

en México (Application of decision theory to SIEFORES in Mexico)

Humberto Banda Ortiz[♦], Luis Miguel González García[◇] &
Denise Gómez Hernández[♦]

[♦] Facultad de Contaduría y Administración, Universidad Autónoma de Querétaro; Centro Universitario, Cerro de las Campanas s/n C.P. 76010 Santiago de Querétaro, Qro. México.

[◇] Universidad Tecnológica de Querétaro, Av. Pie de la Cesta 2501, Col. Unidad Nacional, C.P. 76148 Querétaro, Qro. México
Email: humberto.banda@gmail.com

Keywords: Decision theory, SIEFORES, the expected utility theorem

Abstract: There are different theories that try to explain the decision making process. These theories set out some possible decision scenarios. In this article we applied the decision theory to the different options offered by SIEFORES yields, in order to demonstrate performance and risk in some scenario. In this paper first at all we study decision theory, following we explain the SIEFORES system in Mexico. In the last part we apply decision making model to the SIEFORES.

Palabras clave: Teoría de decisiones, SIEFORES, Teorema de la Utilidad Esperada

Resumen: Existen diferentes teorías que, bajo razonamientos matemáticos, tratan de explicar el proceso de toma de decisiones. En dichas teorías se establecen algunos de los posibles escenarios de decisión. En el presente artículo se aplica la teoría de las decisiones a las diferentes alternativas que ofrecen los rendimientos de las SIEFORES, con el fin de demostrar el rendimiento y el riesgo que, bajo diversos escenarios, proporcionan dichas alternativas. En este trabajo se plantea primeramente la teoría de las decisiones. Seguidamente se hace un recorrido por el sistema de SIEFORES en México para ubicar al lector en la problemática que nos ocupa. Finalmente se aplica el modelo de toma de decisiones a las SIEFORES.

Introducción

La Teoría de la Decisión de acuerdo con Render, Stair, & Hanna (2006), es un método sistemático para estudiar la toma de decisiones. Estos autores plantean que una decisión racional es aquella que está basada en la lógica y que considera todos los datos y alternativas posibles. Dichos autores establecen la siguiente clasificación de los tipos de decisiones:

1. Toma de decisiones bajo certidumbre. En este tipo de decisiones los tomadores de decisión conocen con certeza cada una de las posibles consecuencias de las alternativas que se les presentan y optarán por aquella que maximice su beneficio.
2. Toma de decisiones bajo incertidumbre. En este tipo de decisiones hay varios resultados posibles para cada una de las alternativas y los tomadores de decisiones no conocen las probabilidades de cada uno de los diferentes resultados. No obstante se seleccionará aquella que proporcione el mayor rendimiento esperado, ó el máximo beneficio.
3. Toma de decisiones bajo riesgo. En este tipo de decisiones hay varios resultados posibles para cada una de las alternativas. No obstante el tomador de decisión si conoce las diferentes probabilidades de cada uno de los diferentes resultados y optará por aquella que maximice su beneficio.

Se ha observado que, normalmente, los modelos de la teoría de toma de decisión en el ambiente empresarial utilizan los criterios de: Maximización del valor monetario esperado y minimización del riesgo implícito. Lo que equivale a decir que se busca la minimización de las pérdidas.

Los primeros intentos por desarrollar una teoría sistemática de elección bajo condiciones de riesgo fueron establecidos por Bernoulli (1738). Este autor propone cambiar el valor monetario esperado por la utilidad esperada, ya que los diferentes agentes económicos poseen diferentes funciones de valoración de la utilidad.

Para Bernoulli los indicadores estadísticos aportan información de gran utilidad, pero el elemento clave en la toma de decisiones es la preferencia

manifestada en los diferentes resultados, medida a través de una función de utilidad monetaria esperada.

Cramer (1728), plantea un modelo similar al de Bernoulli (173), pero utilizó una diferente función de utilidad monetaria. No obstante ambos modelos establecen que los agentes económicos tienen diferentes niveles de aversión al riesgo.

Von Neuman y Morgenstern (1944), en su obra: *Theory of games and economic behavior*, proponen un modelo de teoría de decisión, basado en los supuestos de incertidumbre de las diferentes alternativas y en las diversas preferencias de los agentes económicos.

En 1944 Von Neuman y Morgenstern, presentaron un modelo de elección bajo incertidumbre basado en el supuesto de comportamiento de preferencia de los agentes económicos, las cuales son suficientes para garantizar la existencia de una función de utilidad numérica, definidas sobre unos objetos denominados loterías. Las loterías son distribuciones de probabilidad sobre los posibles resultados finales de incertidumbre.

Existen estudios, que a diferencia de la teoría de Utilidad Esperada de Von Newman y Morgenstern, (1944), tienen como fundamento la utilidad subjetiva, que parte de la hipótesis de que los agentes económicos sobrevalorarán los resultados o consecuencias externas. Autores representativos de la teoría de la utilidad subjetiva son Allais (1953), Francis W Irvin (1953), Savage (1954), Atkinson (1960) y Kanheman y Tversky (1979).

Así mismo, existen autores que han propuesto modificaciones y pesos diferentes para valorar la utilidad. Entre estos encontramos a Loomes y Sudgen (1986), Chew (1983,1989) y Fishburn (1989).

