac{2 \pm 6i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i.$$

$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ – комплексно-спряжені корені заданого квадратного рівняння.

Приклад 2. Знайти модуль й аргумент (головне значення) комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i.$

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.3), дістанемо

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

Аргумент знайдемо на основі третьої рівності формул (1.5). Маємо

$$tgx=-\sqrt{3},\ x=arctg(-\sqrt{3})+k\pi=-\pi/3+k\pi,\ k\in Z.$$

Інтервалу $[0;2\pi)$ належать два з указаних розв'язків, а саме $x_1=2\pi/3$ і $x_2=5\pi/3.$ Враховуючи, що дана точка z належить другий чверті комплексної площини $(x<0,\ y>0),$ остаточно отримуємо $\varphi=x_1=2\pi/3.$

Якщо комплексне число записане у вигляді $z=x+yi,$ то кажуть, що воно представлене у *алгебраїчній* формі. *Тригонометрична* і *показникова* форми комплексного числа мають відповідно вигляд:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad z=re^{i\varphi}, \tag{1.6}$$

де $r=|z|, \varphi=\arg z.$

Приклад 3. Комплексне число $z=3+3i$ представити у тригонометричній і показниковій формах.

Розв'язання. Спочатку визначаємо модуль і аргумент комплексного числа:

$$r=|z|=3\sqrt{2},\ \varphi=\arg z=\pi/4.$$

Використовуючи формули (1.6), можемо записати:

$$z=3\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)),\quad z=3\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

§ 4.2. Дії над комплексними числами

Операції *додавання, віднімання, множення* й *ділення* комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$ визначаються наступними формулами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{2.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \tag{2.2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \tag{2.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}, (z_2 \neq 0). \tag{2.4}$$

Відмітимо, що формула (2.3) здобута шляхом перемноження двох даних чисел за звичайними правилами (ураховано, що $i^2 = -1$). Для отримання формули (2.4) достатньо чисельник й знаменник дробу $(x_1 + y_1 i)/(x_2 + y_2 i)$ помножити на спряжене до знаменника число, тобто на $x_2 - y_2 i$.

Нехай комплексні числа задані у тригонометричній формі:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$

У цьому разі операції множення й ділення здійснюються за формулами:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{2.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), (z_2 \neq 0). \tag{2.6}$$

Приклад 1. Знайти $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 z_2,\ z_1 / z_2,$ якщо $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 1 + 5i.$

Розв'язання. Використовуючи формули (2.1)-(2.4), отримуємо:

$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + 5i = 3 + 2i;\ \ z_1 - z_2 = 2 - 3i - (1 + 5i) = 1 - 8i;$

$$z_1 z_2 = (2-3i)(1+5i) = 2-3i+10i-15i^2 = 2+7i+15 = 17+7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+5i} = \frac{(2-3i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{-13-13i}{26} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Операції піднесення до степеня й добування кореня для комплексних чисел визначаються наступними рівностями:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi); \qquad (2.7)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (2.8)$$

де $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. З останньої формули випливає, що корінь n-го степеня має рівно n значень. Якщо на комплексній площині побудувати коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат, то всі вказані значення кореня будуть розміщенні на цьому колі на однаковій відстані одне від одного.

Приклад 2 . Розв'язати рівняння $\sqrt[17]{z} - \sqrt{3} - i = 0.$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$z = (\sqrt{3}+i)^{17}.$$

Представимо комплексне число $\sqrt{3}+i$ у тригонометричній формі і застосуємо формулу (2.7):

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad tg\varphi = 1/\sqrt{3}, \quad \varphi = \pi/6; \quad \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{6} + i\sin\frac{17\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{17}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{16}\sqrt{3} + 2^{16}i\ .$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $z^3 = -\sqrt{3} - i.$

Розв'язання. Представимо число $-\sqrt{3}-i$ у тригонометричній формі і застосуємо формулу (2.8):

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2;tg\varphi=1/\sqrt{3},\varphi=7\pi/6;$$

$$z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 0\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18});$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 1\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 1\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18});$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 2\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 2\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}).$$

Розділ 5. Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання

§ 5.1. Поняття та властивості похідної

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі (a,b). Нехай x_0 – фіксована внутрішня точка вказаного інтервалу. Надамо аргументу x приріст Δx в точці x_0. Вважаємо, що нова точка $x_0+\Delta x$ також належить інтервалу *(a,b)*. Функція $y=f(x)$ дістане приріст $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу при $\Delta x\to 0$, тобто якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то вона називається *похідною* функції $y=f(x)$ в точці x_0 і позначається $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$ (можливі і інші позначення). Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Похідна характеризує *швидкість* зміни функції *y*.

Знаходження похідної називається також *диференціюванням* функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 + 5x$ в точці x_0.

Розв'язання.

Використовуючи означення, можемо записати:

$$f(x_0) = x_0^2 + 5x_0,$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 5(x_0 + \Delta x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x - x_0^2 - 5x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x + 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 5) = 2x_0 + 5;$$

$$f'(x_0) = 2x_0 + 5.$$

У загальному випадку похідна функції $y = f(x)$ у довільній точці x (якщо вона існує) позначається одним із символів $f'(x), y'(x), y', \dfrac{dy}{dx}$.

При розв'язанні практичних задач для визначення похідної застосовується не саме означення, а *таблиця похідних*, основні *властивості похідної* і різні *методи диференціювання*.

Таблиця похідних:

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$; 9. $(\sin x)' = \cos x$;

2. $(x)' = 1;$ 10. $(\cos x)' = -\sin x;$

3. $(c)' = 0, (c = const);$ 11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}};$ 12. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$ 13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

6. $(e^x)' = e^x;$ 14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$ 15. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ 16. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Приклад 2. Довести, що $(\sin x)' = \cos x$.

Розв'язання. Відмітимо, що функція $y = \sin x$ визначена і неперервна на інтервалі $(-\infty; \infty)$. Використовуючи одну з тригонометричних формул, дістаємо

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Знайдемо границю (застосовано другу чудову границю):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Отже $y' = \cos x$.

Приклад 3. Знайти похідну y' для наступних функцій:

а) $y = x^7$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = \dfrac{1}{x^4}$; г) $y = \log_5 x$; д) $y = 3^x$.

Розв'язання. За допомогою таблиці похідних маємо:

а) $y' = (x^7)' = 7 \cdot x^6$; б) $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$;

в) $y' = (x^{-4})' = -4 \cdot x^{-5}$; г) $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$;

д) $y' = (3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$.

Основні властивості похідної:

1. $(u \pm v) = u' \pm v'$;
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

де c – стала; u, v – функції від x.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^3 - 3 \cdot \sin x$; б) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$; в) $y = 2 \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2 - 1}{\sin x + x}$.

Розв'язання: Використовуючи основні властивості і таблицю похідних, дістаємо:

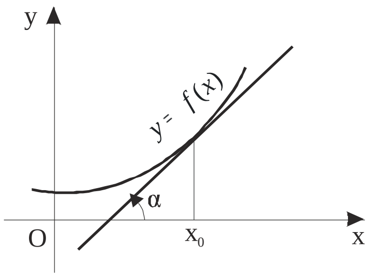
а) $y' = (x^3)' - 3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot \cos x$;

б) $y' = (\sqrt{x})' \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot (e^x)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot e^x$;

в) $y' = 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' + \dfrac{(x^2 - 1)' \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\sin x + x)'}{(\sin x + x)^2} =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\cos x + 1)}{(\sin x + x)^2} \; .$$

Геометричний зміст похідної полягає у тому, що похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 16).



Ðèñ. 16

Приклад 5. До кривої $y = x^4$ у точці з абсцисою $x_0 = \sqrt[3]{0,25}$ проведена дотична. Знайти кут між цією дотичною і додатнім напрямом осі Ox.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну у заданій точці:

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3; \; f'(x_0) = f'(0,25) = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{0,25}\right)^3 = 1 .$$

Шуканий кут визначається рівністю (геометричний зміст прохідної) $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Отже, $\alpha = 45^\circ$.

§5.2. Похідна складної функції

Розглянемо складну функцію, тобто функцію, яка задана у вигляді $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$ (або $y = f(\varphi(x))$). Похідна від такої функції (якщо вона існує) шукається за формулою:

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) \; . \qquad (2.1)$$

При використанні формули (2.1) після диференціювання замість проміжної змінної u необхідно підставити $\varphi(x)$. З формули (2.1) випливає наступне правило диференціювання складної функції: похідна складної функції дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції по проміжній змінній на похідну від проміжної функції по незалежній змінній.

Приклад 1. Знайти y', якщо:

а) $y=\sin^5 x$; б) $y=\ln(x^3+3x^2)$.

Розв'язання. а) Задану функцію можна представити у вигляді $y=u^5$, де $u=\sin x$. Згідно з формулою (2.1), маємо:

$$y'=(u^5)'\cdot(\sin x)'=5u^4\cdot\cos x=5\sin^4 x\cdot\cos x.$$

б) Аналогічно попередньому, $u=x^3+3x^2$, $y=\ln u$;

$$y'=(\ln u)'\cdot(x^3+3x^2)'=\frac{1}{u}\cdot(3x^2+6x)=\frac{1}{x^3+3x^2}\cdot(3x^2+6x).$$

У більш загальному випадку складна функція представляє собою суперпозицію декількох елементарних функцій. Наприклад, функція може мати вигляд $y=f(v), v=\psi(u), u=\varphi(x)$ (або $y=f(\psi(\varphi(x)))$). У цьому випадку справедлива формула

$$y'(x)=f'(v)\cdot\psi'(u)\cdot\varphi'(x). \qquad (2.2)$$

Підкреслимо, що добуток правої частини останньої рівності складається з похідних від кожної із задіяних функцій по відповідній змінній.

Приклад 2. Продиференціювати функції:

а) $y=tg^3(x^2+5)$; б) $y=e^{\sin^2 x}$.

Розв'язання. а) Задану функцію можемо представити у вигляді $y=v^3, v=\mathrm{tg}\,u, u=x^2+5$. На основі (2.2) маємо:

$$y' = (v^3)' \cdot (\text{tg}u)' \cdot (x^2+5)' = 3v^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x =$$

$$= 3tg^2(x^2+5) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+5)} \cdot 2x \,.$$

б) При оформленні розв'язків проміжні змінні вводити не обов'язково. Беручи послідовно похідні від показникової, степеневої і тригонометричної функцій, отримуємо

$$y' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x \,.$$

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

то похідна від y по x визначається за формулою

$$y_x{}' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2.3}$$

У формулі (2.3) і надалі індекс знизу вказує змінну, по якій береться похідна.

Приклад 3. Знайти похідну $y_x{}'$:

а) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = e^{3t-1}, \\ x = t^4 - t^2. \end{cases}$

Розв'язання. На основі (2.3) маємо:

а) $y_x{}' = \dfrac{2t}{3\sin^2 t \cdot \cos t}$; б) $y_x{}' = \dfrac{e^{3t-1} \cdot 3}{4t^3 - 2t}$.

§5.3. Диференціювання неявно заданих функцій. Логарифмічне диференціювання

Нехай функція y від x задана *неявно*, тобто у вигляді рівності

$F(x,y)=0$. Розглянемо метод диференціювання вказаної функції на конкретному прикладі.

