



Derivación de Orden Fraccional Mediante Redes de Período Largo en Fibra Óptica

Tesis Doctoral

Luis Jorge Poveda Wong

Directores

José Luis Cruz Muñoz

Christian Cuadrado Laborde

Valencia, 2017

D. José Luis CRUZ MUÑOZ, Catedrático del Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo de la Universidad de Valencia y D. Christian CUADRADO LABORDE, investigador independiente del CONICET (Argentina).

CERTIFICAN que la presente memoria “*Derivación de Orden Fraccional Mediante Redes de Período Largo en Fibra Óptica,*” resume el trabajo de investigación realizado, bajo su dirección, por D. Luis Jorge POVEDA WONG y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Física.

Y para que conste, y en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Valencia, a

Firmado
José Luis Cruz Muñoz, Ph.D.

Firmado
Christian Cuadrado Laborde, Ph.D.

Agradecimientos

Hay eventos que marcan un antes y un después en nuestras vidas. En mi caso, uno de éstos ha sido la oportunidad de venir a aprender y trabajar con el grupo de fibras ópticas de la Universidad de Valencia. Me siento especialmente agradecido con Miguel Andrés por darme la oportunidad de integrarme a éste grupo en el cual me he sentido bienvenido, así como con Jaime Cascante, que depositó su confianza en mí y me informó acerca de la oportunidad de estudiar en Valencia

A mis directores José Luis Cruz y Christian Cuadrado, también he de agradecerles la infinita paciencia que han tenido con mis metidas de pata a través de todo este proceso. Espero poder aplicar todo el conocimiento que he adquirido gracias a ustedes muy pronto cuando regrese a Costa Rica. A Antonio Díez, le agradezco su ayuda y sus sumamente oportunas recomendaciones y comentarios durante la elaboración de los experimentos.

Quisiera también destacar la ayuda que he recibido de mis padres, sobre todo en los últimos meses de la escritura de esta tesis. De no ser por su apoyo, éste proyecto probablemente no habría salido adelante.

A Esther y Oleksii, mis compañeros de viaje y de aventuras, les debo decir que me alegro muchísimo de habérmelos encontrado por el camino. Los atardeceres en Oia, la nieve en la Acrópolis, y por qué no, la broma de la carretilla, son cosas que guardaré siempre en mi memoria como si fuesen un tesoro.

Me siento en deuda también con Cristina, por estar siempre ahí para escucharme. Te agradezco por todos los momentos bonitos que compartimos, y por el viaje a Berlín, que fue de una enorme importancia simbólica para ambos. Me llevo en mi maleta un trocito de tu tenacidad y tu resiliencia.

A Marcos Martínez, mi profesor de saxofón aquí en España, le agradezco también todo el conocimiento que me ha transmitido durante estos años. Quiero que sepas que el saxo representa para mí mucho más que sólo un instrumento musical, y por este motivo, siempre estaré agradecido por lo que me has enseñado.

A los miembros del grupo de fibras ópticas con los que he vivido tantas cosas en estos años, les doy las gracias por haberme hecho sentir como en casa. A Xavi y Antonio Carrascosa, les aplaudo su estoica tolerancia ante mis pésimos chistes y juegos de palabras, que tuvieron que soportar casi a diario por ser mis compañeros de despacho. A Erica, le dejo algún paso nuevo y exótico para el famoso “baile del cafecito” de las mañanas. A Martina, las disculpas por el problemilla con los buñuelos de calabaza durante las Fallas del año pasado.

Especial mención a las personas que han pasado también por el departamento de física durante estos años: Irma, Mauricio, Iván, Julius, Nathalia, Angélica, Emmanuel y Lorena. Definitivamente el haber compartido con personas de tantos y variados sitios ha sido una experiencia muy enriquecedora a nivel personal.

A todas las personas mencionadas aquí, les recuerdo que ya tienen un amigo y una casa en Costa Rica. Y como se dice por ahí: el hogar no está en el sitio donde nacemos, sino en los corazones de esas personas especiales que nos encontramos por el camino.

Dedicado con mucho cariño

A mi madre y a mi tía Vilma

Lista de Acrónimos Utilizados

ADN	Ácido Desoxirribonucleico
DC	<i>Direct Current</i>
EOM	<i>Electro-Optical Modulator</i>
FBG	<i>Fiber Bragg Grating</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRED	<i>Frequency Doubled</i>
FrFT	<i>Fractional Fourier Transform</i>
FROG	<i>Frequency Resolved Optical Gating</i>
FT	<i>Fourier Transform</i>
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i>
LCT	<i>Linear Canonical Transform</i>
LED	<i>Light Emitting Diode</i>
LPG	<i>Long Period Grating</i>
MPS	<i>Modulation Phase Shifting</i>
MZI	<i>Mach-Zehnder Interferometer</i>
N.A.	<i>Numerical Aperture</i>
OFC	<i>Optical Fiber Coupler</i>
OSA	<i>Optical Spectrum Analyzer</i>
OSC	Osciloscopio
PC	<i>Polarization Controller</i>
PID	<i>Proportional-Integral-Derivative</i>
PROUD	<i>Phase Reconstruction Using Optical Ultrafast Differentiation</i>
PSK	<i>Phase-Shift Keying</i>
RF	Radiofrecuencia
RIU	<i>Refractive Index Unit</i>
SPIDER	<i>Spectral Phase Interferometry for Direct Electric-field Reconstruction</i>
SSB	<i>Single Side Band</i>
UV	Ultravioleta
WDM	<i>Wavelength Division Multiplexing</i>