El modelo de Von Newman y Morgenstern, (1944), será la base que utilizaremos en la tercera sección de este artículo para la construcción de diversas loterías, conformadas por las distintas SIEFORES que existen en México, con el fin de explicar las decisiones racionales como una función de maximización de la utilidad ante una situación de riesgo. Es decir, en el

presente trabajo se contrastará si la teoría de Von Newman y Morgenstern es consistente con los pagos generados por las SIEFORES.

Para lograr lo expresado en el párrafo anterior y con el fin de que el lector, tenga un panorama más claro de las SIEFORES que existen en México, en la siguiente sección se expone una breve explicación de las SIEFORES para que posteriormente, en el apartado III, desarrollemos el modelo.

Las SIEFORES en México

Con la entrada en vigor de la nueva ley del Seguro Social del Instituto Mexicano del Seguro Social el primero de julio de 1997, comenzó a operar en México un nuevo sistema de pensiones. En dicho sistema los fondos para las pensiones, son administrados por empresas privadas llamadas AFORES (administradoras para fondos de retiro), que invierten los recursos de sus afiliados en diferentes portafolios de inversión llamados SIEFORES (Sociedades de inversión de AFORES) y aseguradoras.

El 30 de abril del 2004, la Junta de Gobierno de la CONSAR (Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el retiro), aprobó las modificaciones al régimen de inversión de las Sociedades de Inversión Especializadas de Fondos para el Retiro. En dichas modificaciones se establece la creación de dos tipos de Sociedades de Inversión: **SIEFORE Básica 1 (SB1)** y **SIEFORE Básica 2 (SB2)**.

La creación de las SIEFORES permitió a los trabajadores invertir sus recursos de acuerdo a sus preferencias y a su edad. Además, de que se les permitió a las AFORES invertir en diferentes instrumentos con el fin de incrementar los rendimientos ante las bajas en las tasas de interés del mercado.

El 28 de marzo de 2008, se crearon otras tres Sociedades de Inversión de Fondos para el Retiro, en las cuales se establece que los trabajadores invertirán sus recursos de acuerdo a su edad (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Características de las SIEFORES*

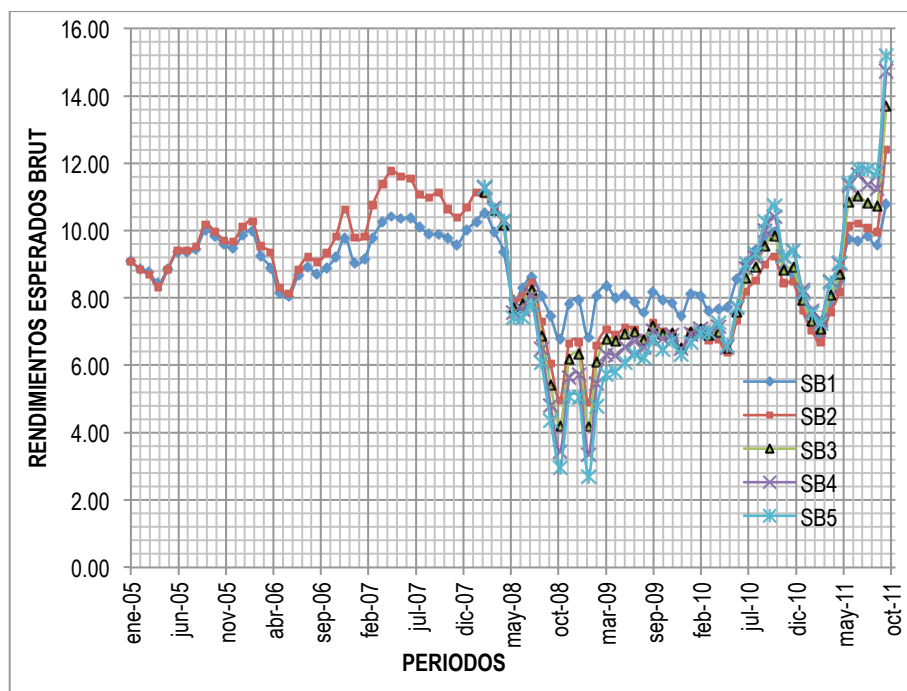
SIEFORE	Edad	Instrumentos de Inversión
SB1	56 años o más	Es el fondo con menor riesgo, y se permite invertir hasta un 20% en Valores extranjeros y hasta un 100% en renta fija
SB2	De 46 a 55 años	Máximo 1% en instrumentos estructurados, Máximo 5% en FIBRAS, Máximo 20% en valores extranjeros, Máximo 15% en renta variable (Bolsa), Mínimo un 59% en renta fija. Máximo 5% en instrumentos estructurados Máximo 5% en FIBRAS
SB3	De 37 a 45 años	Máximo 20% en valores extranjeros Máximo 20% en renta variable (Bolsa) Mínimo un 50% en renta fija. Máximo 7.5% en instrumentos estructurados Máximo 10% en FIBRAS
SB4	De 27 a 36 años	Máximo 20% en valores extranjeros Máximo 25% en renta variable (Bolsa) Mínimo un 37.5% en renta fija. Máximo 10% en instrumentos estructurados Máximo 10% en FIBRAS
SB5	26 años y menores	Máximo 20% en valores extranjeros Máximo 30% en renta variable (Bolsa) Mínimo un 30% en renta fija.