Приклад 1. Функція y від x задана виразом $y^3+e^{x^2+y^5}+3\sin x=0.$ Знайти похідну y'.

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність, враховуючи те, що y є функцією від x:

$$3y^2y'+e^{x^2+y^5}\cdot(2x+5y^4y')+3\cos x=0.$$

Отриманий вираз розглядаємо як рівняння відносно похідної y' (воно завжди лінійне). Розв'язуємо рівняння:

$$y'(3y^2+5y^4e^{x^2+y^5})=-2xe^{x^2+y^5}-3\cos x,$$

$$y'=\frac{-2xe^{x^2+y^5}-3\cos x}{3y^2+5y^4e^{x^2+y^5}}.$$

Розглянемо показниково-степеневу функцію $y=u^v$, де u і v – функції від x. Похідна $y'(x)$ у цьому випадку визначається за допомогою *методу логарифмічного диференціювання.* Суть вказаного методу полягає у тому, що спочатку логарифмуємо рівність $y=u^v$, а потім знаходимо похідну y' за правилами диференціювання неявної функції.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=(x^2+5)^{\sin x}$.

Розв'язання.: Логарифмуємо задану рівність і робимо очевидні перетворення (використано властивість логарифму $\log_a x^p=p\log_a x$):

$$\ln y=\ln(x^2+5)^{\sin x}, \ \ln y=\sin x\cdot\ln(x^2+5).$$

Диференціюємо останню рівність за правилами диференціювання неявної функції:

$$(\ln y)' = (\sin x)' \cdot \ln(x^2+5) + \sin x \cdot (\ln(x^2+5))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2+5) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2+5} \cdot 2x,$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5} \right),$$

$$y' = (x^2+5)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5}).$$

За допомогою вказаного методу для показниково-степеневої функції $y = u^v$ легко отримати наступну формулу:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) легко запам'ятовується. Перший доданок її правої частини – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що основа u є сталою величиною (використовується таблична похідна для показникової функції a^x); другий доданок – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що показник v є сталою величиною (використовується таблична похідна для степеневої функції x^α).

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg} x)^{3x+1}$.

Розв'язання. Користуючись формулою (3.1), знайдемо

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{3x+1} \cdot \ln \operatorname{tg} x \cdot 3 + (3x+1) \cdot (\operatorname{tg} x)^{3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

§5.4. Диференціал функції. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, то її приріст

Δy у цій точці можна представити у вигляді:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{4.1}$$

де Δx – приріст аргументу у точці *x*; $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Добуток $f'(x) \cdot \Delta x$ є головною частиною приросту функції (другий доданок є нескінченно малою величиною більш високого порядку малості при $\Delta x \to 0$). Він називається *диференціалом* функції в точці x і позначається символом dy або $df(x)$. Отже,

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{4.2}$$

Приріст Δx незалежної змінної *x* співпадає з її диференціалом *dx*, тобто $dx = \Delta x$. Означення (4.2) може бути записане у вигляді:

$$dy = f'(x)dx \tag{4.3}$$

Всі основні властивості диференціала співпадають з властивостями похідної. Наприклад, для диференціала суми і добутку справедливі формули

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = udv + vdu.$$

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = 2\arcsin^2 x + \sqrt{x}$.

Розв'язання. На основі формули (4.3) маємо:

$$dy = \left(2\arcsin^2 x + \sqrt{x}\right)' dx = \left(\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

Як бачимо, знаходження диференціала *dy* по суті зводиться до знаходження похідної y'.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і нехай x_0 – внутрішня точка цього інтервалу. Припустимо, що незалежна змінна *x* отримала приріст Δx в точці x_0, причому нова точка $x = x_0 + \Delta x$ також належить інтервалу *(a,b).* Як відомо, приріст Δy і диференціал dy функції визначаються наступним чином:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \; dy = f'(x_0)dx .$$

Користуючись наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, дістаємо:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (4.4)$$

Формула (4.4) застосовується для *наближених обчислень* значення функції.

Приклад 2. Задана функція $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення цієї функції в точці $x = 1{,}97$.

Розв'язання. Значення x_0 підбираємо таким чином, щоб воно було близьким до заданого значення *x* і щоб сама функція і її похідна легко обчислювалися у цій точці. У більшості випадків x_0 є найближчим цілим числом до заданого *x*. Нехай $x_0 = 2$. Тоді:

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3, \; \Delta x = x - x_0 = 1.97 - 2 = -0.03;$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^2 + 1}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}; \; f'(x_0) = f'(2) = \frac{4}{3}.$$

Підставивши знайдені значення у формулу (4.4), отримуємо:

$$f(1.97) = f(2 + (-0{,}03)) \approx 3 + \frac{4}{3} \cdot (-0.03) = 2.96 .$$

§5.5. Поняття про похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці *x*, тобто у цій точці існує похідна $f'(x)$. Якщо для функції *f*(*x*) у точці *x* існує похідна від похідної $f'(x)$, то вона називається *похідною другого порядку* або *другою похідною*. Похідною третього порядку називається похідна від похідної другого порядку і т. д. Для вказаних похідних вищих порядків прийняті позначення y'', y''', …, $y^{(n)}$ або $f''(x)$, $f'''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$.

Приклад 1. Знайти похідні другого порядку для наступних функцій:

а) $y = 2x^3 + \sin 3x - 1$; б) $y = e^{x^2+1}$.

Розв'язання. У відповідності з означенням другої похідної можемо записати:

а) $y' = 6x^2 + 3 \cdot \cos 3x$, $y'' = \left(6x^2 + 3 \cdot \cos 3x\right)' = 12x - 9 \cdot \sin 3x$;

б) $y' = 2 \cdot xe^{x^2+1}$, $y'' = \left(2 \cdot xe^{x^2+1}\right)' = 2e^{x^2+1} + 4x^2 e^{x^2+1}$.

Якщо функцію задано *параметрично* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то похідна другого порядку від *y* по *x* обчислюється за формулою:

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'(t)} \tag{5.1}$$

або

$$y''_{x^2} = \frac{\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \varphi''(t) \cdot \psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{5.2}$$

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку y''_{x^2} від функцій, заданих параметрично:

а) $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = \cos t + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{2t-1}, \\ y = t^4 - \sin t. \end{cases}$

Розв'язання. а) Користуючись формулою (5.1), отримуємо:

$$y_x{}' = \frac{-\sin t + 1}{2t},$$

$$y_{x^2}{}'' = \frac{\left(\frac{-\sin t + 1}{2t}\right)'}{(t^2 - 3)'} = \frac{-2t\cos t - 2 \cdot (-\sin t + 1)}{8t^3}.$$

б) Застосовуючи формулу (5.2), дістаємо:

$$\varphi'(t) = 2e^{2t-1}, \ \varphi''(t) = 4e^{2t-1}, \ \psi'(t) = 4t^3 - \cos t,$$

$$\psi''(t) = 12t^2 + \sin t; \ y_{x^2}{}'' = \frac{2e^{2t-1} \cdot (12t^2 + \sin t) - 4e^{2t-1} \cdot (4t^3 - \cos t)}{(4e^{2t-1})^3}.$$

Розділ 6. Деякі застосування похідної

§ 6.1. Знаходження границі за допомогою похідної. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя застосовується для обчислення границь. Сформулюємо його суть. Нехай функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовані в околі точки x_0 і нехай в цій точці вони одночасно нескінченно малі або нескінченно великі, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \ \text{ і } \ \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 0 \ \text{ або } \ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty \ \text{ і } \ \lim_{x \to x_0} \psi(x) = \infty.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то існує також границя

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причому:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{1.1}$$

Очевидно, що правило Лопіталя використовується для розкриття невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 1. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}.$$

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя, дістаємо:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(2^x-2)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2^x\cdot\ln 2}{1}=2\ln 2;$$

$$\text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

в) При обчисленні цієї границі правило Лопіталя необхідно застосувати два рази (у загальному випадку при виконанні потрібних умов це можна робити декілька разів).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x^3+x^2)'}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{3x^2+2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(3x^2+2x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x+2}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Правило Лопіталя використовується також для розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0. У всіх вказаних випадках можна зробити перетворення, після яких дістанемо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)$.

Розв'язання. У наведених нижче розв'язках спочатку за допомогою елементарних перетворень зводимо задану границю до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, а потім застосовуємо правило Лопіталя.

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{arctgx}-\frac{1}{x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x\cdot arctgx}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{arctgx+x\cdot\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+x^2)\cdot arctgx+x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\cdot arctgx+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot arctgx+1}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})\right).$$

Так як

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)^2=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}\right)^2=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^2=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})=1, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})\right)=\infty\cdot 1=\infty .$$

§ 6.2. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована при $x=x_0$, то в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ існує дотична до графіка функції і її рівняння визначається за формулою:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.1}$$

Рівняння нормалі до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, при умові, що $f'(x_0)\neq 0$, має вигляд:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{2.2}$$

Якщо $f'(x_0)=0$, то дотична паралельна осі *Ox*, а нормаль – осі *Oy*. У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд $y=f(x_0)$, а рівняння нормалі визначається за формулою $x=x_0$.

Приклад. Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y=x^3+1$ в точці $x_0=1$.

Розв'язання. Обчислюємо всі необхідні значення:

$$f(x_0)=f(1)=1^3+1=2; \quad f'(x)=3x^2; \quad f'(x_0)=f'(1)=3\cdot 1^2=3.$$

Використовуючи формулу (2.1), отримуємо рівняння дотичної:

$$y=2+3\cdot(x-1) \text{ або } y=3x-1.$$

Застосовуючи формулу (2.2), дістаємо рівняння нормалі:

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x-1) \text{ або } y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

§ 6.3. Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі (a,b) і нехай x_1, x_2 – дві довільні точки з цього інтервалу, причому $x_1 < x_2$. Якщо для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *зростає* (*не спадає*) на інтервалі (a,b). Якщо ж для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *спадає* (*не зростає*) на інтервалі (a,b).

Інтервали зростання і спадання функції (*інтервали монотонності*) визначаються за допомогою першої похідної. Якщо $f'(x) > 0$ для будь-якого x з інтервалу (a,b), то функція $y = f(x)$ на вказаному інтервалі зростає; якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає.

Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого x з деякого околу цієї точки виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Якщо ж $f(x_0) > f(x)$, то точка x_0 називається точкою *локального максимуму*.

Мінімум або максимум (тут і надалі мова іде про локальний мінімум і локальний максимум) функції будемо називати її *екстремумом*, а точку x_0, в якій функція має екстремум – *точкою екстремуму*.

Необхідна умова екстремуму функції: якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то у цій точці перша похідна дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* цієї функції. Точки, в яких перша похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними*.

Достатні умови екстремуму функції: критична точка x_0 є точкою максимуму, якщо при переході через цю точку (зліва направо) перша похідна змінює знак з «+» на «-»; якщо ж знак змінюється з «-» на «+», то точка x_0 є точкою мінімуму (якщо знак не міняється, то екстремуму немає).

Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму будемо здійснювати за наступною схемою:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо критичні точки;
3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки і точки, в яких функція невизначена (точки розриву);
4) визначаємо знак першої похідної на кожному із отриманих інтервалів області визначення функції (для цього достатньо обчислити значення похідної в одній точці даного інтервалу);
5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали зростання, спадання і точки екстремуму (при необхідності обчислюємо і самі екстремуми).