Tabla de Contenidos

Capítulo 1 – Introducción	1
1.1 Redes de Difracción en Fibra Óptica y sus Aplicaciones	1
1.2 Introducción al Cálculo Fraccional	6
1.2.1 Antecedentes Históricos	6
1.2.2 Interpretación y Aplicaciones del Cálculo Fraccional	8
1.3 Objetivos y Estructura de la Tesis	12
Bibliografía – Capítulo 1	14
Capítulo 2 – Marco Teórico	21
2.1 Cálculo Fraccional	21
2.1.1 Definiciones Fundamentales	21
2.1.2 Diferintegrales de Funciones Simples	26
2.1.3 Propiedades Generales de las Diferintegrales	30
2.2 Diferintegral de un Pulso Óptico	33
2.3 Función de Transferencia de un Derivador Fraccional	36
2.3.1 Respuesta del Derivador Fraccional en Amplitud y Fase	36
2.3.2 Derivada Fraccional de un Pulso Gaussiano	38
2.4 Redes de Difracción en Fibra Óptica	43
2.4.1 Descripción Cualitativa de las Redes de Difracción	43
2.4.2 Redes de Período Corto	45
2.4.3 Redes de Período Largo	46
2.4.4 Ecuaciones de Modos Acoplados Copropagantes para una Red de Período Largo (LPG) en Fibra Óptica	48
2.4.5 Ecuaciones de Modos Acoplados Contrapropagantes para una Red de Período Corto (FBG) en Fibra Óptica	58
2.5 Redes de Período Largo como Derivadores Fraccionales	61
2.6 Interferómetro Mach-Zehnder en Fibra Óptica Como Derivador Fraccional	67
Bibliografía – Capítulo 2	73

Capítulo 3 – Grabación de Redes de Difracción en Fibra Óptica	75
3.1 Fotosensitividad en Fibras Ópticas.....	75
3.2 Grabación de Redes de Período Corto (FBGs).....	77
3.3 Grabación de Redes de Período Largo (LPGs).....	81
3.3.1 Cálculo de los Índices Efectivos del Núcleo y de la Cubierta	81
3.3.2 Fabricación de las Redes de Período Largo	86
3.3.3 Redes de Período Largo de Ancho de Banda Estrecho	89
3.4 Respuesta de LPGs de Ancho de Banda Estrecho ante Temperatura, Tensión Axial e Índice de Refracción	107
3.4.1 Respuesta ante Temperatura.....	108
3.4.2 Respuesta ante Tensión Mecánica Axial.....	111
3.4.3 Respuesta ante Índice de Refracción Externo	113
Bibliografía – Capítulo 3	119

Capítulo 4 – Derivación Fraccional: Implementación Experimental Usando Redes de Período Largo	121
4.1 Medida de Función de Transferencia de una LPG por Modulación a Radiofrecuencia.....	122
4.1.1 Principio de Funcionamiento	122
4.1.2 Montaje Experimental y Función de Transferencia de una LPG	126
4.2. Reconstrucción del Perfil de Frecuencia Instantánea de un Pulso Óptico Mediante un Medio Dispersivo.....	132
4.2.1 Principio de Funcionamiento e Interpretación de la Transformada de Fresnel..	133
4.2.2 Montaje Experimental y Reconstrucción de Fase de un Pulso Láser de picosegundos	136
4.3 Derivación Fraccional de Orden 1/2 Mediante una Red de Período Largo Uniforme.....	140
4.3.1 Características de Fabricación del Derivador Fraccional.....	140
4.3.2 Montaje Experimental Para Derivación Fraccional de un Pulso y Reconstrucción de su Perfil de Fase.....	142
4.4 Derivación Fraccional de Orden 1/2 Mediante un Interferómetro Modal Mach-Zehnder	148
4.4.1 Parámetros Constructivos del Interferómetro Modal	149

4.4.2 Montaje Experimental y Demostración de Derivación Fraccional	151
4.5 Reconstrucción de Fase de un Pulso Óptico Mediante Derivación Fraccional	155
4.5.1 Obtención de la Información de Fase a Partir de la Derivada Fraccional Desplazada en Frecuencia	156
4.5.2 Montaje Experimental y Reconstrucción de Fase de un Pulso Óptico Mediante el Método de Derivada Fraccional	159
Bibliografía – Capítulo 4	163
Capítulo 5 – Conclusiones	167
5.1 Conclusiones	167
5.2 Trabajo Futuro	169
Bibliografía – Capítulo 5	171
Publicaciones	172
Publicaciones en Revistas Científicas	172
Trabajos en Redacción	172
Comunicaciones en Congresos	173

Capítulo 1 – Introducción

1.1 Redes de Difracción en Fibra Óptica y sus Aplicaciones

Desde su descubrimiento fortuito por parte de Ken Hill y colaboradores en un experimento con un láser de argón introducido a una fibra óptica, se ha descubierto una amplísima gama de aplicaciones para las redes de difracción en fibra óptica, con un profundo impacto tecnológico en telecomunicaciones, tecnología láser y teledetección [1]. Estas redes consisten en una modulación periódica y controlada del índice efectivo del núcleo de una fibra óptica, la cual permite el trasvase de energía entre los distintos modos de la fibra [2,3]. Una red de difracción con período uniforme Λ_g se ve ilustrada en la Figura 1.1.1:

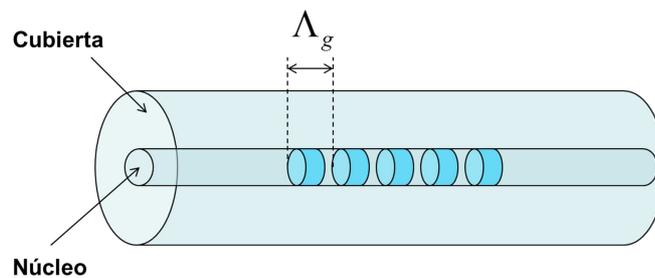


Figura 1.1.1. Red de difracción de período uniforme grabada en una fibra óptica al modificar el índice de refracción del núcleo de la fibra.