Fuente: Elaboración propia con datos de la CONSAR

Como se puede observar en la Tabla 1, las personas son ubicadas en las diferentes SIEFORES de acuerdo a su edad. Sin embargo, de acuerdo al artículo 47 de la Ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro, las personas de menor edad pueden optar por cambiarse a SIEFORES de personas de mayor edad. No obstante las personas de mayor edad no pueden cambiarse a SIEFORES destinadas a personas de menor edad.

A partir de la creación de las SIEFORES los rendimientos obtenidos por éstas han mostrado un comportamiento inestable durante el periodo observado en este estudio (ver Gráfica 1).

Gráfica 1. *Histórico de rendimientos brutos de las SIEFORES*



Fuente: Elaboración propia con datos de la CONSAR

Como se puede observar en la Gráfica 1, la SB1 es la que, normalmente, ha obtenido mayores rendimientos desde su creación y hasta mediados del año 2010, fecha en la cual la SB5 ha presentado mayores rendimientos. En la misma gráfica se observa que en sus inicios los rendimientos de la SB1 y SB2 fueron muy similares, no obstante a partir de noviembre del año 2006 se ha presentado un gap en los rendimientos.

A partir de marzo del año 2010, el rendimiento de las diferentes SIEFORES comenzó a cambiar, ubicándose en primer lugar la SB5. Adicionalmente, en la misma Gráfica 1, podemos observar que los rendimientos de las cinco SIEFORES han seguido la misma tendencia desde junio del año 2008, a la fecha de elaboración del presente trabajo.

Aplicación de la teoría de Utilidad Esperada en la construcción de diferentes loterías de SIEFORES en México.

Al combinar la teoría de Von Newman y Morgenstern (1944), con la paradoja de Ellsberg las alternativas de decisión pueden ser presentadas como loterías y descritas como una ecuación de comparación. Las loterías son distribuciones de probabilidad sobre los posibles resultados en condiciones de incertidumbre. En esta sección utilizaremos la teoría de la Utilidad Esperada de Von Newman y Morgenstern, en la construcción de diversas loterías conformadas por las distintas SIEFORES que existen en México.

La teoría de la Utilidad Esperada de Von Newman y Morgenstern (1944), parte de un conjunto de números reales para representar la consecuencia monetaria de diversos eventos aleatorios. Así mismo, es necesario trabajar con valoraciones en un conjunto convexo, debido a que nos permitirá incluir en el modelo funciones probabilidad.

Los datos que se utilizan en la construcción del modelo son los rendimientos mensuales brutos de las SIEFORES, del periodo comprendido entre marzo del año 2008 a octubre del año 2011, reportados por la CONSAR.

Los rendimientos de las SIEFORES nos proporcionan el elemento fundamental para valorar las diferentes alternativas de decisión (pagos). Los pagos pueden ser expresados en dos sentidos, por una parte como los rendimientos esperados y, por la otra, como una medida de riesgo. Los

diferentes pagos representan la base para hacer los planteamientos de las diversas ecuaciones de decisión.

A continuación se muestran las diferentes alternativas de decisión, o pagos, en forma de loterías, las cuales fueron clasificadas de acuerdo a la edad del trabajador. Cabe aclarar que, como ya se mencionó anteriormente, la ley vigente en México permite a un trabajador optar por cualquier SIEFORE siempre y cuando no sea una asignada a un rango de menor edad a la de dicho trabajador, por ejemplo, un trabajador cuya edad oscile entre 27 y 36 años puede optar por estar en la SB4, SB3, SB2, SB1; pero no se le es permitido estar en la SB5 (ver Tabla 2).

Tabla 2. *Características de las SIEFORES*

SIEFORE	Opción
SB1	Única opción
SB2 → SB1	2 ² opciones de decisión
SB3 → SB2 → SB1	3 ³ opciones de decisión
SB4 → SB3 → SB2 → SB1	4 ⁴ opciones de decisión
SB5 → SB4 → SB3 → SB2 → SB1	5 ⁵ opciones de decisión

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la Tabla 2 las diferentes alternativas de decisión se pueden mostrar en forma de ecuaciones, donde se contrasta la alternativa en la que normalmente debería estar ubicado el trabajador de acuerdo a su edad contra las diferentes opciones que la ley le otorga.

Lo expresado en el párrafo anterior implica que existen tres elementos indispensables en la construcción del modelo:

1. El agente económico que toma la decisión, que en el caso que nos ocupa es el trabajador, el cual tiene que decidir en que SIEFORE le conviene estar.

2. Las restricciones existentes al momento de tomar la decisión, las cuales están representadas por el marco legal vigente para las AFORES y SIEFORES.
3. La forma en que los agentes económicos evalúan las diferentes alternativas disponibles.

En el modelo propuesto se considera que los agentes económicos, es decir los trabajadores, evalúan las alternativas disponibles de acuerdo al rendimiento esperado y al riesgo esperado, es decir los pagos de cada una de las alternativas.

Los diferentes pagos serán valorados de acuerdo con el criterio que más influye en el proceso de decisión. En el modelo propuesto se consideran dos posturas de los tomadores de decisión: personas adversas al riesgo y personas indiferentes al riesgo.

Aquellos individuos que son adversos al riesgo centraran sus decisiones en el aspecto del riesgo esperado. Es decir, se consideraran los pagos basándose en el riesgo que implica las diversas alternativas de decisión.