Приклад. Знайти проміжки зростання, спадання і точки екстремуму функцій:

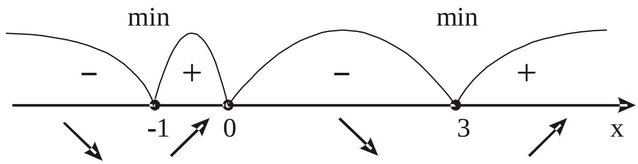
а) $y = \dfrac{3}{4x^4} + \dfrac{2}{3x^3} - \dfrac{1}{2x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}$; в) $y = x - \ln x$.

Розв'язання. а) Функція визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x=0$. Область визначення функції будемо позначати через $D(f)$. Таким чином, $D(f)=(-\infty;0)U(0;+\infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$y'=\frac{3}{4}(x^{-4})'+\frac{2}{3}(x^{-3})'-\frac{1}{2}(x^{-2})'=-3x^{5}-2x^{-4}+x^{-3}=-\frac{3}{x^{5}}-\frac{2}{x^{4}}+\frac{1}{x^{3}}=$$

$$=\frac{x^{2}-2x-3}{x^{5}};\ \ \frac{x^{2}-2x-3}{x^{5}}=0;\ \ x^{2}-2x-3=0;\ \ x_{1}=-1;\ \ x_{2}=3.$$

Відзначимо, що в точці $x=0$ похідна не існує, але ця точка є точкою розриву і не може бути точкою екстремуму функції. На

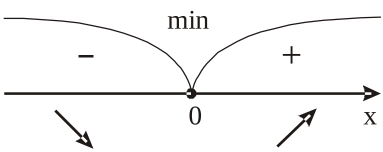


Ðèñ. 17

числовій прямій відмічаємо критичні точки, точки розриву і визначаємо знак першої похідної на отриманих проміжках (рис.17).

Маємо: функція спадає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(0;3)$; функція зростає на інтервалах $(-1;0)$ і $(3;+\infty)$; в точці $x=-1$ функція має локальний мінімум $(y_{1\min}=f(-1)=-5/12)$; точка $x=3$ також є точкою мінімуму $(y_{2\min}=f(3)=-7/324)$.

б) Функція визначена на всій числовій прямій, тобто $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Знайдемо похідну:



Ðèñ. 18

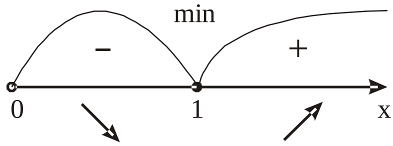
$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

В точці $x=0$ похідна не існує. Вказана точка належить області визначення функції. Отже, $x=0$ – критична точка. Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму (рис. 18).

На інтервалі $(-\infty;0)$ функція спадає; на інтервалі $(0;+\infty)$ функція зростає; $x=0$ – точка локального мінімуму $(y_{\min}=f(0)=0)$.

в) Аналогічно попередньому дістаємо (Рис. 19): $D(f)=(0;+\infty)$;

$y'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$; $\dfrac{x-1}{x}=0$; $x=1$ – критична точка.



Ðèñ. 19

Функція спадає на інтервалі $(0;1)$; функція зростає на інтервалі $(1;+\infty)$; $x=1$ – точка мінімуму $(y_{\min}=f(1)=1)$.

Відзначимо, що $x=1$ – *кутова точка*.

Розділ 7. Невизначений інтеграл

§7.1. Поняття невизначеного інтеграла. Найпростіші прийоми інтегрування

У диференціальному численні розглядалася наступна основна задача: по заданій функції $F(x)$ потрібно знайти її похідну $F'(x)=f(x)$. У інтегральному численні розглядається обернена задача: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б функції $F(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$. Іншими словами, по заданій похідній від невідомої функції необхідно знайти саму функцію.

Якщо для кожного *x* з деякого проміжку X виконується рівність

$F'(x) = f(x)$, то функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X. Наприклад, функція $F(x) = 0{,}25x^4 + 3$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на R, так як

$$F'(x) = (0{,}25x^4 + 3)' = x^3 = f(x).$$

Нехай $F(x)$ є первісною для функції $F(x)$ на проміжку X. Тоді на цьому проміжку функція $f(x)$ має нескінченну множину первісних, які можуть бути представлені у вигляді суми $F(x) + C$, де C – довільна стала. Вказана множина всіх можливих первісних називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом $\int f(x)dx$. Таким чином, можемо записати

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.1}$$

Функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*. Операцію знаходження невизначеного інтеграла (первісної) будемо називати *інтегруванням функції*.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, 4. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$ (k – стала),

5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$, 2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, 4. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$,

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$,

7. $\int e^x dx = e^x + C$, 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, 12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

13. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$,

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$.

У найпростіших випадках невизначені інтеграли можуть бути знайдені тільки за допомогою таблиці інтегралів, основних властивостей та елементарних перетворень підінтегральної функції. Вказаний підхід називається *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} \right) dx$; б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. Використовуючи основні властивості, таблицю інтегралів і очевидні елементарні перетворення, дістаємо:

а) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} \right) dx = 5\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int x^{-3} dx + \int x^{\frac{5}{3}} dx =$

$$= 5\operatorname{tg} x + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C ;$$

б) $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$

$$= \mathrm{tg}\, x - x + C .$$

Для невизначеного інтеграла справедлива також наступна властивість: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – будь-яка неперервно диференційована функція, то $\int f(u)du = F(u) + C$. На основі цієї властивості в деяких випадках інтеграл може бути зведений до табличного за допомогою прийому *внесення функції під знак диференціала*.

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$; б) $\int x e^{x^2+3} dx$.

Розв'язання. а) Застосовуємо прийом внесення функції під знак диференціала. Так як $d\sin x = (\sin x)' dx = \cos x dx$ і $\int u^{-5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C$, то можемо записати

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^5 x} = \int \sin^{-5} x d\sin x = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C .$$

б) Аналогічно попередньому, враховуючи, що $xdx = \frac{1}{2} d(x^2+3)$, маємо

$$\int x e^{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+3} d(x^2+3) = \frac{1}{2} e^{x^2+3} + C .$$

Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Отже, справедлива формула

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad (1.2)$$

де $F(x)$ – первісна для $f(x)$.

Приклад 3. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Розв'язання. а) Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+1)}{5x+1} = \frac{1}{5}\ln|5x+1|+C.$$

б) Використовуючи формулу (1.2), дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$$

§7.2. Методи інтегрування

Досить часто заміна змінної суттєво спрощує обчислення невизначеного інтеграла. Нехай перехід до нової змінної задається підстановкою $x=\varphi(t)$ і нехай $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно диференційована функція (на відповідному проміжку) нової змінної *t*. *Метод заміни змінної* (або *метод підстановки*) визначається наступною формулою

$$\int f(x)dx = |x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.1)$$

Інколи нову змінну зручно вводити за допомогою підстановки $u=\psi(x)$. У цьому випадку використовується формула

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left|u = \psi(x),\, du = \psi'(x)dx\right| = \int f(u)du \,. \tag{2.2}$$

При застосуванні формул (2.1) і (2.2) після інтегрування потрібно повернутися до змінної x.

Приклад 1. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; б) $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання. а) Застосовуючи формулу (2.1), маємо:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left|x = t^2,\, dx = 2tdt\right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1}{1+t^2}dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2arctgt + C = \left|t = \sqrt{x}\right| = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C \,.$$

б) Використовуючи формулу (2.2), дістаємо:

$$\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \left|u = \sin x,\, du = \cos x dx\right| = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C \,.$$

Якщо u і v – диференційовані функції від x, то має місце формула:

$$\int u dv = uv - \int v du \,. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) лежить в основі *методу інтегрування частинами*. При її застосуванні мається на увазі, що інтеграл у правій частині простіший, ніж інтеграл у лівій. При використанні вказаного методу підінтегральний вираз розбивається на два множника $u = \varphi(x)$ і $dv = \psi(x)dx$. Продиференціювавши першу рівність, та проінтегрувавши другу, знаходимо $du = \varphi'(x)dx$ і $v = \int \psi(x)dx$ (довільну сталу беремо рівною нулю). Далі застосовуємо формулу (2.3).

Приклад 2. Знайти інтеграли: а) $\int x\cdot\sin x dx$; б) $\int\sqrt{1+x^2}dx$.

Розв'язання. а) Використавши метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x\cdot\sin x dx=\begin{vmatrix}u=x, dv=\sin x dx,\\ du=dx, v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cdot\cos x+\int\cos x dx=$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+C\ .$$

б) Аналогічно попередньому, маємо:

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\begin{vmatrix}u=\sqrt{1+x^2}, dv=dx,\\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, v=x\end{vmatrix}=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|.$$

Можемо записати

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}dx-\int\sqrt{1+x^2}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|.$$

Помітивши, що в лівій і правій частинах однакові інтеграли, зводимо подібні і розв'язуємо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$2\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,$$

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C\ .$$

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких завжди застосовується метод інтегрування частинами:

$$\int P(x)\cdot\sin(ax+b)dx\ ,\qquad (P(x)=u\ ,\ \sin(ax+b)dx=dv\ );$$

$$\int P(x)\cdot\cos(ax+b)dx\,,\qquad (P(x)=u\,,\ \cos(ax+b)dx=dv\,);$$

$$\int P(x)\cdot a^{bx+c}dx\,,\qquad (P(x)=u\,,\ a^{bx+c}dx=dv\,);$$

$$\int P(x)\cdot\log_a xdx\,,\qquad (\log_a x=u\,,\,P(x)dx=dv\,);$$

де $P(x)$ – многочлен.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int(x^4+x^2+1)\cdot\ln xdx$; б) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$.

Розв'язання. а) Маємо один з наведених вище стандартних випадків. Інтегруємо:

$$\int(x^4+x^2+1)\cdot\ln xdx=\left|\begin{aligned}&u=\ln x, dv=(x^4+x^2+1)dx,\\&du=\frac{dx}{x}, v=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\end{aligned}\right|=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-$$

$$-\int\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^4}{5}+\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\frac{x^5}{25}-\frac{x^3}{9}-x+C\,.$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами два рази:

$$\int x^2\cdot e^{3x}dx=\left|\begin{aligned}&u=x^2, dv=e^{3x}dx,\\&du=2xdx, v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{aligned}\right|=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\int x\cdot e^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{aligned}&u=x, dv=e^{3x}dx,\\&du=dx, v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{aligned}\right|=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\cdot e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C\,.$$

§7.3. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3.1}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{3.2}$$

де *A, B, a, b, c* – сталі.

Інтеграли (3.1) зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрата у квадратному тричлені знаменника, а саме:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a((x+h)^2-l), \text{ де } h=\frac{b}{2a}, l=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

У залежності від значень параметрів a і l будемо отримувати різні табличні інтеграли. Наприклад, якщо $l<0, -\infty<a<+\infty$, то для першого інтеграла отримуємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+h)^2-l}=\frac{1}{a\sqrt{-l}}\operatorname{arctg}\frac{x+h}{\sqrt{-l}}+C;$$

якщо $a<0, l>0$, то для другого інтеграла дістаємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a((x+h)^2-l)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-a(l-(x+h)^2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{l-(x+h)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{x+h}{\sqrt{l}}+C.$$

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{2x^2-16x+46}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}}$.