Las redes de difracción se clasifican en dos variantes principales en función de su período: redes de período corto, también llamadas redes de Bragg o FBGs, con períodos Λ_g de centenas de nanómetros (del orden de longitudes de onda ópticas), y redes de período largo o LPGs con períodos Λ_g de centenas de micrómetros. Respecto a su comportamiento, la diferencia más importante entre ambas es que las redes de Bragg se utilizan para el acoplo de la energía en el modo fundamental de la fibra a modos del núcleo o de la cubierta contrapropagantes, mientras que las redes de período largo se utilizan para trasvasar energía del modo fundamental a modos del núcleo o de la cubierta copropagantes, como se muestra en la Figura 1.1.2 [3].

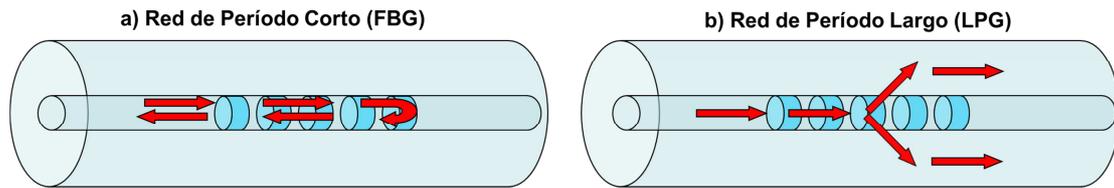


Figura 1.1.2. a) Acoplo del modo fundamental del núcleo al mismo modo en dirección contrapropagante por una red de período corto. b) Acoplo copropagante a modos de la cubierta por una red de período largo.

Una de las formas más efectivas de producir esta modulación de índice de refracción en la fibra es mediante radiación ultravioleta. Se aprovecha el contenido de óxido de germanio típicamente encontrado en las fibras de telecomunicaciones para inducir cambios en la estructura de la sílice del núcleo y así modular el índice de refracción [4-6]. En la Figura 1.1.3 se muestra el patrón de difracción producido por una técnica interferométrica para fabricar una red de Bragg con un láser ultravioleta (UV).



Figura 1.1.3 Patrón de difracción de un haz láser al grabar una red de Bragg mediante la técnica de máscara de fase. Se utiliza un láser de argón a 488 nm con un cristal doblador para obtener radiación UV a 244 nm.

Por su estructura periódica, las redes de difracción se comportan como cristales fotónicos unidimensionales, teniendo así bandas prohibidas de transmisión en el espectro. La energía correspondiente a estas bandas se acopla a otros modos de la fibra, lo cual permite una gran variedad de formas de manipular estas regiones del espectro para distintos propósitos. En la banda C de telecomunicaciones (1530 nm-1560 nm), típicamente las redes de Bragg suelen tener anchos de banda menores a 1 nm, mientras que las redes de período largo poseen anchos de banda del orden de decenas de nanómetros. Los espectros de transmisión de una red de período largo y una red de período corto grabadas en el mismo tipo de fibra se muestran en la Figura 1.1.4. Es importante notar la diferencia en el ancho de banda de las resonancias por acoplo copropagante de las redes de período largo en comparación a las de acoplo contrapropagante de las redes de Bragg o de período corto.

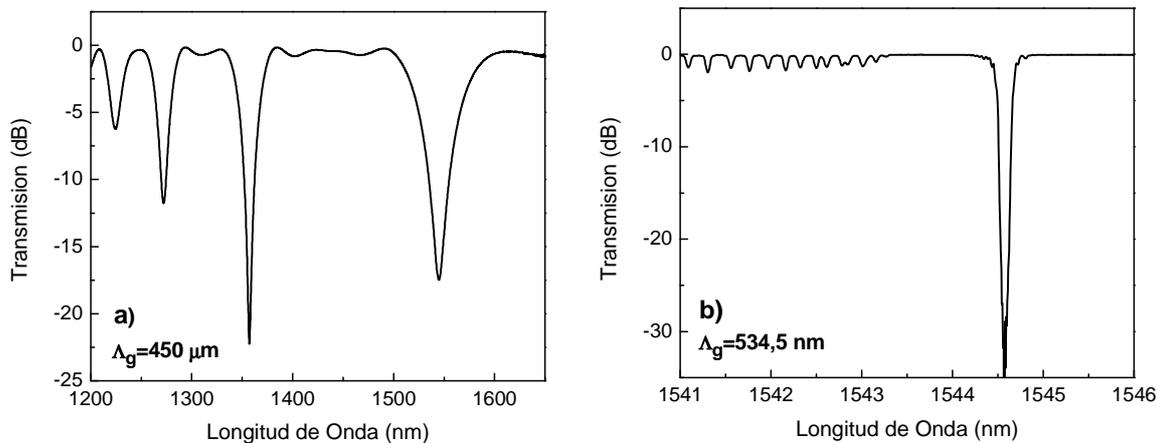


Figura 1.1.4. Espectros de transmisión de una red de período largo y una red de período corto en fibra fotosensible. a) La red de período largo posee una periodicidad de $450 \mu\text{m}$ resultando en múltiples bandas prohibidas por acoplo copropagante. b) La red de período corto posee una periodicidad de $534,5 \text{ nm}$ y produce bandas de transmisión prohibidas por acoplo contrapropagante.