Los individuos que son indiferentes al riesgo optarán por aquellos pagos que les proporcionen una mayor utilidad, o al menos una mayor utilidad esperada. Es decir, el riesgo asociado tendrá poca relevancia al momento de tomar la decisión.

Por lo expresado en los párrafos anteriores el modelo de Von Newman y Morgenstern (1944), puede ser utilizado como base para la construcción del modelo. El modelo propuesto se fundamenta en un conjunto de números reales para representar los pagos.

Aunque las loterías planteadas representan un número finito de combinaciones posibles se utilizaron valoraciones en un conjunto convexo con el fin de incluir una extensión de la teoría de probabilidades.

El modelo planteado es el siguiente: Sea S un intervalo finito que representa el conjunto de combinaciones posibles. Los elementos que integran S son los diferentes porcentajes de inversión en cada una de las SIEFORES.

Las diferentes combinaciones de inversión son funciones reales de subconjuntos de S con un intervalo $[0,1]$, y que representan el porcentaje de inversión en las diferentes SIEFORES representado por el conjunto medido. Así mismo, las loterías L , representan los posibles resultados de las combinaciones de inversión, S .

Como el modelo propuesto supone la existencia de un número finito de combinaciones, entonces un subconjunto de S , el cual denotaremos como S_0 , es tal que la medida de S_0 es uno. Por lo que:

$$S_0 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \quad (1)$$

El porcentaje de inversión de cada una de las SIEFORES, x_i , no puede ser negativo y la suma de todas las x debe ser igual a uno. Es decir:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \quad (2)$$

Esta distribución de inversión entre las diferentes SIEFORES representa una lotería que denotaremos como:

$$L = r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \dots + r_n x_n \quad (3)$$

Cabe destacar que la notación que utilizamos supone, implícitamente, que las diversas loterías son susceptibles de combinación, por lo cual se pueden obtener nuevas loterías a partir de las ya existentes.

Como se puede observar las preferencias del trabajador son definidas en el modelo como relaciones binarias del conjunto de loterías, L . Atendiendo la teoría podemos establecer el enunciado primitivo de que la lotería L_1 es débilmente preferida a la lotería L_2 , con lo que se establece la relación de preferencia estricta y la relación de indiferencia.

La relación de preferencia implica que la lotería L_1 es estrictamente preferida a la lotería L_2 si y solo si la lotería L_1 es débilmente preferida a la lotería L_2 . Lo anterior no implica que la lotería L_2 sea débilmente preferida a la lotería L_1 .

Así mismo, la relación de indiferencia implica que la lotería L_1 es débilmente preferida a la lotería L_2 y la lotería L_2 es débilmente preferida a la lotería L_1 . Lo establecido en este párrafo implica que el trabajador será indiferente ante la lotería L_1 y la lotería L_2 .

La teoría de la utilidad esperada parte de los siguientes supuestos:

- Ordenación. Este supuesto indica que la preferencia débil es una relación completa sobre el conjunto de loterías L .
- Continuidad. Este supuesto implica que para cualquier lotería (L_1, L_2, \dots, L_n) en el conjunto de loterías L , los conjuntos $\{\lambda / (\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) R L_3\}$ y $\{\lambda / L_3 R (\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2)\}$ son conjuntos cerrados.
- Independencia. Este supuesto establece que para todo subconjunto de loterías (L_1, L_2, \dots, L_n) del conjunto de loterías L y para todo λ , el cual posee un intervalo de $[0,1]$, es decir $\{\lambda L_1 + (1-\lambda)L_3\}$ preferentemente débil a $\{\lambda L_2 + (1-\lambda)L_3\}$.

El supuesto de ordenación y continuidad, garantiza la existencia de una utilidad monetaria para el trabajador que considera las preferencias del mismo. Es decir, una función de utilidad, del conjunto de loterías L , tal que para cualquier subconjunto de loterías (L_1, L_2, \dots, L_n) en el conjunto de loterías L :

$$L_1 R L_2 \text{ Si y sólo si } (L_1) \geq u(L_2) \quad (4)$$

El tercer supuesto, el de independencia, implica que la función de utilidad u sea la utilidad esperada. De modo que:

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad (5)$$

Así mismo el supuesto de independencia implica que:

$$(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \dots + p_n u(x_n) \quad (6)$$

Los supuestos de ordenación, continuidad e independencia son la base de la teoría de la utilidad esperada. Lo que implica que si las preferencias, R , sobre el conjunto de loterías L satisfacen los supuestos, entonces existe una función de utilidad u , con dominio en L y valores tal que:

- (a) Para cualquier $L_{1,2}$ en L : $L_1 R L_2$ si y sólo si $u(L_1) \geq u(L_2)$
- (b) Si $L = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ entonces $u(L) = p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + \dots + p_nu(x_n)$
- (c) Una función v representa la misma preferencia R si y sólo si existen reales a y $b > 0$ tales que $v(L) = a + bu(L)$

Una vez que se ha planteado el modelo de la utilidad esperada se procederá a continuación a su aplicación para el caso de las SIEFORES en México. Cabe aclarar que los datos de rendimiento y riesgo se tomaron del artículo: La teoría de portafolio aplicada a las SIEFORES en México, una aproximación, Banda (2011).