Розв'язання. а) Виділяємо в знаменнику повний квадрат і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{2x^2-16x+18} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-8x+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-2\cdot 4\cdot x+16)-16+9} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-4)^2-7} = \frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-4-\sqrt{7}}{x-4+\sqrt{7}}\right| + C\ .$$

б) Аналогічно попередньому, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x-15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2-6x+7{,}5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2((x-3)^2-1{,}5)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1{,}5-(x-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{1{,}5}} + C.$$

Розглянемо інтеграли (3.2). В чисельнику виділяємо похідну від квадратного тричлена знаменника ($(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$):

$$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{bA}{2a} = r(2ax+b)+s, \text{ де } r = \frac{A}{2a},\ s = B - \frac{bA}{2a}\ ;$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{r(2ax+b)+s}{ax+bx+c}dx = r\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + s\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}\ ;$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = r\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + s\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ .$$

Два з чотирьох отриманих інтегралів були розглянуті вище, а для двох інших маємо:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C\ ;$$

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2+bx+c) = 2(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} + C\ .$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+9} dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що похідна знаменника дорівнює $4x+8$, дістаємо

$$\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+7} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8)+5-6}{2x^2+8x+7} dx = \frac{3}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} -$$

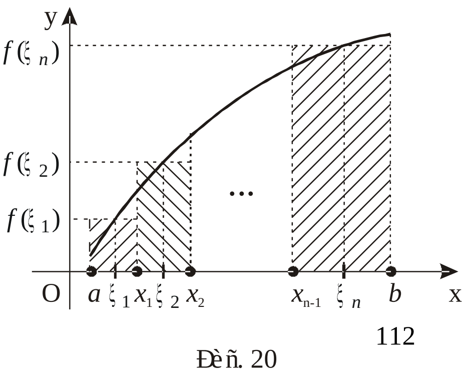
$$-\int \frac{dx}{2x^2+8x+7} = \frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+7)}{2x^2+8x+7} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-0{,}5} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+8x+9\right| - \frac{1}{4\sqrt{0.5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{0{,}5}}{x+2+\sqrt{0{,}5}}\right| + C\ .$$

Розділ 8. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла

§ 8.1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо вказаний відрізок на n частин точками поділу $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, причому



Ðèñ. 20

$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ (рис.20). Введемо позначення $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1,2,\ldots,n)$ певним чином виберемо по одній точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Складемо суму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \qquad (1.1)$$

Сума s_n називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Очевидно, що значення інтегральної суми залежить від самої функції $f(x)$, способу розбиття відрізка $[a,b]$ на *n* частин і від вибору точок ξ_i. Нехай λ – найбільша з величин Δx_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Відмітимо, що при $\lambda \to 0$ число відрізків *n* нескінченно збільшується.

Якщо існує границя інтегральної суми (1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Визначений інтеграл позначається через $\int_a^b f(x)dx$, де a, b – відповідно нижня і верхня межа інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Отже, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \qquad (1.2)$$

Якщо визначений інтеграл існує (існує границя інтегральної суми), то функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на проміжку $[a,b]$.

Дамо *геометричний зміст* визначеного інтеграла. Нехай

$f(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Кожен доданок $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ інтегральної суми (1.1) дорівнює площі прямокутника зі сторонами $f(\xi_i)$ і Δx_i (рис.1), а вся інтегральна сума дорівнює площі фігури, що обмежена віссю Ох, вертикальними прямими $x = a, x = b$ і ламаною лінією, ланки якої паралельні координатним осям. Очевидно, що при $\lambda \to 0$ вказана ламана прямує до кривої $y = f(x)$. Таким чином, визначений інтеграл (1.2) при $f(x) \geq 0$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (див. рис. 2, а), тобто площі фігури, яка зліва обмежена прямою $x = a,$ справа – прямою $x = b$, знизу – віссю Ох і зверху – кривою $y = f(x)$.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int\limits_a^a (x)dx = 0$,
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$,
3. $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$,
4. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$,
5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$,
6. $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$,

де k – стала; числа m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції *f(x)* на відрізку $[a,b]$.

§ 8.2. Обчислення визначеного інтеграла

В основі обчислення визначеного інтеграла лежить *формула Ньютона-Лейбніца*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2.1}$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx$; б) $\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x} \right) dx$.

Розв'язання. а) Використовуючи (2.1), отримуємо:

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

б) Застосовуючи третю та четверту властивості, дістаємо:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x} \right) dx = 3\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx + 5\int\limits_0^1 e^{2x} dx =$$

$$= \left(3\operatorname{arctg} x + \frac{5}{2}e^{2x} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{2}e^2 - \frac{5}{2}.$$

Розглянуті в першому розділі метод інтегрування частинами і метод заміни змінної переносяться і на випадок визначеного інтеграла. *Інтегрування частинами* у визначеному інтегралі здійснюється за допомогою формули

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du. \qquad (2.2)$$

Даний метод застосовують до тих же функцій, що й у випадку невизначеного інтеграла.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 x \cdot e^{3x} dx$.

Розв'язання. На основі (2.2) маємо:

$$\int\limits_0^2 x \cdot e^{3x} dx = \left| u = x,\, dv = e^{3x}dx,\, du = dx,\, v = \frac{1}{3}e^{3x} \right| = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^2 e^{3x}dx = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^2 = \frac{5}{9}e^6 + \frac{1}{9}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі при застосуванні підстановки $x = \varphi(t)$ базується на формулі:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (2.3)$$

Нові межі інтегрування у правій частині визначаються рівностями $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.

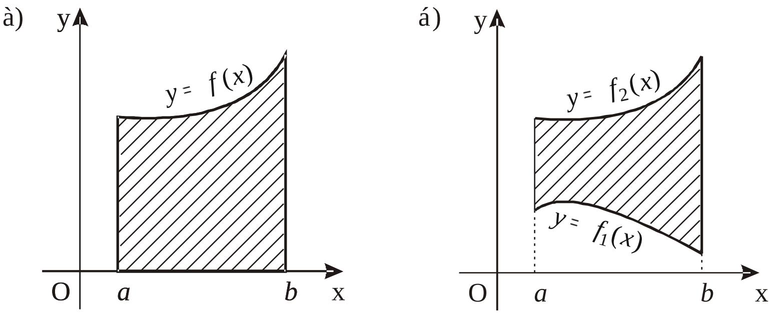
Розв'язання. Використовуючи (2.3), отримуємо:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \left| \begin{array}{l} x = t^2,\, dx = 2tdt, \\ \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1,\, \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2tdt}{t(t+1)} =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

§ 8.3. Площа плоскої фігури

Площа криволінійної трапеції (рис. 21, а), тобто площа фігури, яка



Ðèñ. 21

обмежена прямими $x = a, x = b\ (a < b)$, віссю Ох і кривою $y = f(x)\ (f(x) \geq 0)$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (3.1)$$

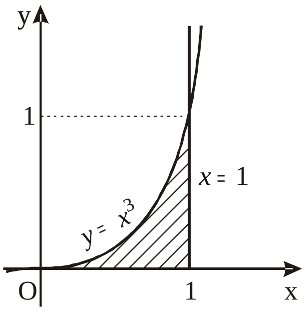
Площа фігури (рис. 21, б), яка обмежена прямими $x = a, x = b\ (a < b)$ і кривими $y = f_1(x), y = f_2(x)\ (f_1(x) \leq f_2(x))$ обчислюються за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx\,. \qquad (3.2)$$

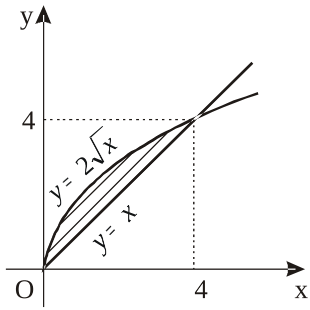
Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^3, y = 0, x = 1$; б) $y = 2\sqrt{x}, y = x$.

Розв'язання. а) Побудувавши графіки всіх заданих рівнянь,



Ðèñ. 22



Ðèñ. 23

одержимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 22). Застосовуємо формулу (3.1), причому звертаємо увагу на те, що підінтегральна функція) $f(x)$ визначається рівнянням лінії, яка обмежує криволінійну трапецію зверху:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

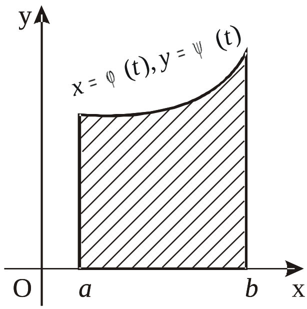
б) Спочатку будуємо фігуру (рис. 23). Розв’язавши систему двох рівнянь $y = 2\sqrt{x}$ і $y = x$, одержимо координати точок перетину кривих, а саме (0;0) і (4;4). Застосовуємо формулу (3.2):

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

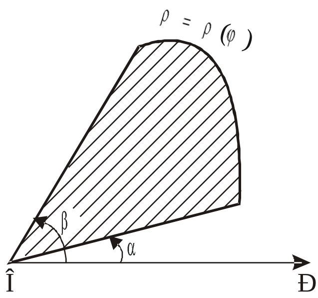
Якщо верхня межа криволінійної трапеції (рис.24) задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (3.3)$$

Площа криволінійного сектора (рис.25), заданого в полярних



Ðèñ. 24



Ðèñ. 25

координатах співвідношенням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, визначається наступною рівністю:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi . \qquad (3.4)$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

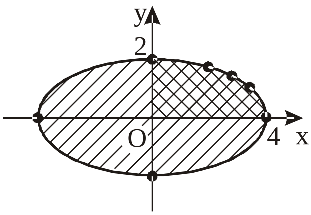
а) $x=4\cos t,\ y=2\sin t$; б) $\rho=a\cos 2\varphi$.

Розв'язання. а) Визначаємо декілька опорних точок, які наведені нижче в таблиці, та будуємо задану криву (рис. 26).

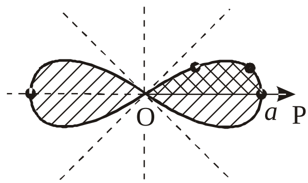
t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
x	4	3,46	2,83	2,00	0	-4	0
y	0	1	1,41	1,73	2	0	-2

Враховуючи симетрію фігури, знаходимо площу четвертої частини (подвійна штриховка) і множимо її на 4. Так як крива задана параметричними рівняннями, то застосовуємо формулу (3.3). Знайдемо межі інтегрування:

$$4\cos\alpha=0\Rightarrow\alpha=\pi/2,\ 4\cos\beta=4\Rightarrow\beta=0 .$$



Ðèñ. 26



Ðèñ. 27

Обчислюємо площу:

$$S=4\int_{\pi/2}^{0}2\sin t(-4\sin t)dt=-32\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t dt=-16\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=-16(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^{0}=8\pi .$$

б) При побудові кривої необхідно мати на увазі, що вона визначена не для всіх значень аргументу φ. Так як $\rho \geq 0$, то дістаємо

$$a\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4].$$

З врахуванням сказаного визначаємо опорні точки, які наведені нижче в таблиці, та будуємо криву (рис. 27).