Muchas de las aplicaciones de las redes de difracción en fibra óptica se encuentran en el área de telecomunicaciones, como lo son la compensación de dispersión de señales mediante FBGs con chirp [7,8], multiplexación en longitud de onda con redes de Bragg (*Wavelength Division Multiplexing*, WDM) [9,10] o con redes de período largo [11]. Las LPGs también encuentran aplicación como filtros pasabanda mediante acoplo a modos de la cubierta y reacoplo al modo fundamental utilizando fibras de núcleo hueco [12], o como ecualizadores de ganancia en fibras activas de erbio [13] para evitar errores de transmisión en esquemas de WDM.

Uno de los usos más notables que se le han dado a las redes de período corto y de período largo es en la fabricación de láseres de fibra óptica. Desde la primera demostración de un láser hecho en una fibra activa de erbio mediante FBGs por R. Kashyap [14], estos láseres han atraído considerable atención por su inherente robustez al no incorporar elementos de óptica de espacio libre, la versatilidad en el manejo de las características del resonador óptico, la facilidad y el bajo coste de implementación, etc.

Entre algunos diseños podemos mencionar un láser de fibra óptica operado en régimen *Q-Switch* mediante uso de acustoópticos [15], o un láser de fibra en configuración Fabry-Perot utilizando dos FBGs y una LPG intracavidad para tener acción láser con un modo de la cubierta [16]. Un láser operando con estos modos de orden superior de la fibra resultaría muy útil para aplicaciones de alta potencia, ya que el área modal de los modos de la cubierta es más grande que el del modo fundamental, lo cual ayudaría a evitar la aparición de efectos no lineales [17].

Otra área importante en la que se usan las redes de difracción es la de sensado de magnitudes físicas. Tanto las redes de período largo como las redes de Bragg son sumamente sensibles a tensiones mecánicas o a cambios de temperatura en su entorno [18] [19]. Además, gracias a que gran parte de la funcionalidad de las redes de período largo depende del índice externo a ésta, las LPGs también son empleadas como sensores de índice de refracción [20]. La respuesta al cambio de estas variables físicas consiste en variaciones en la posición espectral y la intensidad de las resonancias de la red.

Una de las aplicaciones más prometedoras de las redes de difracción es en el procesamiento de señales sin necesidad de conversiones al dominio electrónico-digital; esto es, el manejo y procesamiento de datos directamente en el dominio fotónico. Esto permite no sólo el ahorro en sistemas costosos de conversión de las señales ópticas a señales eléctricas y viceversa, sino también la posibilidad de preservar el gran ancho de banda propio de las comunicaciones ópticas [21,22].

Para poder implementar el procesamiento de datos todo óptico, es necesario encontrar dispositivos que puedan realizar en el dominio fotónico las mismas operaciones básicas que se requieren en procesamiento de señales eléctricas, rutinariamente efectuadas por combinaciones de componentes electrónicos. Dos de las más importantes operaciones son las de derivación e integración, por lo que se han hecho múltiples propuestas en los últimos años para realizar ambas operaciones de forma todo óptica [23].

La primera propuesta teórica de un derivador fotónico fue hecha por Nam Quoc Ngo y colaboradores en 2004 [24]. En éste trabajo, se utilizó la teoría de filtros digitales para demostrar derivadores enteros todo ópticos mediante interferómetros. Posteriormente surgieron múltiples propuestas de diferenciadores de orden entero todo ópticos a partir de redes de período largo uniformes [25], interferómetros de tipo Mach-Zehnder o Michelson con óptica de espacio libre [26], interferómetros mediante dos LPGs en serie [27], redes de Bragg de acoplo cercano al 100% en transmisión [28], entre otras.

Respecto a los integradores todo ópticos, los primeros trabajos fueron también realizados por el grupo de Ngo en el 2006, con aplicaciones en generación de solitones oscuros [29,30]. La primera demostración experimental de un integrador fotónico no se vería hasta el 2008 con el grupo de José Azaña, en donde se utilizó una cavidad Fabry-Perot mediante dos FBGs grabadas en una fibra activa de Er-Yb [31]. Por su función de acumular el campo eléctrico de una señal óptica incidente, los integradores ópticos suelen ser resonadores ya sea activos o pasivos, éstos últimos con una ventana temporal de funcionamiento limitada. Algunas propuestas alternativas de integradores son la de una red de período corto en reflexión con un bajo nivel de acoplo [32], la de un resonador en anillo con ganancia [33], o la de una red de Bragg con un salto de fase operando en transmisión [34].

De forma análoga al dominio electrónico, las posibles aplicaciones de estos dispositivos derivadores e integradores son muy numerosas. Algunas de ellas son el conformado de pulsos ópticos de perfil arbitrario [35,36], sensado y control ultrarrápido [24] y reconstrucción de fase de señales ópticas [37]. Las técnicas de reconstrucción de fase son especialmente importantes en telecomunicaciones, ya que para futuros esquemas de codificación de datos por fibra óptica será necesario utilizar modulación de fase (*Phase-Shift Keying*) si se desea aprovechar al máximo la limitada banda del erbio que actualmente se utiliza para el envío y recepción de datos [38].

Las técnicas de reconstrucción de fase también son muy relevantes en otros ámbitos, especialmente en aquellos donde se necesita caracterizar formas de onda no repetitivas, como en el estudio de transiciones de fase de materiales, reacciones químicas o en la observación de la dinámica de células vivas [39]. De hecho, en un artículo clásico escrito por Alan Oppenheim y Jae Lim se demuestra que bajo ciertas condiciones, una señal puede ser completamente reconstruida (con un factor de escala) utilizando solamente información sobre su fase [40].