En primer lugar consideramos individuos indiferentes al riesgo. El criterio a utilizar como pago es maximin, es decir, la maximización de rendimiento y la minimización del riesgo. Para un trabajador cuya edad es mayor a los 60 años la lotería se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. Lotería para personas indiferentes al riesgo, mayores de 60 años

Lotería	Ecuación	Resultado Esperado	
		Rendimiento	Riesgo
A	$SB1: (1.0) (.0843)$	8.43%	.097

Fuente: Elaboración propia

Este caso es especial, ya que de acuerdo a la Ley de los Sistemas de Ahorro en su artículo 47, y específicamente la circular de la CONSAR 69-2, los trabajadores de más de 60 años no tienen la opción de invertir en otras SIEFORES. La lotería propuesta puede ser expresada como: Si: $L_A > 0$ por lo que la opción más racional y que ofrece mejor pago es L_A

Para el caso de los individuos cuya edad oscila entre los 46 y 59 años normalmente estarían en la SB2, que es la que le corresponde, no obstante la ley les permite estar en la SB1. Cabe aclarar que la ley no especifica si los trabajadores pueden o no tener una proporción de su inversión en diferentes SIEFORES. En la Tabla 4 se presentan algunos posibles resultados de riesgo rendimiento, Banda (2011).

Tabla 4. Lotería para personas indiferentes al riesgo, de entre 46 y 59 años

Lotería	Ecuación	Resultado Esperado	
		Rendimiento	Riesgo
A	SB2: (1.0) (.0784)	7.84%	1.58
CONTRA:			
B	SB1(1.0)(.0842)	8.42%	.097
C	SB1: (0.50)(.0842)+LSB2: (0.50)(.0784)	8.13%	1.26
D	SB1: (0.60)(.0842)+LSB2: (0.40)(.0784)	8.19%	1.20
E	SB1: (0.70)(.0842)+LSB2: (0.30)(.0784)	8.25%	1.14
F	SB1: (0.80)(.0842)+LSB2: (0.20)(.0784)	8.31%	1.09
G	SB1: (0.40)(.0842)+LSB2: (0.60)(.0784)	8.07%	1.33
H	SB1: (0.30)(.0842)+LSB2: (0.70)(.0784)	8.02%	1.39
I	SB1: (0.20)(.0842)+LSB2: (0.80)(.0784)	7.96%	1.45

Fuente: Elaboración propia

En este caso el trabajador puede tener las opciones de invertir en la SB2 y la SB1. Aplicando la propiedad asociativa podemos definir las diferentes loterías propuestas como:

$$\text{Si: } L_B > L_A \text{ y } L_B > L_C \text{ y } L_B > L_D \text{ y } L_B > L_E \text{ y } L_B > L_F \text{ y } L_B > L_G \text{ y} \quad (7)$$

$$L_B > L_H \text{ y } L_B > L_I$$

Luego entonces, la opción que debería elegir el trabajador racional indiferente al riesgo es L_B , con un pago de 8.42% y una desviación estándar 0.097, debido a que está lotería es la que ofrece el mayor rendimiento y menor riesgo.

Para el caso de los individuos cuya edad oscila entre los 37 y los 45 años, diferentes loterías se presentan en la Tabla 5. En este caso las personas pueden optar por invertir en la SB3, que es la que le corresponde, en la SB2 y en la SB1.

Tabla 5. Lotería para personas indiferentes al riesgo, edad entre 37 y 45 años

SIEFORE BÁSICA 3				
LOTERÍAS	ECUACIÓN	Resultado esperado		
		Rendimiento	riesgo	
A	SB3: (1) (0.0795)	7.95%	1.92	
CONTRA:				
B	SB1(1.0)(.0842)	8.42%	0.976	
C	SB2(1.0) (.0784)	7.84%	1.58	
D	SB1:(0.5)(0.0842) +SB3: (0.5)(0.0795)	8.19%	1.42	
E	SB2: (0.5)(0.0784) +SB3: (0.5)(0.0795)	7.89%	1.75	
F	SB1: (0.33) (0.0843) + SB2(.033) (.0784) + SB3: (0.33)(0.0795)	8.07%	1.48	
G	SB1: (0.40)(0.0843) +SB2(0.30) (.0784) + SB3: (0.30)(0.0795)	8.10%	1.42	
H	SB1: (0.5)(0.0843) + SB2(0.25) (.0784) +SB3: (0.25)(0.0795)	8.16%	1.34	
I	SB1: (0.30)(0.0843) + SB2(0.30) (.0784)+SB3: (0.40)(0.0795)	8.06%	1.52	
J	SB1: (0.25)(0.0843) + SB2(0.25) (.0784) +SB3: (0.50)(0.0795)	8.04%	1.58	
K	SB1: (0.30)(0.0843) + SB2(0.40) (.0784) +SB3: (0.30)(0.0795)	8.05%	1.48	
L	SB1: (0.25)(0.0843) + SB2(0.50) (.0784) +SB3: (0..25)(0.0795)	8.01%	1.50	

Fuente: Elaboración propia

Aplicando nuevamente la propiedad asociativa podemos definir las loterías propuestas como:

$$\begin{aligned} \text{Si } L_B > L_A \text{ y } L_B > L_C \text{ y } L_B > L_D \text{ y } L_B > L_E \text{ y } L_B > L_F \text{ y } L_B > L_G \text{ y } L_B > L_H \text{ y} \\ L_B > L_I \text{ y } L_B > L_J \text{ y } L_B > L_K \text{ y } L_B > L_L \end{aligned} \quad (8)$$

Por lo expresado en el párrafo anterior la opción que deberían elegir los individuos racionales que son indiferentes al riesgo es L_B , con un pago de 8.42% y una desviación estándar 0.097, ya que es la lotería que ofrece el mayor rendimiento y menor riesgo.