φ	$-\pi/4$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$
ρ	0	a	$0{,}87a$	$0{,}5a$	0	0	a	0

Застосовуючи формулу (3.4) і враховуючи симетрію, маємо

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

§ 8.4. Довжина дуги кривої

Довжина l дуги кривої $y = f(x), a \leq x \leq b$ обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{4.1}$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$, то формула (4.1) перетворюється до вигляду:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \tag{4.2}$$

У випадку полярних координатах, коли лінія задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, довжина дуги визначається формулою:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\,. \qquad (4.3)$$

Довжина дуги просторової кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ обчислюється за формулою:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,. \qquad (4.4)$$

Приклад 1. Обчислити довжину дуги параболи $y=0{,}5x^2$ від $x=0$ до $x=1$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.1). Знайдемо спочатку підінтегральну функцію:

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\left(\left(0{,}5x^2\right)'\right)^2}=\sqrt{1+x^2}\,.$$

Обчислюємо довжину (знаходження первісної див. § 7.2, прикл. 2б):

$$l=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\,.$$

Приклад 2. Знайти довжину дуги астероїди $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ від $t=0$ до $t=\pi/2$.

Розв'язання. Лінія задана параметричними рівняннями, тому скористаємося формулою (4.2). Маємо:

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{\left(6\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2+\left(6\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}=$$

$$=6\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=6\cos t\cdot\sin t=3\sin 2t\,;$$

$$l=\int_0^{\pi/2}3\sin 2t dt=-\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{3}{2}(-1-1)=3\ .$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=a\cos\varphi$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.

Розв'язання. Крива задана у полярній системі координат. Застосуємо формулу (4.3):

$$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi=a\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a\pi\ .$$

§ 8.5. Невласні інтеграли

Розглянемо спочатку *невласні інтеграли з нескінченими границями* (*невласні інтеграли першого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$. Невласний інтеграл від цієї функції на пів нескінченному інтервалі визначається наступним чином:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta}f(x)dx,\ . \tag{5.1}$$

Якщо границя у правій частині записаної формули існує, то кажуть, що невласний інтеграл *збігається*; якщо ж границя не існує, то інтеграл *розбігається*. Аналогічно для функції $f(x)$, яка неперервна на інтервалі $[-\infty;b)$, маємо:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b}f(x)dx\ . \tag{5.2}$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на R, то невласний інтеграл з нескінченними границями від цієї функції визначається так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (5.3)$$

де c – довільне число. Невласні інтеграли правої частини останньої рівності досліджуються за допомогою формул (5.2) і (5.1).

Приклад 1. Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються): а) $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (5.2):

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{\alpha}^{1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty} (\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\alpha) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

б) Використовуючи (5.1), отримуємо:

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{e}^{\beta} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{e}^{\beta} (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d\ln x = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{e}^{\beta} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \left(\sqrt[3]{\ln^2\beta} - \sqrt[3]{\ln^2 e}\right) = \frac{3}{2}(\infty - 1) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

Розглянемо тепер *невласні інтеграли від функцій, які мають точки розриву* (*невласні інтеграли другого роду*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, а в точці $x = b$ вона терпить розрив або невизначена. Невласний інтеграл від цієї функції на проміжку $[a,b]$ визначається наступною рівністю:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0} \int_{a}^{\beta} f(x)dx. \qquad (5.4)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(a;b]$, а в точці $x = a$

терпить розрив або невизначена, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx. \qquad (5.5)$$

У випадку, коли функція $f(x)$ терпить розрив у внутрішній точці $x = c$ проміжку $[a,b]$, невласний інтеграл визначається наступним чином:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx\ . \qquad (5.6)$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл (або показати, що він розбігається) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання: Так як при $x = 1$ підінтегральна функція невизначена ($\ln 1 = 0$), то маємо невласний інтеграл. Застосовуємо формулу (5.5):

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha \to 1+0} \int_\alpha^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha \to 1+0} \int_\alpha^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d\ln x = \lim_{\alpha \to 1+0} 2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_\alpha^e =$$

$$= 2 \lim_{\alpha \to 1+0} \left(\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln \alpha}\right) = 2(1-0) = 2.$$

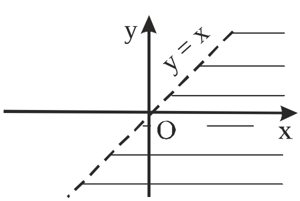
Розділ 9. Диференціальне числення функції декількох змінних

§ 9.1. Поняття функції декількох змінних

Теорія функції однієї змінної, яка вивчалася раніше, дозволяє дослідити взаємозв'язок між двома змінними величинами, але на практиці часто виникає ситуація, коли взаємозалежними є вже не дві, а три і більше величин. Наприклад, сила току в провіднику залежить від напруги й опору; об'єм прямокутного паралелепіпеда визначається трьома лінійними розмірами; кількість витраченого автомобілем палива залежить від пройденої відстані, швидкості, рельєфу дороги, ваги вантажу і т. д. У зв'язку зі сказаним виникла необхідність введення поняття функції декількох змінних.

Нехай задано множину Z, елементами якої є дійсні числа z й множину D, елементами якої є упорядковані пари дійсних чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел (x, y) із множини D за певним законом ставиться у відповідність єдине число z із множини Z, то кажуть, що z є *функцією двох незалежних змінних* x і y. Для вказаної функціональної залежності прийнято позначення $z = f(x, y)$ (або $z = z(x, y)$). Множина D називається *областю визначення* або *областю існування* функції . z, а множина Z – *областю її значень*.

Область визначення зручно зображати у вигляді сукупності точок на площині у декартовій прямокутній системі координат *Oxy* (*x* і *y* розглядаються як абсциса й ордината точки відповідно). Як правило, областю визначення функції двох змінних є деяка обмежена або необмежена область площини.



Ðèñ. 28

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln(x - y)$.

Розв'язання. Так як логарифмічна функція визначена тільки для додатного аргументу, то необхідно, щоб x та y задовольняли нерівність $x - y > 0$ або

$y < x$. Це означає , що областю визначення є півплощина, що розміщена під прямою $y = x$, за виключенням цієї прямої (рис. 28).

Геометричним зображенням функції двох змінних (її графіком), як правило, є деяка поверхня у просторі. Наприклад, графіками функцій $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і $z = 1 + 5x - y$ є півсфера й площина відповідно.

Аналогічно попередньому визначаються функції трьох і більше змінних. Якщо кожній трійці дійсних чисел (x, y, z) із заданої множини Ω (елементами множини є упорядковані трійки чисел) ставиться у відповідність єдине дійсне число u із заданої множини U , то кажуть, що u є *функцією трьох незалежних змінних* x, y і z. Для цієї залежності прийнято позначення $u = f(x, y, z)$. Область визначення Ω для функції трьох змінних можна задати сукупністю точок у просторі в декартовій прямокутній системі координат *Oxyz*.

§ 9.2. Границя та неперервність функції декількох змінних

Число A називається *границею функції* $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $r > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умові $|MM_0| < r$, виконується нерівність

$$| f(x, y) - A| < \varepsilon |.$$

Для вказаної границі прийнято наступне позначення:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Приклад 1. Знайти границі: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. а) Знаходимо границю за допомогою вказаних очевидних перетворень:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{2-\sqrt{xy+4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(2+\sqrt{xy+4})}{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(2+\sqrt{xy+4})}{-xy} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2+\sqrt{xy+4}) = 4 .$$

б) Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (перша чудова границя), маємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 0\cdot 1 = 0 .$$

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить області визначення функції, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) . \tag{2.1}$$

Уведемо позначення:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) .$$

Рівність (2.1) можна подати у наступному вигляді:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0 . \tag{2.2}$$

Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $z = 3x^2 - y^2$.

Розв’язання. Дана функція визначена на всій площині *Oxy*. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї площини. Перевіримо виконання рівності (2.2) в цій точці. Можемо записати

$$\Delta z = 3(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - (3x^2 - y^2) = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2) = 0 .$$

Таким чином, дана функція неперервна на всій площині *Oxy*.

§ 9.3. Частинні похідні функції декількох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$ і нехай точка $M(x, y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околом. *Частинним приростом функції* $z = f(x, y)$ *по змінній* x в точці $M(x, y)$ називається приріст функції z за умови, що незалежна змінна x одержує приріст Δx, а незалежна змінна y зберігає стале значення, тобто

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) . \qquad (3.1)$$

Аналогічно визначається *частинний приріст z по змінній y*:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) . \qquad (3.2)$$

Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ функції z до приросту Δx аргументу x за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Позначається вказана частинна похідна одним із символів $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, z'_x, f'_x(x, y)$. Можемо записати:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} . \qquad (3.3)$$

Аналогічно визначається *частинна похідна по y* (позначається одним із символів $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, z'_y, f'_y(x,y)$):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (3.4)$$

Як випливає з означення, при знаходженні частинної похідної по x потрібно вважати, що y є сталою величиною, а x – змінною. При знаходженні частинної похідної по y вважаємо, що x є сталою, а y – змінною.

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ від функцій:

$$\text{а) } z=4x^3+3y^2\operatorname{tg}x; \quad \text{б) } z=4\ln\left(\frac{x^2}{y}+1\right)+y^x.$$

Розв'язання. а) Вважаючи, що x – змінна, а y – стала, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4(x^3)'_x+3y^2(\operatorname{tg}x)'_x=12x^2+\frac{3y^2}{\cos^2 x}.$$

Вважаємо, тепер, що y – змінна, а x – стала:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(4x^3)'_y+3\operatorname{tg}x(y^2)'_y=6y\operatorname{tg}x.$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x}=\left(4\ln\left(\frac{x^2}{y}+1\right)+y^x\right)'_x=4\frac{1}{\dfrac{x^2}{y}+1}\left(\frac{x^2}{y}+1\right)'_x+y^x\ln y=$$

$$=\frac{4y}{x^2+y}\cdot\frac{2x}{y}+y^x\ln y=\frac{8x}{x^2+y}+y^x\ln y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(4\mathbf{ln}\left(\frac{x^2}{y}+1\right)+y^x\right)'_y=4\frac{1}{\dfrac{x^2}{y}+1}\cdot\left(\frac{x^2}{y}+1\right)'_y+xy^{x-1}=$$

$$= \frac{4y}{x^2 + y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2} \right) + xy^{x-1} = -\frac{4x^2}{y(x^2 + y)} + xy^{x-1}.$$

§ 9.4. Диференціал функції декількох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Нехай точка $M(x, y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околом. Якщо незалежні змінні x і y здобули в точці $M(x, y)$ приріст Δx і Δy відповідно, то *повний приріст* Δz заданої функції визначається рівністю:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{4.1}$$

Припустимо тепер, що в деякому околі точки $M(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні. Можна показати, що при виконанні даних умов повний приріст Δz визначається через частинні похідні наступним чином:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \tag{4.2}$$

де α_1 і α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$. У цьому випадку функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x, y)$. Сума перших двох доданків правої частини формули (4.2), яка є головною частиною приросту, називається *повним диференціалом* і позначається символом dz. Таким чином:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y. \tag{4.3}$$

Для незалежних змінних $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ (диференціал дорівнює приросту). Отже, формулу (4.3) можна переписати у вигляді:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy \,. \qquad (4.4)$$

Перший доданок правої частини формули (4.4) (або (4.3)) називається *частинним диференціалом* по змінній x, а другий – по змінній y. Як бачимо, повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Подібно до попереднього визначається диференціал функції трьох і більше змінних. Для функції $u = f(x, y, z)$ можемо записати:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \,. \qquad (4.5)$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функцій:

а) $z = x^2 + y^x$, б) $z = u^2 v + w^3 e^{uv}$.