Otra de las aplicaciones más interesantes de los operadores de cálculo todo ópticos es la solución de ecuaciones diferenciales en tiempo real. En un trabajo del año 2013 se logró resolver de forma totalmente analógica la siguiente ecuación diferencial utilizando un derivador fotónico [41]:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t) \quad (1.1.1)$$

Donde $x(t)$ representa la entrada al sistema, $y(t)$ la solución de la ecuación y k es una constante positiva arbitraria. Para éste experimento se logró obtener correctamente la salida $y(t)$ ante entradas de pulsos de picosegundos, lo cual significa la resolución en tiempo real de eventos de 3 órdenes de magnitud más rápidos que la velocidad máxima de reloj de los microprocesadores más veloces disponibles en el mercado (que operan en los GHz). Una de las posibles aplicaciones de la solución de ecuaciones diferenciales en forma todo óptica es en los lazos de realimentación de control automático en donde se necesiten tiempos de respuesta inalcanzables para la electrónica convencional.

Es oportuno recalcar que la mayoría de los dispositivos derivadores o integradores propuestos se basan en redes de difracción, de forma que se aprovechan las ventajas de la compatibilidad con la tecnología de fibra óptica, entre las que se encuentran las bajas pérdidas de inserción, la inmunidad al ruido electromagnético y sobre todo su simplicidad de incorporación a redes todo ópticas [23]. Además, todos los avances hechos en estos dispositivos para fibra óptica son potencialmente extrapolables a estructuras en circuitos fotónicos integrados dedicados a computación óptica [42,43].

Si bien el desarrollo de los operadores de cálculo todo óptico ha sido prolífico en los últimos años, todas las propuestas han sido de derivadores o integradores de orden entero. No fue hasta el año 2009 con el trabajo de C. Cuadrado-Laborde que se propuso un derivador todo óptico de orden fraccional [44]. La discusión acerca de qué significa lo anterior se presenta en el siguiente apartado.

1.2 Introducción al Cálculo Fraccional

1.2.1 Antecedentes Históricos

¿Qué es una derivada fraccional? Para responder a esta interrogante, podemos hacernos la misma pregunta que se hizo el marqués de L'Hôpital en 1695, y que exteriorizó mediante una carta a Gottfried Leibniz, justo en la época donde el cálculo estaba dando sus primeros pasos. La pregunta es, si dada una función $y(x)$, la siguiente expresión tiene algún sentido:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} \tag{1.2.1}$$

La contestación de Leibniz en una carta fechada el 30 de setiembre de 1695 fue la siguiente:

“Puede usted ver que se puede expresar una cantidad como $d^{1/2}\overline{xy}$ o $d^{1:2}\overline{xy}$ por una serie infinita. A pesar de que las series infinitas y la geometría están poco relacionadas, las primeras admiten solamente el uso de exponentes que sean enteros positivos o negativos, y no admiten, hasta donde sabemos, el uso de exponentes fraccionales.”

Más adelante en esta carta de respuesta continúa [45]:

“Así, se obtiene que $d^{1/2}x$ es igual a $x\sqrt{dx}:x$. Ésta es una aparente paradoja, de la cual algún día podrán ser obtenidas consecuencias útiles.”

Se puede decir que esta carta marcó el nacimiento del cálculo fraccional. Desde entonces, este tema atrajo la atención de grandes matemáticos como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann y Laurent [46]. En particular, una importante aportación realizada por Sylvestre Lacroix en un escrito suyo de 1819 fue generalizar a un orden fraccional la diferenciación de la siguiente función [47]:

$$y(x) = x^m \tag{1.2.2}$$

Donde el exponente m es un número entero positivo. La derivada de orden n que todos conocemos del cálculo diferencial es:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.2.3)$$

Al generalizar los factoriales de la ecuación (1.2.3) mediante la función Gamma, podemos reescribirla como:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.2.4)$$

En la ecuación (1.2.2), si tomamos $m = 1$, obtenemos el caso sencillo de $y(x) = x$. Luego, eligiendo de forma arbitraria $n = 1/2$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d^{1/2} y(x)}{dx^{1/2}} = \frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.2.5)$$

Si bien esto fue efectuado por Lacroix a modo de ejercicio, el resultado que obtuvo coincide con la definición moderna de derivada fraccional. Tanto las derivadas como las integrales de orden fraccional se definen hoy en día partiendo de la llamada integral de Riemann-Liouville, de la cual hablaremos más adelante.

Las derivadas e integrales de orden fraccional fueron vistas como meras curiosidades matemáticas hasta que en 1823, Niels Henrik Abel utilizó los incipientes resultados que se tenían hasta el momento en este tema para resolver el problema físico de la curva tautócrona, que consiste en averiguar la forma que debe tener una pendiente para que un objeto sin rozamiento se deslice hasta su punto más bajo en un tiempo fijo, independientemente de su sitio de partida [46].

Posteriormente, Bernhard Riemann y Joseph Liouville se dedicaron a formular definiciones para las derivadas e integrales de orden arbitrario, llegando a resultados que eran válidos solamente para casos particulares o que dependían de funciones auxiliares. No fue hasta 1884 con el trabajo de P.M. Laurent que se tuvieron las herramientas necesarias para tratar el tema con suficiente rigor matemático. Así, finalmente se llegó a entender el cálculo fraccional como una generalización de los conceptos de derivación e integración del cálculo clásico.