En el caso de un trabajador cuya edad oscila entre los 27 y los 36 años las loterías se presentan en la Tabla 6. En este caso los individuos tienen la opción de invertir en la SB4, que es la que le corresponde, en la SB3, en la SB2 y en la SB1.

Tabla 6. Lotería para personas indiferentes al riesgo, edad entre 27 y 36 años

		SIEFORE BÁSICA 4	
LOTERÍAS	ECUACIÓN	Resultado esperado	
		Rendimiento	Riesgo
A	SB4: (1.0)(0.0797)	7.97%	2.28
CONTRA:			
B	SB1(1.0)(.0842)	8.42%	.976
C	SB2(1.0) (.0784)	7.84%	1.56
D	SB3(1.0) (.0795)	7.95%	1.92
E	SB1: (0.5)(0.0843) + SB4: (0.5)(0.0797)	8.20%	1.59
F	SB3: (0.5)(0.0795) + SB4: (0.5)(0.0797)	7.96%	2.09
G	SB1: (0.6)(0.0843) + SB4: (0.4)(0.0797)	8.24%	1.46
H	SB1: (0.25)(0.0843)+SB2:(0.25)(0.0784)+SB3:(0.25)(0.0795)+SB4:(0.25)(0.0797)	8.04%	1.67
I	SB1: (0.5)(0.0843)+SB2:(0.2)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.1)(0.0797)	8.17%	1.39
J	SB1: (0.4)(0.0843)+SB2:(0.2)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.2)(0.0797)	8.12%	1.52
K	SB1: (0.3)(0.0843)+SB2: (0.3)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.2)(0.0797)	8.06%	1.58
L	SB1: (0.2)(0.0843)+SB2: (0.2)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.4)(0.0797)	8.03%	1.78

Fuente: Elaboración propia

Aplicando la propiedad asociativa podemos definir las loterías propuestas como:

$$\text{Si: } L_B > L_A \text{ y } L_B > L_C \text{ y } L_B > L_D \text{ y } L_B > L_E \text{ y } L_B > L_F \text{ y } L_B > L_G \text{ y } L_B > L_H \text{ y} \quad (9)$$

$$L_B > L_I \text{ y } L_B > L_J \text{ y } L_B > L_K \text{ y } L_B > L_L$$

Luego entonces, la opción que deberían elegir los individuos racionales indiferentes al riesgo es nuevamente , con un pago de 8.42% y una desviación estándar 0.097 dado que está lotería es la que ofrece el mayor rendimiento y menor riesgo que todas las demás.

Finalmente para un trabajador cuya edad es menor de 26 años las loterías se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Lotería para personas indiferentes al riesgo, edad de 26 años o menos

		SIEFORE BÁSICA 5	
LOTERÍAS	ECUACIÓN	Resultado esperado	
		Rendimiento	Riesgo
A	SB5: (1.0)(0.0784)	7.84%	2.53
CONTRA:			
B	SB1: (1.0)(0.0843)	8.43%	0.98
C	SB2: (1.0)(0.0784)	7.84%	1.58
D	SB3: (1.0)(0.0795)	7.95%	1.92
E	SB4: (1.0)(0.0797)	7.97%	2.28
F	SB1: (0.5)(0.0843) + SB5: (0.5)(0.0784)	8.13%	1.72
G	SB2: (0.5)(0.0784) + SB5: (0.5)(0.0784)	7.84%	2.04
H	SB3: (0.5)(0.0795) + SB5: (0.5)(0.0784)	7.89%	2.22
I	SB4: (0.5)(0.0797) + SB5: (0.5)(0.0784)	7.90%	2.40
J	SB1:(0.5)(0.0843) +SB2: (0.2)(0.0784) +SB3:(0.1)(0.0795)+SB4:(0.1)(0.0797)+SB5: (0.1)(0.0784)	8.16%	1.45
K	SB1:(0.6)(0.0843)+SB2:(0.1)(0.0784)+SB3: (0.1)(0.0795)+ SB4: (0.1)(0.0797) + SB5:(0.1)(0.0784)	8.21%	1.38
L	SB1: (0.4)(0.0843)+SB2: (0.2)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.1)(0.0797)+SB5: (0.1)(0.0784)	8.11%	1.54
M	SB1: (0.2)(0.0843)+SB2: (0.2)(0.0784)+SB3: (0.2)(0.0795)+SB4: (0.2)(0.0797)+SB5: (0.2)(0.0784)	8.00%	1.83
N	SB1: (0.1)(0.0843)+SB2: (0.1)(0.0784)+SB3: (0.1)(0.0795)+SB4: (0.3)(0.0797)+SB5: (0.4)(0.0784)	7.95%	2.13
O	SB1: (0.1)(0.0843)+SB2: (0.1)(0.0784)+SB3: (0.1)(0.0795)+SB4: (0.2)(0.0797)+SB5: (0.5)(0.0784)	7.93%	2.15
P	SB1: (0.1)(0.0843)+SB2: (0.1)(0.0784)+SB3: (0.1)(0.0795)+SB4: (0.1)(0.0797)+SB5: (0.6)(0.0784)	7.92%	2.18

Fuente: Elaboración propia

En este caso el trabajador puede tener las opciones de invertir en la SB5, que es la que le corresponde, en la SB4, en la SB3, en la SB2 y en la SB1.