Розв'язання. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$;

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + y^x \ln y)dx + xy^{x-1}dy \,;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv + vw^3 e^{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = u^2 + uw^3 e^{uv}$, $\frac{\partial z}{\partial w} = 3w^2 e^{uv}$;

$$dz = (2uv + vw^3 e^{uv})du + (u^2 + uw^3 e^{uv})dv + 3w^2 e^{uv}dw.$$

У відповідності з формулою (4.2) для малих значень Δx та Δy має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$. Підставивши в останнє співвідношення замість Δz і dz відповідні вирази, одержимо формулу для наближеного обчислення:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \qquad (4.6)$$

Приклад 2. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z за вказаних значень аргументів x та y, якщо

$$z = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x = 1{,}09; \quad y = 1{,}973\,.$$

Розв'язання. Застосовуємо формулу (4.6):

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}09, \quad \Delta y = -0{,}027;$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{4y^3}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}};$$

$$f(1{,}2) = \sqrt[3]{1 + 16 + 10} = 3, \quad \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial x} = \frac{1}{9}, \quad \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial y} = \frac{32}{27}.$$

Отже, $\sqrt[3]{1{,}09^3 + 1{,}973^4 + 10} \approx 3 + \frac{1}{9} \cdot 0{,}09 - \frac{32}{27} \cdot 0{,}027 = 2{,}978\,.$

§ 9.5. Частинні похідні вищих порядків

Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ в деякій області D має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$. Указані похідні в загальному випадку також є функціями двох змінних і можна ставити питання про існування їхніх частинних похідних. Частинні похідні від $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ (якщо вони існують) називаються *частинними похідними другого порядку.* Вказані похідні визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Дві останні похідні називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

Приклад 1. Для функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Аналогічно попередньому визначаються частинні похідні вищих порядків для функції трьох і більше змінних.

Приклад 2. Задана функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial z}\left(-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-$$

$$-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+$$

$$+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}+\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}=$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}+\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=0.$$

Що й треба було довести.

Якщо змішані частинні похідні неперервні в деякій області, то в цій області вони рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (5.1)$$

Приклад 3. Знайти змішані частинні похідні функції $z=x^4y^2+4x^3-y^2$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^2+12x^2;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=8x^3y;$ $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^4y-2y;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=8x^3y$. Як бачимо, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

§ 9.6. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в заданій області

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$, якщо знайдеться такий окіл цієї точки, що для всіх (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$). Точки локального мінімуму або максимуму називають також точками *локального екстремуму*.

Наведемо *необхідні умови екстремуму*. Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ диференційована і досягає локального екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{6.1}$$

Точки, в яких виконуються умови (9.1), називаються *стаціонарними*. Отже, якщо функція може досягати в якійсь точці свого екстремального значення, то така точка – стаціонарна. Іншими словами, точки локального екстремуму функції слід шукати серед її стаціонарних точок.

Проте не всі стаціонарні точки є точками екстремуму. Для цього повинні бути виконані *достатні умови екстремуму*. Наведемо вказані умови. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Припустимо, що в самій точці M_0 і деякому її околі вказана функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \tag{6.2}$$

Тоді, якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум. А саме, максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$) та мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$). Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремум відсутній.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3+1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(-1;1)$. Обчислюємо другі похідні:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -3, \quad f''_{yy}(x,y) = -6y.$$

Перевіряємо виконання достатніх умов у стаціонарних точках. В точці $M_1(0;0)$ маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Так як $\Delta < 0$, то дана точка не є точкою екстремуму. В точці $M_2(-1;1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$ і $f''_{xx}(-1;1) = -6 < 0$, то дана точка є точкою локального максимуму; $f(-1;1) = 1$.

Нагадаємо, що функція однієї змінної $y = f_1(x)$, яка диференційована на відрізку $[a,b]$, приймає найбільше та найменше значення на цьому відрізку або в стаціонарних точках (стаціонарними точками є розв'язки рівняння $f_1'(x) = 0$), що належать відрізку $[a,b]$, або на його кінцях.

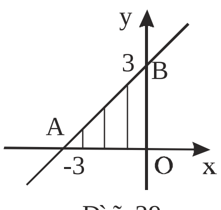
Розглянемо тепер задачу про обчислення найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$ в заданій області D. Нехай вказана функція диференційована в області D, а сама область D замкнена і обмежена. Тоді найбільше та найменше значення досягаються функцією або в стаціонарних точках, що належать області D, або на межі даної області. Нехай область D обмежена лініями, рівняння яких представлені у формі $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ або $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$. Наведемо далі схему розв'язування поставленої задачі.

1. Знаходимо всі стаціонарні точки функції, що лежать в області D, і визначаємо її значення в цих точках.

2. Досліджуємо функцію на межі області. На лінії $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ функція z приймає вигляд $z = f(x, \varphi(x)) = f_1(x)$. Розв'язавши рівняння $f_1'(x) = 0$, знаходимо стаціонарні точки функції однієї змінної $f_1(x)$. Обчислюємо значення вказаної функції на кінцях відрізку $[a, b]$ і в стаціонарних точках, що йому належать. На лінії $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$ здобудемо функцію однієї змінної $z = f(\psi(y), y) = f_2(y)$. Досліджуємо її на відрізку $[c, d]$ аналогічно попередньому. Виконуємо вказані дії по всій межі області D.

3. Вибираємо з одержаних значень функції найбільше та найменше.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - y^3 - 3xy$ в області D, що обмежена лініями $y = x + 3$, $x = 0$, $y = 0$.



Ðèñ. 29

Розв'язання. Зобразимо область D у системі координат *Oxy* (рис. 29). В попередньому прикладі були визначені стаціонарні точки даної функції, а саме $M_1(-1;1)$ і $M_2(0;0)$. Обчислюємо значення функції в цих точках (обидві точки належать області D): $z_1 = f(-1;1) = 1$, $z_2 = f(0,0) = 0$. Межа області D складається із трьох відрізків AO, OB і AB (див. рис.13). Досліджуємо дану функцію на кожному з них. На відрізку AO ($y = 0,\quad -3 \le x \le 0$) функція z приймає вигляд $z = f_1(x) = x^3$. Досліджуємо, далі, здобуту функцію однієї змінної на відрізку $[-3;0]$.

$$f_1'(x) = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad x = 0 .$$

Так як значення функції z в точці (0;0) вже знайдено, то обчислюємо її значення лише в точці $A(-3;0)$: $z_3 = f_1(-3) = f(-3;0) = -27$. На відрізку OB:

$$x = 0, \quad 0 \le y \le 3; \quad z = f_2(y) = -y^3; \quad f_2'(y) = -3y^2, \quad -3y^2 = 0, \quad y = 0;$$

$$z_4 = f_2(3) = f(0;3) = -27 .$$

На відрізку AB:

$$y = x + 3, \quad -3 \le x \le 0; \quad z = f_3(x) = x^3 - (x+3)^3 - 3x(x+3) =$$

$$= -12x^2 - 36x - 27, \quad f_3'(x) = -24x - 36, \quad -24x - 36 = 0, \quad x = -1{,}5;$$

$$z_5 = f_3(-1{,}5) = f(-1{,}5;1{,}5) = 0 .$$

Отже, $z_{найб} = 1$ при $x = -1,\ y = 1$; $z_{найм} = -27$ при $x = -3,\ y = 0$ й при $x = 0,\ y = 3$.

§ 9.7. Метод найменших квадратів

В багатьох експериментальних дослідженнях для кожного значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ змінної величини x визначаються відповідні значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ змінної величини y. Іншими словами, експериментально визначається функція y від аргументу x, причому задається вказана функція табличним способом. Проте, більш зручною для подальшого аналізу є аналітична форма функціональної залежності, тобто виникає потреба представлення знайденої функції у вигляді співвідношення $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – аналітичний вираз. Така задача може бути розв'язана за допомогою *методу найменших квадратів*.

Конкретна форма виразу $\varphi(x)$ визначається характером здобутої експериментальної залежності та, можливо, теоретичними міркуваннями. У відповідності з методом найменших квадратів функція y задається у вигляді $y = \varphi(x, a, b, \ldots, c)$, де $a, b, \ldots, c$ – невідомі параметри. Складаємо суму

$$S(a,b,\ldots,c) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i, a, b, \ldots, c) - y_i)^2 . \qquad (7.1)$$

Сума (7.1) характеризує міру відхилення розрахункових значень величини y від експериментальних. Невідомі параметри $a, b, \ldots, c$ необхідно визначити таким чином, щоб вказана сума приймала найменше значення, тобто задача зводиться до знаходження мінімуму функції декількох змінних $S(a, b, \ldots, c)$. Записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції (прирівнюємо до нуля частинні похідні по змінним $a, b, \ldots, c$)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial a} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial b} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial c} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Розв'язком системи (7.2) є значення параметрів $a, b, \dots, c$, при яких функція $S(a, b, \dots, c)$ може приймати мінімальне значення.

У випадку лінійної залежності $y = ax + b$ маємо:

$$\varphi(x_i, a, b) = ax_i + b, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial b} = 1.$$

Система (7.2) приймає вигляд

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{7.3}$$

Приклад. В результаті експериментальних досліджень між величинами *x* та *y* була встановлена залежність, яка наведена в таблиці.

x	1	3	5	7	10
y	6	5	3	2	1

За допомогою методу найменших квадратів визначити аналітичну залежність $y = ax + b$. Зобразити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму в декартовій прямокутній системі координат *Oxy*.

Розв'язання. Визначаємо числові коефіцієнти системи (7.3):

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 184, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26\,,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 60, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 17\,.$$

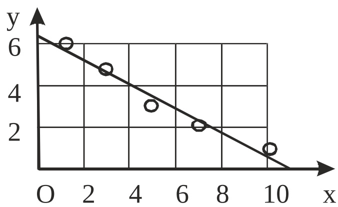
Складаємо систему (7.3) і розв'язуємо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 184a + 26b = 60, \\ 26a + 5b = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} 92a + 13b = 30, \\ 26a + 5b = 17; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 92 & 13 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 13 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = -71, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 92 & 30 \\ 26 & 17 \end{vmatrix} = 784;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{71}{122} \approx -0{,}58; \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{784}{122} \approx 6{,}43\,.$$

Отже, $y = -0{,}58x + 6{,}43$. Будуємо знайдену пряму та відмічаємо задані точки (рис. 30).



Đèñ. 30

Розділ 10. Диференціальні рівняння

§ 10.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує між собою незалежну змінну *x*, шукану функцію *y* та її похідні різних порядків. Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то диференціальне рівняння містить вже не звичайні, а частинні похідні і називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Далі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння (слово „звичайні” у їхній назві будемо опускати).