De esta manera, para una función $f(x)$ con ciertas restricciones, es posible definir un operador D^q que engloba tanto a la diferenciación ($q > 0$) como a la integración ($q < 0$) en una misma operación:

$$D^q f(x) = \frac{d^q f(x)}{dx^q} \quad (1.2.6)$$

Es interesante destacar que el orden q de este operador no solamente incluye a cualquier número real, sino que se extiende también a los números complejos. Así, el nombre “Cálculo Fraccional” en realidad es inadecuado, ya que engloba una operación mucho más general. Un término más correcto sería el de “Diferintegración de Orden Arbitrario”, de modo que se conserva el nombre de cálculo fraccional solamente por razones históricas.

Aparte de las contribuciones hechas por Oliver Heaviside a finales del siglo XIX en el estudio de líneas de transmisión mediante técnicas de cálculo fraccional, esta rama de las matemáticas vio solamente modestos avances durante los años 1900-1970. En 1973 se publica la primera monografía dedicada exclusivamente al cálculo fraccional por Keith Oldham y Jerome Spanier [48], y el primer congreso relacionado a este tema fue organizado por Bertram Ross en New Haven, Estados Unidos en, 1974.

1.2.2 Interpretación y Aplicaciones del Cálculo Fraccional

Las derivadas e integrales de orden fraccional no poseen una interpretación geométrica o física sencilla como sí la tienen sus contrapartes de orden entero [46,48]. De hecho, ésta es una cuestión que fue debatida desde los primeros congresos sobre cálculo fraccional, tanto en New Haven (1974), en la Universidad de Strathclyde en el Reino Unido (1984) y en la Universidad de Nihon, en Japón (1989) sin llegar a ningún consenso.

A pesar de esto, es posible adquirir cierta noción del significado de una integral fraccional de orden q , para órdenes que se limiten a $-1 \leq q < 0$. Dada una función causal $f(t)$, donde t representa el tiempo, su integral fraccional de orden q se define como una convolución entre $f(t)$ y una función de peso o “función de memoria” $h(t)$:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad -1 \leq q < 0 \quad (1.2.7)$$

Donde la función de memoria $h(t)$ viene dada por:

$$h(t) = \frac{1}{t^{q+1}} \quad (1.2.8)$$

Al representar gráficamente la función de memoria $h(t)$ tal y como aparece en la ecuación (1.2.7), es decir, al ser integrada respecto a τ como $h(t-\tau)$ para un t arbitrario, podemos darnos cuenta del porqué de su nombre.

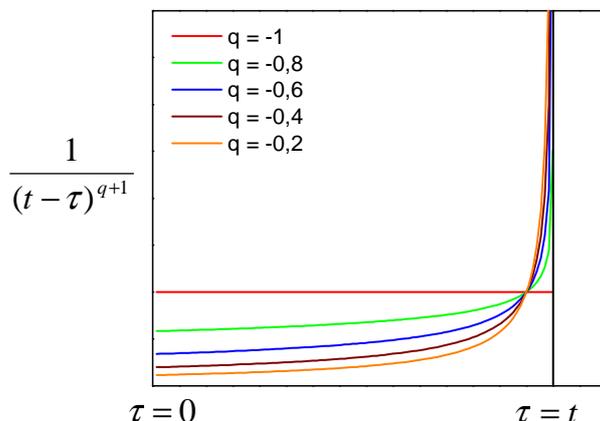


Figura 1.2.1. Función de memoria $h(t-\tau)$ para distintos valores de q . Un orden de $q = -1$ es una función de memoria que le da igual peso a todos los eventos pasados previos a t . Al acercarse q a 0, la importancia a los eventos pasados es menor

A partir de la Figura 1.2.1, vemos que cuando $q = -1$, la función de memoria se convierte en un escalón unitario, o lo que es lo mismo, una función de memoria que le da igual importancia a todos los eventos pasados desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$. Para valores crecientes de q , se le da cada vez menos importancia a los valores pasados cercanos a $\tau = 0$, y se le da mayor peso a lo que esté cercano a $\tau = t$. En el límite, cuando q es muy cercano a 0, la función de memoria se convierte en una delta de Dirac, impidiendo recordar nada del pasado y dejando intacta la función original:

$$\lim_{q \rightarrow 0^-} \frac{d^q f(t)}{dt^q} = \int_0^t \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau = f(t) \quad (1.2.9)$$

Así, la integral fraccional es básicamente una integral que da distintos pesos a eventos pasados de acuerdo con su orden de integración fraccional, donde $q = -1$ significa recordar todo el pasado de la función $f(t)$ por igual, y $q = 0$ es equivalente a no recordar nada.

Por otra parte, en un interesante artículo por I. Podlubny [49], se menciona otra posible interpretación física de la integral fraccional. Como acabamos de mencionar, una integral clásica ($q = -1$) se puede interpretar como la suma de todo el historial de comportamiento de una función f desde un tiempo $\tau = 0$:

$$\frac{d^{-1} f(t)}{dt^{-1}} = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (1.2.10)$$

Luego, una integral fraccional para $-1 < q < 0$ se puede interpretar también como el historial del comportamiento de la función $f(t)$, pero no respecto a un eje temporal uniforme, sino respecto a un eje temporal modificado por una función $g_i(t, q)$ que depende

del tiempo original t y del orden q . En otras palabras, se sustituyen los diferenciales de tiempo uniforme dt por diferenciales de “tiempo dilatado” $dg_t(\tau, q)$:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau, q) \quad (1.2.11)$$

El autor de dicho artículo menciona de forma explícita la forma que posee esta función $g_t(t, q)$ y establece un muy posible vínculo con la teoría de la relatividad general. De hecho, gracias a estas propiedades de variar el peso de eventos pasados, en otros trabajos se destaca el uso del cálculo fraccional para modelar fenómenos físicos como la viscosidad y la elasticidad de materiales, que requieren precisamente de funciones de memoria [50,51]. Otra de las grandes aportaciones del cálculo fraccional es la posibilidad de simplificar el modelado de fenómenos físicos mediante ecuaciones diferenciales fraccionales [46]. En particular, podemos encontrar soluciones a problemas en electroquímica [48], ondas y difusión en medios finitos [52], control de trayectorias de robots [53,54], estudio del efecto piel en electromagnetismo [55], entre muchos otros.