Aplicando la propiedad asociativa podemos definir las loterías propuestas como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Si: } L_B > L_A \text{ y } L_B > L_C \text{ y } L_B > L_D \text{ y } L_B > L_E \text{ y } L_B > L_F \text{ y } L_B > L_G \text{ y } L_B > L_H \text{ y} \quad (10) \\
 & L_B > L_I \text{ y } L_B > L_J \text{ y } L_B > L_K \text{ y } L_B > L_L \text{ y } L_B > L_M \text{ y } L_B > L_N \text{ y } L_B > L_O \text{ y } L_B > L_P
 \end{aligned}$$

Luego entonces la opción que deberían elegir los individuos racionales indiferentes al riesgo es L_B , con un pago de 8.42% y una desviación estándar 0.097 ya que esta lotería es la que ofrece el mayor rendimiento y menor riesgo.

Después de plantear las diferentes loterías para aquellos individuos indiferentes al riesgo, procederemos a planear las loterías para los individuos que son **adversos** al riesgo. El criterio a utilizar como pago es *minimax*, es decir, la minimización del riesgo y la maximización de rendimiento.

Para un trabajador cuya edad es mayor a los 60 años (véase tabla 3) la lotería propuesta se presenta como:

Si: $L_A < 1$ por lo que la opción más racional y que ofrece mejor pago es L_A .

Como ya se mencionó los individuos cuya edad son mayores de 60 años es un caso especial debido a que la ley de los sistemas de ahorro vigente no les permite invertir en otras SIEFORES.

En el caso de los individuos cuya edad oscila entre los 46 y 59 años (véase Tabla 4), y que normalmente estarían en la SB2, las loterías propuestas, aplicando la propiedad asociativa, pueden ser definidas como:

$$\text{Si: } L_B < L_A \text{ y } L_B < L_C \text{ y } L_B < L_D \text{ y } L_B < L_E \text{ y } L_B < L_F \text{ y } L_B < L_G \text{ y } L_B < L_H \text{ y } L_B < L_I \quad (11)$$

Luego entonces, la opción que deberían elegir los individuos racionales adversos al riesgo es, L_B , con una desviación estándar 0.097 y un rendimiento de 8.42%, ya que es la que ofrece el menor riesgo y el mayor rendimiento.

Para el caso de los individuos cuya edad oscila entre los 37 y los 45 años (véase Tabla 5), y que normalmente estarían en la SB3, las loterías propuestas, aplicando la propiedad asociativa pueden ser definidas como:

$$\text{Si: } L_B < L_A \text{ y } L_B < L_C \text{ y } L_B < L_D \text{ y } L_B < L_E \text{ y } L_B < L_F \text{ y } L_B < L_G \text{ y } L_B < L_H \text{ y} \quad (12) \\ L_B < L_I \text{ y } L_B < L_J \text{ y } L_B < L_K \text{ y } L_B < L_L$$

Luego entonces la opción que deberían elegir los individuos racionales que son adversos al riesgo es L_B , con una desviación estándar 0.097 y un rendimiento de 8.42%, ya que está lotería es la que ofrece el menor riesgo y el mayor rendimiento.

En el caso de los individuos cuya edad oscila entre los 27 y 36 años (véase Tabla 6), y que normalmente estarían en la SB4, las loterías propuestas, aplicando la propiedad asociativa, pueden ser definidas como:

$$\text{Si: } L_B < L_A \text{ y } L_B < L_C \text{ y } L_B < L_D \text{ y } L_B < L_E \text{ y } L_B < L_F \text{ y } L_B < L_G \text{ y } L_B < L_H \text{ y} \quad (13) \\ L_B < L_I \text{ y } L_B < L_J \text{ y } L_B < L_K \text{ y } L_B < L_L$$

Lo anterior implica que los individuos adversos al riesgo deberían optar por la lotería, L_B , con una desviación estándar 0.097 y un rendimiento de 8.42% ya que esta es la que ofrece el menor riesgo y el mayor rendimiento.

Finalmente para un trabajador cuya edad es menor de 26 años (véase Tabla 7), y que normalmente estarían en la SB5, las loterías propuestas, aplicando la propiedad asociativa, pueden ser definidas como:

$$\text{Si: } L_B < L_A \text{ y } L_B < L_C \text{ y } L_B < L_D \text{ y } L_B < L_E \text{ y } L_B < L_F \text{ y } L_B < L_G \text{ y } L_B < L_H \text{ y} \quad (14) \\ L_B < L_I \text{ y } L_B < L_J \text{ y } L_B < L_K \text{ y } L_B < L_L \text{ y } L_B < L_M \text{ y } L_B < L_N \text{ y } L_B < L_O \text{ y } L_B < L_P$$

Lo expresado en el párrafo anterior implica que la opción que deberían elegir los individuos racionales adversos al riesgo es L_B , con una desviación estándar 0.097 y un rendimiento de 8.42%, debido a que es la que ofrece el menor riesgo y el mayor rendimiento.

Con los resultados obtenidos se puede observar (véase Tabla 8), que en todos los casos analizados en el presente trabajo siempre la mejor opción la representa la lotería "B", ya sea bajo el criterio de selección Minimax, o bajo el criterio Maximin en cualquiera de los rangos de edad.