Порядком диференціального рівняння називається порядок його старшої похідної. Таким чином, у загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна представити у вигляді:

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 . \tag{1.1}$$

Відмітимо, що у частинних випадках деякі з величин $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ можуть явно не входити у диференціальне рівняння n-го порядку. *Розв'язком* диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, яка після підстановки у дане рівняння перетворює його у тотожність. Очевидно, що *розв'язування* (або *інтегрування*) диференціального рівняння зводиться до знаходження його розв'язку.

Приклад. Показати, що функція $y = x^3 - \sin 2x + 3x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну y'' і підставляємо відповідні вирази у задане рівняння:

$$y' = 3x^2 - 2\cos 2x + 3, \; y'' = 6x + 4\sin 2x;$$

$$6x + 4\sin 2x + x^3 - \sin 2x + 3x - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0, \; 0 = 0 .$$

Початковими умовами диференціального рівняння (1.1) називаються наступні умови (задаються значення функції та її похідних при певному значенні незалежної змінної):

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.2}$$

де $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ і яка задовольняє наступним двом умовам: а) вона є розв'язком при будь-яких значеннях указаних довільних сталих; б) при будь-яких початкових умовах (1.2) довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можуть бути визначені таким чином, що вказані початкові умови будуть задовольнятися.

Якщо у загальному розв'язку всім довільним сталим надати певні числові значення, то здобудемо так званий *частинний розв'язок* диференціального рівняння. *Розв'язати задачу Коші* означає, що необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початковим умовам (1.2). Якщо загальний розв'язок знайдено неявно, тобто у вигляді $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то кажуть, що знайдено *загальний інтеграл* диференціального рівняння (1.1). *Частинний інтеграл* здобувається із загального за допомогою надання довільним сталим певних числових значень.

§ 10.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Зробимо спочатку одне зауваження. У теорії диференціальних рівнянь похідна y' часто позначається символом $\frac{dy}{dx}$. Указане позначення розглядається як відношення двох диференціалів, які можуть відокремлюватися один від одного.

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку та його початкова умова мають відповідно вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0\,. \qquad (2.1)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від однієї довільної сталої С. Розглянемо далі деякі основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним *рівнянням із відокремленими змінними* називається наступне рівняння:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0\,. \qquad (2.2)$$

Указане рівняння розв'язується за допомогою безпосереднього інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $(x^2 + e^{3x})dx + (2y + \cos 5y)dy = 0$; б) $\sqrt{y}\,y' + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

Розв'язання. а) $\int (x^2 + e^{3x})dx + \int (2y + \cos 5y)dy = 0$,

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}e^{3x} + y^2 + \frac{1}{5}\sin 5y + C = 0\,.$$

б) Замінюємо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, помножуємо здобуте рівняння на dx й інтегруємо: $\sqrt{y}\,\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$, $\sqrt{y}dy + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = 0$,

$$\int \sqrt{y}dy + \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = 0, \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \arcsin x + C = 0\,.$$

Диференціальне рівняння *з відокремлюваними змінними* має вигляд

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0\,. \qquad (2.3)$$

Як бачимо, у лівій частині цього рівняння кожен із множників залежить тільки від однієї змінної. Розділивши його на добуток

$M_2(y)N_1(x)$, здобудемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

а) $2x(1+y^2)dx + (3+x^2)dy = 0$; б) $(y - yx^2)y' = 5x + xy^2$.

Розв'язання. а) Ділимо рівняння на добуток $(1+y^2)(3+x^2)$ і інтегруємо: $\frac{2xdx}{3+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$, $\int \frac{d(3+x^2)}{(3+x^2)} + \int \frac{dy}{1+y^2} = 0$,

$$\ln|3+x^2| + \operatorname{arctg} y + C = 0.$$

б) Робимо спочатку прості, очевидні перетворення:

$$y(1-x^2)\frac{dy}{dx} = x(5+y^2), \quad y(1-x^2)dy = x(5+y^2)dx.$$

Ділимо останнє рівняння на добуток $(1-x^2)(5+y^2)$ і інтегруємо:

$$\int \frac{ydy}{5+y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(5+y^2)}{5+y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln|5+y^2| + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| = \frac{1}{2}\ln|C|, \quad \ln|(5+y^2)(1-x^2)| = \ln C,$$

$$(5+y^2)(1-x^2) = C.$$

Звертаємо увагу на те, що з метою спрощення кінцевого результату довільна стала представлена за допомогою логарифма (таке допускається).

Рівняння $y' = f(x, y)$ будемо називати *однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку, якщо для будь-якого відмінного від нуля λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y = ux$, де u – нова шукана функція.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x-y}$.

Розв'язання. Покажемо, що задане рівняння є однорідним.

$$f(x,y) = \frac{y}{x-y}; \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda y}{\lambda (x-y)} = \frac{y}{x-y} = f(x,y) .$$

Зробимо заміну $y = ux,\ y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{ux}{x-ux}, \quad u'x = \frac{u}{1-u} - u, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1-u}, \quad \int \frac{1-u}{u^2}du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int (u^{-2} - \frac{1}{u})du = \int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| + C,$$

$$\frac{x}{y} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \ln|x| + C = 0, \quad x + y\ln|y| + Cy = 0.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y' (величини y і y' входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються). Указане рівняння можна представити у формі

$$y' + P(x)y = Q(x) . \tag{2.4}$$

Розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді $y = uv$, де $u,\ v$ – нові шукані функції. Очевидно, що $y' = u'v + uv'$. Підставимо y і y' в рівняння (2.4):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x) . \tag{2.5}$$

Прирівняємо до нуля вираз у дужках у формулі (2.5) і знайдемо функцію u:

$$u' + P(x)u = 0, \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Звертаємо увагу на те, що при інтегруванні довільна стала береться рівною нулю. Підставимо функцію u в рівняння (2.5) і знайдемо функцію v:

$$e^{-\int P(x)dx} v' = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Враховуючи, що $y = uv$, отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C\right). \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) можна використовувати для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Здійснюємо підстановку $y = uv$, і розв'язуємо рівняння за наведеною вище схемою ($y' = u'v + uv'$):

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2}\cos x, \quad v(u' - 2xu) + uv' = e^{x^2}\cos x;$$

$$u' - 2xu = 0, \quad \int \frac{du}{u} = 2\int x dx, \quad \ln|u| = x^2, \quad u = e^{x^2};$$

$$e^{x^2} v' = e^{x^2}\cos x, \quad v' = \cos x, \quad \int dv = \int \cos x dx, \quad v = \sin x + C;$$

$$y = e^{x^2}(\sin x + C).$$

Другий спосіб. Розв'яжемо рівняння за допомогою формули (2.6). У нашому випадку $P(x) = -2x, \quad Q(x) = e^{x^2}\cos x$. Знайдемо потрібні інтеграли:

$$\int P(x)dx = \int (-2x)dx = -x^2 ;$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int e^{x^2} \cdot \cos x \cdot e^{-x^2} dx = \int \cos x dx = \sin x + C .$$

Підставимо знайдені інтеграли у формулу (2.6):

$$y = e^{x^2} (\sin x + C) .$$

Рівнянням Бернуллі називається наступне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n; \quad n \neq 0, \quad n \neq 1 . \qquad (2.7)$$

Аналогічно попередньому, воно розв'язується за допомогою підстановки $y = uv$.

Розглянемо рівняння виду

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} , \qquad (2.8)$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – числові коефіцієнти. Очевидно, що якщо $c_1 = c_2 = 0$, то рівняння (2.8) є однорідним. У зв'язку зі сказаним будемо вважати, що хоча б один із коефіцієнтів c_1, c_2 відмінний від нуля. Розглянемо два можливі випадки вказаного рівняння.

1) Коефіцієнти при x і y пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до рівняння *з відокремлюваними змінними* за допомогою підстановки $z = a_1 x + b_1 y$ (або $z = a_2 x + b_2 y$), де z – нова функція. Продиференціювавши останню рівність, знайдемо y': $z' = a_1 + b_1 y', \quad y' = (z' - a_1) / b_1$.

2) Коефіцієнти при x і y не пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до *однорідного* за

допомогою підстановки $x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k$, де x_1 – нова незалежна змінна, y_1 – нова функція; $h,\ k$ – числа, які визначаються розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{2.9}$$

Відмітимо, що при вказаній підстановці $dx = dx_1, \quad dy = dy_1$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\text{а) } y' = \frac{x - y + 3}{3x - 3y + 5}; \quad \text{б) } (y-1)dx = (x - y + 3)dy.$$

Розв'язання. а) Так як коефіцієнти при x і y пропорційні ($\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$), то розв'язок знайдемо за допомогою підстановки $z = x - y$, ($y = x - z$, $y' = 1 - z'$):

$$1 - z' = \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{3z+5}{z+4}dz = 2dx,$$

$$\int (3 - \frac{7}{z+4})dz = \int 2dx, \quad 3z - 7\ln|z+4| = 2x + C,$$

$$3(x-y) - 7\ln|x - y + 4| = 2x + C.$$

б) Перепишемо задане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-y+3}$.

Коефіцієнти при x і y не пропорційні ($\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$). Складемо систему (2.9) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} k - 1 = 0, \\ h - k + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ h = -2 \end{cases}.$$

Зробимо заміну $x = x_1 - 2, \quad y = y_1 + 1$:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{y_1+1-1}{x_1-2-(y_1+1)+3}, \quad \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{y_1}{x_1-y_1}.$$

Здобуте однорідне рівняння інтегрується за допомогою підстановки $y_1=ux_1$ (див. приклад 3).

§ 10.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)}=f(x). \tag{3.1}$$

Враховуючи, що похідна *n*-го порядку дорівнює похідній від похідної $n-1$-го порядку, можемо записати

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=f(x), \quad \int dy^{(n-1)}=\int f(x)dx, \quad y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1.$$

Здобуте диференціальне рівняння $n-1$-го порядку відноситься до типу рівняння (3.1) і до нього можна застосувати вказані вище дії. Поступово знижуючи порядок рівняння, визначаємо шукану функцію *y*.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'''=6x+\cos 2x$.

Розв'язання. Поступово знижуємо порядок заданого рівняння і визначаємо функцію *y*:

$$\frac{dy''}{dx}=6x+\cos 2x, \quad \int dy''=\int(6x+\cos 2x)dx, \quad y''=3x^2+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1;$$

$$\frac{dy'}{dx}=3x^2+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1, \quad y'=x^3-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2;$$

$$\frac{dy}{dx}=x^3-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2, \quad y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно шукану функцію *y*, тобто рівняння виду

$$F(x, y', y'') = 0\ . \tag{3.2}$$

Указане рівняння зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p, (y'' = p')$, де p – функція від *x*. Після здійснення вказаної заміни здобудемо рівняння $F(x, p, p') = 0$. Проінтегрувавши його, визначаємо функцію $p = \varphi_1(x, C_1)$. Враховуючи, що $p = y'$, маємо $y' = \varphi_1(x, C_1)$. Розв'язуємо останнє рівняння і знаходимо функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x^2 + x; \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

Розв'язання. Так як задане рівняння не містить явно *y*, то робимо підстановку $y' = p, (y'' = p')$, де p – функція від *x*. Здобудемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $p' - \frac{1}{x}p = x^2 + x$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $p = uv, (p' = u'v + uv')$:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + x, \quad v(u' - \frac{1}{x}u) + uv' = x^2 + x;$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}, \quad u = x;$$

$$xv' = x^2 + x, \quad v' = x + 1, \quad v = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1;$$

$$p = x(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1), \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x\ .$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільної сталої C_1 і інтегруємо здобуте диференціальне рівняння:

$$1=\frac{1}{2}+1+C_1, \quad C_1=-\frac{1}{2}; \quad y'=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x;$$

$$y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+C_2 .$$

Визначаємо значення довільної сталої і записуємо кінцеву відповідь:

$$0=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+C_2, \quad C_2=-\frac{5}{24}, \quad y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{24} .$$

Розглянемо далі диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну *x*, тобто рівняння виду

$$F(y,y',y'')=0 . \tag{3.3}$$

Зробимо підстановку $y'=p$, де p – функція від y. Друга похідна у даному випадку визначається рівністю $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ або $y''=p\frac{dp}{dy}$.