En ámbitos más cercanos a lo que concierne a esta tesis, se han encontrado importantes aplicaciones de los derivadores de orden fraccional en óptica y microscopía, ya que éstos son capaces de introducir variaciones de intensidad directamente proporcionales a la fase de un objeto [56]. Para esta aplicación puntual, un filtro fraccional de orden $\frac{1}{2}$ permite optimizar la relación señal-ruido a la hora de obtener la fase que se busca [57]. Es posible extender esta idea al campo de las fibras ópticas para recuperación de la información de fase de señales ultrarrápidas, lo cual será demostrado experimentalmente en el último capítulo experimental del presente trabajo [58].

Otra de las aplicaciones relevantes del cálculo fraccional en el área de la óptica es la implementación de la transformada fraccional de Fourier (*Fractional Fourier Transform* o FrFT) [59-61]. En analogía directa con los operadores diferintegrales, la FrFT es una generalización de la transformada de Fourier, y curiosamente se interpreta como la representación de la señal (para nuestros propósitos temporal) respecto a un eje rotado un ángulo α [62,63].

En el caso de la transformada de Fourier convencional el ángulo de rotación es $\pi/2$, lo cual resulta razonable dado que la transformada de Fourier representa eventos temporalmente cortos como espectros con componentes de alta frecuencia y viceversa: cualquier evento en el infinito del eje temporal es enviado al origen en su representación en el eje de frecuencias. Adicionalmente, por propiedades de la transformada de Fourier, la aplicación de ésta dos veces produce $f(-t)$ (una rotación del eje de π), mientras que al aplicarla cuatro veces (una rotación del eje de 2π) es precisamente equivalente a la identidad [60].

Una de las aplicaciones más atractivas en óptica de la FrFT se da en problemas de difracción de ondas electromagnéticas. Como sabemos, en régimen de campo lejano o zona de Fraunhofer, el campo es directamente proporcional a la transformada de Fourier de la transmitancia del objeto que difracta a la onda [64]. Normalmente es más difícil conocer el patrón de campo cercano, sin embargo, es posible mostrar que la difracción en la zona de Fresnel está dada por la transformada fraccional de Fourier, que va evolucionando (sólo en intensidad) hasta convertirse en la transformada de Fourier convencional al llegar a la zona de campo lejano [65,66].

Como vemos, en la última mitad del siglo XX el cálculo fraccional ha venido encontrando cada vez más aplicaciones en distintos campos de la ciencia. En el caso de la tecnología de fibra óptica, después de la primera propuesta de un derivador fraccional todo óptico mediante interferómetros [44], se han propuesto múltiples alternativas para derivadores de orden fraccional, como redes de Bragg asimétricas y con un salto de fase operadas en reflexión [67], derivadores a partir de anillos resonantes de silicio [68], redes de Bragg con inclinación respecto al eje de propagación en fibras activas [69] o redes de período largo subacopladas [70]. Respecto a los integradores de orden fraccional todo-ópticos, la literatura disponible es bastante más limitada, ya que la única propuesta de un dispositivo físico realizable es mediante una red de Bragg apodizada [71].

Entre algunos de los potenciales usos para los operadores de cálculo fraccional fotónicos figuran la estimación de la magnitud de chirp de un pulso láser [72], recuperación de fase de señales no repetitivas [58], implementación de la transformada fraccional de Fourier [70,73], nuevos esquemas de codificación de señales variando el orden fraccional de la FrFT [74], etc.

Otro ejemplo relevante de la aplicación de los operadores de cálculo fraccional es en la teoría de control automático. Normalmente para reducir el error entre el valor deseado o *set-point* y la salida real de un sistema, es necesario introducir un elemento integrador en un lazo de control. Sin embargo, los elementos integradores suelen introducir un tiempo de retardo considerable para llegar a un error cercano a cero [71]. Un integrador de orden $1/2$ en un lazo de control permitiría alcanzar un *set-point* adecuado en un tiempo breve en comparación a un integrador de orden entero, además de incrementar la estabilidad y robustez del sistema [75,76].

Teniendo en mente la creciente relevancia que han adquirido los operadores de cálculo fraccional en la actualidad, así como el profundo impacto que han tenido y que siguen teniendo las tecnologías fotónicas, es el propósito de esta tesis el contribuir a obtener más “consecuencias útiles” de la aparente paradoja a la que se enfrentaron L’Hôpital y Leibniz hace ya más de 300 años [77-79].

1.3 Objetivos y Estructura de la Tesis

Los principales objetivos de la tesis son los siguientes:

1. Estudiar la teoría de cálculo fraccional, para poder diseñar y demostrar experimentalmente dispositivos fotónicos basados en LPGs que produzcan la derivada fraccional de pulsos láser de picosegundos.
2. Estudiar la teoría de redes de difracción en fibra óptica, con especial énfasis en las redes de período largo uniformes (LPGs) y los factores que determinan su ancho de banda.
3. Medir la sensibilidad de las redes de período largo ante variaciones en tensión mecánica axial, temperatura e índice de refracción.
4. Demostrar experimentalmente una aplicación de los derivadores de orden fraccional en reconstrucción de fase de pulsos ópticos.