Tabla 8. *Resumen de resultados óptimos de pagos de las loterías calculadas*

Criterio de maximización	Indiferentes al riesgo MAXIMIN			Adversos al riesgo MINIMAX		
	Lotería	Rendimiento esperado	Desv. Estándar	Lotería	Desv. estándar	Rendimiento esperado
Rangos de Edad						
60 ó mas	LA	8.42%	0.097	LA	0.097	8.42%
46 y 59 años	LB	8.42%	0.097	LB	0.097	8.42%
37 y 45 años	LB	8.42%	0.097	LB	0.097	8.42%
27 a 36 años	LB	8.42%	0.097	LB	0.097	8.42%
26 o menos	LB	8.42%	0.097	LB	0.097	8.42%

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

Aplicando la Teoría de la Utilidad Esperada de Von Newman y Morgenstern (1944), los individuos racionales dependiendo su edad considerarán aquellas loterías que maximicen su utilidad. No obstante se ha observado que la gente en algunos casos, no utiliza este criterio.

Este trabajo se aplicó en un escenario de incertidumbre, debido a que no se conocía con certeza el pago esperado, por lo que fue necesario construir un pago a partir del análisis estadístico, debido a que para la toma de decisiones se requiere que los individuos tengan información sobre el pago esperado.

Una vez construidos los pagos, mayor rendimiento ó menor riesgo, fue posible aplicar la teoría de Von Newman y Morgenstern (1944). Dichos pagos resultaron suficientes para garantizar la existencia de una función de utilidad numérica sobre diferentes loterías. Esto nos sirvió como elemento clave para explicar las decisiones racionales de los individuos que se enfrentan ante diferentes alternativas de inversión en SIEFORES.

Con las ecuaciones que se presentaron fue posible determinar el pago en todas las alternativas de decisión y pudimos observar que en todos los casos el mejor pago se presentó cuando se consideró la SB1 únicamente.

Este resultado contrapone lo planteado en la literatura clásica que establece una correlación positiva entre riesgo y rendimiento. Debido a que el efecto esperado sería que la SB1 fuera la mejor en el pago minimax, mínimo riesgo, y que la SB5 fuera la mejor alternativa en el criterio maximin, rendimiento mayor. (véase Tabla 8).

Lo expresado en el párrafo anterior puede tener su explicación en que las SB3, SB4 y SB5 son de reciente creación, por lo que para la medición de los rendimientos mensuales de estas SIEFORES solo se cuentan con 43 periodos, y de estos periodos los rendimientos mayores, y más estables, fueron presentados por la SB1. En contraste la SB5 fue la que presentó la mayor volatilidad y el menor rendimiento.

El presente trabajo es de utilidad en la toma de decisiones para aquellos trabajadores que se encuentren inscritos en alguna de las diferentes AFORES. No obstante, cabe aclarar que existieron perturbaciones en las series de tiempo analizadas, debido a las diversas situaciones macroeconómicas comentadas anteriormente en este trabajo.

Bibliografía

- Aguiar, F. (2004). Teoría de la decisión e incertidumbre, modelos normativos y descriptivos. *EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Sociales*, 8, 139-160.
- Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiome de l'école Américaine. *Econometrica*, 21(4), 503-546.
- Atkinson, J., Bastian, R., Earl, R., & Litwin, G. (1960). The achievement motive, goal setting and probability preference. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 60(1), 27-36.
- Banda, H., & Gómez, D. (2009). Evaluación de un Portafolio de Inversión Institucional: el caso de los fondos de pensiones en México. *Innovaciones de Negocios*, 6(2), 303-323.
- CONSAR. (8 de Agosto de 2011). CONSAR. Recuperado el 8 de Agosto de 2011, de www.consar.gob.mx
- Cramer, G. (1728). *Letter to N. Bernoulli*. in Bernoulli (1738), 211-213.
- Elster, J. (1986). *Rational choice*. Oxford: Basil Blackwell.

- French, S. (1986). *Decision Theory: An introduction to the mathematics of rationality*, Chichester, West Sussex, England: Ellis.
- Marcowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Plata Pérez, L., Mejía Mejía, I., & Accinelli Gamba, E. (2009). Sobre la teoría de decisiones bajo incertidumbre de Von Newman y Morgenstern: antecedentes, extensiones y el papel de la racionalidad acotada de H. Simons. *Revista Mexicana de Economía Agrícola y de los Recursos Naturales*, 2(3), 45-89.
- Render, B., Stair, R. M., & Hanna, M. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México, D.F: Pearson Education.
- Sharpe, W. (1992). Asset allocation, management style and performance measurement. *Journal of Portfolio Management* 18(2), 7-19.
- Sharpe, W. (1994). The Sharpe ratio. *Journal of Portfolio Management* , 21(1), 49-58.
- Simón, H. (1955). A behavioral model of rational choice. *Quarterly Journal of Economics*, 69(1), 99-118.
- Traynor, J. (1965). How to rate Management of Investment Funds. *Harvard Business Review*, 43(1), 63-75.
- Tversky, A. Y. (1981). The framing of decision and the psychology of choice. *Science*, 211(4481), 453-458.
- Von Newman, J., & Morgenstern, O. (1947). *Theory of games and economic behavior*. Princeton, N.J: Princeton University Press.