Отже, рівняння (3.3) перетворюється до наступного рівняння першого порядку $F(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$. Відмітимо, що у цьому рівнянні величина y виступає як незалежна змінна, а величина p – як шукана функція. Розв'язавши вказане рівняння, знайдемо функцію $p=\varphi_1(y,C_1)$ або $y'=\varphi_1(y,C_1)$. Інтегруємо здобуте рівняння першого порядку і визначаємо функцію $y=\varphi(x,C_1,C_2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y''=(y')^2 \operatorname{tg} y$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння типу (3.3). Робимо заміну $y'=p$ (p – функція від y; $y''=p\frac{dp}{dy}$) і визначаємо функцію p:

$$p\frac{dp}{dy}=p^2 \operatorname{tg} y, \quad \int\frac{dp}{p}=\int \operatorname{tg} y dy, \quad \ln|p|=-\ln|\cos y|+\ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{\cos y}\right|, \quad p = \frac{C_1}{\cos y}.$$

Замінюємо p на y' і розв'язуємо здобуте рівняння:

$$y' = \frac{C_1}{\cos y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos y}, \quad \int \cos y dy = \int C_1 dx, \quad \sin y = C_1 x + C_2 .$$

§ 10.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідних y' і y'', тобто це рівняння виду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{4.1}$$

де $a_1, a_2, f(x)$ – функції від x або сталі числа. Якщо права частина рівняння (4.1) тотожно дорівнює нулю, то отримаємо

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.2}$$

Рівняння (4.1) називається *неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку*, а рівняння (4.2) –*однорідним*.

Нехай $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2). Якщо можна підібрати сталі коефіцієнти α і β, які не рівні одночасно нулю і які дозволяють утворити тотожну рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно залежними*. Легко показати, що відношення таких розв'язків дорівнює сталому числу. Якщо ж коефіцієнти α і β підібрати вказаним вище чином неможливо, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно незалежними*. Сформульовані означення лінійної залежності і лінійної незалежності залишаються у силі і для довільних функцій y_1 і y_2.

Припустимо, тепер, що $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (4.2). У цьому випадку *загальний розв'язок* указаного рівняння представляється у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 , \tag{4.3}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, знаходження загального розв'язку рівняння (4.2) можна звести до знаходження двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

Приклад. Показати, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Записати загальний розв'язок указаного рівняння.

Розв'язання. Підставляємо функції та відповідні похідні в задане рівняння (похідні необхідно попередньо знайти):

$$y_1' = e^x,\ y_1'' = e^x;\ e^x - 3e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0;$$

$$y_2' = 2e^{2x},\ y_2'' = 4e^{2x};\ 4e^{2x} - 6e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0.$$

Для з'ясування питання про лінійну незалежність розглянемо відношення заданих розв'язків: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$. Так як відношення не дорівнює сталому числу, то y_1 і y_2 лінійно незалежні. На основі формули (4.3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) можна представити в наступній формі

$$y = \bar{y} + y^* , \tag{4.4}$$

де y^* – будь-який *частинний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння, а $\bar{y}$ – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння (рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$).

§ 10.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = 0\,, \qquad (5.1)$$

де p, q – сталі числа. Особливістю даного рівняння є те, що його розв'язок може бути знайдений без застосування операції інтегрування.

Частинні розв'язки рівняння (5.1) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k – числовий коефіцієнт. Підставивши вказаний розв'язок у задане рівняння і враховуючи, що $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $e^{kx} \neq 0$, здобудемо

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0\,. \qquad (5.2)$$

Квадратне рівняння (5.2) відносно невідомої k називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (5.1). Відмітимо, що формально рівняння (5.2) здобувається з рівняння (5.1) за допомогою заміни y'', y', y на $k^2, k, 1$ відповідно. Якщо k є розв'язком рівняння (5.2), то функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (5.1).

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ визначаються формулами

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac. \qquad (5.3)$$

Для рівняння (5.2) маємо

$$k_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2},\ D=p^2-4q. \qquad (5.4)$$

Розглянемо усі можливі випадки стосовно розв'язків характеристичного рівняння.

1. Характеристичне рівняння має дійсні й різні корені k_1 і k_2 (дискримінант додатній). Функції $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ є частинними розв'язками диференціального рівняння (5.1). Так як

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const,\ (k_1\neq k_2)\,,$$

то y_1 і y_2 лінійно незалежні. Отже, на основі формули (4.3) попереднього параграфа загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\,, \qquad (5.5)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''+3y'-10y=0$.

Розв'язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2+3k-10=0;\ D=49;\ k_1=-5,\ k_2=2\,.$$

Так як корені дійсні й різні, то загальний розв'язок визначається за допомогою формули (5.5), а саме $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$.

2. Характеристичне рівняння має дійсні і рівні корені $k_1=k_2=k$

(дискримінант дорівнює нулю). У цьому випадку частинними лінійно незалежними розв’язками рівняння (5.1) будуть функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ і для знаходження загального розв'язку здобудемо наступну формулу

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)\,. \qquad (5.6)$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;\ D = 0;\ k_1 = k_2 = 4\,.$$

Оскільки корені дійсні й рівні, то застосувавши формулу (5.6), здобудемо $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

3. Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (дискримінант від'ємний). Можна показати, що для такого диференціального рівняння частинними лінійно незалежними розв'язками будуть функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Отже, загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)\,. \qquad (5.7)$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 25 = 0;\ D = -64,\ \sqrt{D} = 8i;\ k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i\,.$$

Так як корені комплексні, то на основі формули (5.7) маємо

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)\,.$$

§ 10.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.1}$$

де p, q – числові коефіцієнти; $f(x)$ – функція від x ($f(x)$ не дорівнює тотожно нулю). Загальний розв'язок рівняння (6.1) будемо шукати у вигляді

$$y = \bar{y} + y^*, \tag{6.2}$$

де y^* – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння; $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{6.3}$$

Спочатку за допомогою характеристичного рівняння інтегруємо диференціальне рівняння (6.3) і визначаємо складову $\bar{y}$ (див. попередній параграф), а потім знаходимо складову y^*. Загальна форма останньої залежить від типу функції $f(x)$ та від коренів характеристичного рівняння. Наведемо, далі, деякі частинні випадки рівняння (6.1) у залежності від правої частини $f(x)$ і вкажемо методи визначення відповідних частинних розв'язків y^*.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x), \tag{6.4}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно x. Частинний розв'язок y^* рівняння (6.4) шукаємо у вигляді

$$y^* = x^r Q_n(x), \tag{6.5}$$

де r – кратність кореня $k=0$ у відповідному характеристичному рівнянні; $Q_n(x)$ – повний многочлен n-го степеня, тобто

$$Q_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}x+A_n\,. \tag{6.6}$$

З метою визначення невідомих числових коефіцієнтів $A_0, A_1, \cdots, A_n$ підставляємо розв'язок (6.5) у рівняння (6.1). Після зведення подібних здобудемо рівність двох многочленів. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x (два многочлена рівні, якщо рівні коефіцієнти при однакових степенях x) отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $A_0, A_1, \cdots, A_n$. Розв'язуємо систему і записуємо частинний розв'язок y^*.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'=6x^2+2x$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.4) і розв'язок шукаємо у формі (6.2). Розглядаємо спочатку відповідне однорідне рівняння і визначаємо складову $\bar{y}$:

$$y''-2y'=0;\ k^2-2k=0,\ k(k-2)=0;\ k_1=0,\ k_2=2;$$

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}\,.$$

Частинний розв'язок y^* шукаємо за формулою (6.5). У нашому випадку $Q_n(x)$ – многочлен другого степеня (права частина заданого рівняння є многочленом другого степеня) і $r=1$ (число $k=0$ є однократним коренем характеристичного рівняння), отже $y^*=xQ_2(x)=x(A_0x^2+A_1x+A_2)$. Знаходимо похідні $(y^*)', (y^*)''$ і підставляємо їх в задане рівняння:

$$(y^*)'=3A_0x^2+2A_1x+A_2,\ (y^*)''=6A_0x+2A_1;$$

$$6A_0x+2A_1-2(3A_0x^2+2A_1x+A_2)=6x^2+2x;$$

$$-6A_0x^2+(6A_0-4A_1)x+2A_1-2A_2=6x^2+2x\ .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і розв'язуємо здобуту систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 \left| \ -6A_0=6\ , \right. \\ x \ \left| \ 6A_0+4A_1=2, \right. \\ x^0 \left| \ 2A_1-2A_2=0\ , \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0=-1, \\ A_1=2, \\ A_2=2. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^*=x(-x^2+2x+2);\ y=C_1+C_2e^{2x}+x(-x^2+2x+2)\ .$$

Розглянемо рівняння

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\ , \qquad (6.7)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно x; α – числовий коефіцієнт. Частинний розв'язок y^* для рівняння (6.7) визначається формулою

$$y^*=x^rQ_n(x)e^{\alpha x}\ , \qquad (6.8)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен (6.6), коефіцієнти якого необхідно визначити; r – кратність кореня $k=\alpha$ в характеристичному рівнянні.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+y'-6y=2e^{3x}$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.7), причому $\alpha=3,\ P_n(x)=2$ (многочлен нульового степеня). Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y''+y'-6y=0;\ k^2+k-6=0;\ k_1=-3,\ k_2=2;$$

$$\bar{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}\ .$$

Частинний розв'язок y^* визначаємо за допомогою формули (6.8). Для даного рівняння $r=0$ (число $\alpha=3$ не є розв'язком характеристичного рівняння) і $Q_n(x)=Q_0(x)$ (многочлен нульового степеня). Отже, маємо

$$y^* = x^0 Q_0(x) e^{3x} = Ae^{3x}.$$

Підставляємо функцію y^* в задане рівняння і визначаємо невідомий коефіцієнт A:

$$(y^*)' = 3Ae^{3x}, (y^*)'' = 9Ae^{3x}; \; 9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x}, 6A = 2, A = \frac{1}{3}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = \frac{1}{3}e^{3x}; \; y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Рекомендована література

1. Апатёнок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1990.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К. : Вид. центр "Академія", 2003.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За редакцією Г.Л.Кулініча. – К.,1992.
4. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи і моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высш. шк., 1986; Ч. 1,2.
6. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного

аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.
7. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.