Para lograr este objetivo, la tesis ha sido estructurada en 5 capítulos. Los contenidos de éstos son:

Capítulo 1: Introducción

El presente capítulo se ha dedicado a describir cualitativamente las redes de difracción en fibra óptica y sus usos. Posteriormente se ha introducido el tema del cálculo fraccional, y algunas razones del por qué se ha dado un interés de implementar operadores de derivadas e integrales fraccionales en el dominio fotónico.

Capítulo 2: Marco Teórico

En este capítulo se describe la teoría del cálculo fraccional, y la representación matemática de un pulso óptico y de su derivada fraccional teórica. Posteriormente, se analiza la teoría de las redes de período corto (FBGs) y de período largo (LPGs), y se explica por qué éstas últimas pueden funcionar como derivadores fraccionales bajo ciertas circunstancias.

Capítulo 3: Grabación de Redes de Difracción en Fibra Óptica

El capítulo 3 está dedicado al diseño y fabricación de redes de difracción, enfocando el trabajo especialmente a la obtención de redes de período largo con ancho de banda reducido. Posteriormente, estas redes espectralmente estrechas son sometidas a pruebas de sensibilidad ante tensión axial, temperatura e índice de refracción.

Capítulo 4: Derivación Fraccional - Implementación Experimental Usando Redes de Período Largo

Este capítulo está dedicado a los experimentos de derivación fraccional. Se inicia con la obtención experimental de la función de transferencia de una LPG para caracterizarla como derivador fraccional. Posteriormente, se obtiene experimentalmente la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de un pulso óptico mediante dos configuraciones: LPG uniforme e interferómetro Mach-Zehnder con dos LPGs en serie. Finalmente se muestra una aplicación de éstos dispositivos al recuperar la fase de un pulso óptico de picosegundos mediante un método basado en derivadas de orden $\frac{1}{2}$, y es validado por un segundo método de reconstrucción de fase mediante un medio dispersivo.

Capítulo 5: Conclusiones y Trabajo Futuro

El capítulo final recoge las conclusiones obtenidas en éste trabajo. Además, se discuten algunas de las líneas abiertas que deja la presente tesis, como lo son los integradores de orden fraccional todo ópticos y aplicaciones de las LPGs de ancho de banda estrecho en telecomunicaciones.

Bibliografía - Capítulo 1

- [1] K. O. Hill, Y. Fujii, D. C. Johnson y B. S. Kawasaki, «Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication,» *Applied Physics Letters*, vol. 32, nº 10, pp. 647-649, 1978.
- [2] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, Academic Press, 1999.
- [3] T. Erdogan, «Fiber Grating Spectra,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, nº 8, pp. 1277-1294, 1997.
- [4] R. Kashyap, J. R. Armitage, R. Wyatt, S. T. Davey y D. L. Williams, «All-fibre narrowband reflection gratings at 1500 nm,» *Electronics Letters*, vol. 26, nº 11, pp. 730-731, 1990.
- [5] D. L. Williams, S. T. Davey, R. Kashyap, J. R. Armitage y B. J. Ainslie, «Direct observation of UV induced bleaching of 240 nm absorption band in photosensitive germanosilicate glass fibers,» *Electronics Letters*, vol. 28, nº 4, pp. 369-370, 1992.
- [6] B. Leconte, W. X. Xie, M. Douay, P. Bernage, P. Niay, J. F. Bayon, E. Delevaque y H. Poignant, «Analysis of color-center-related contribution to Bragg grating formation in Ge:SiO₂ fiber based on a local Kramers-Kronig transformation of excess loss spectra,» *Applied Optics*, vol. 36, nº 24, pp. 5923-5930, 1997.
- [7] J. Williams, I. Bennion, K. Sugden y N. J. Doran, «Fibre dispersion compensation using a chirped in-fibre Bragg grating,» *Electronics Letters*, vol. 30, nº 12, pp. 985-986, 1994.
- [8] K. O. Hill, S. Thériault, B. Malo, F. Bilodeau, T. Kitagawa, D. C. Johnson, J. Albert, K. Takiguchi, K. Kataoka y K. Hagimoto, «Chirped in-fibre Bragg grating dispersion compensators: linearisation of dispersion characteristic and demonstration of dispersion compensation in 100 Km, 10 Gbit/s optical fibre link,» *Electronics Letters*, vol. 30, nº 21, pp. 1755-1756, 1994.
- [9] I. Baumann, J. Seifert, W. Nowak y M. Sauer, «Compact all-fiber add-drop multiplexer using fiber bragg gratings,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 8, nº 10, pp. 1331-1333, 1996.
- [10] Y. W. Song, Z. Pan, D. Starodubov, V. Grubsky, E. Salik, S. A. Havstad, Y. Xie, A. E. Willner y J. Feinberg, «All-fiber WDM optical crossconnect using ultrastrong widely tunable FBGs,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 13, nº 10, pp. 1103-1105, 2001.
- [11] Y. Zhu, C. Lu, B. M. Lacquet, P. L. Swart y S. J. Spammer, «Wavelength-tunable add/drop multiplexer for dense wavelength division multiplexing using long-period fiber gratings and fiber stretchers,» *Optics Communications*, nº 208, pp. 338-344, 2002.
- [12] S. Choi, T. J. Eom, Y. Jung, B. H. Lee, J. W. Lee y K. Oh, «Broad-band tunable all-fiber bandpass filter based on hollow optical fiber and long-period grating pair,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 17, nº 1, pp. 115-117, 2005.
- [13] A. M. Vengsarkar, J. R. Pedrazzani, J. B. Judkins, P. J. Lemaire, N. S. Bergano y C. R. Davidson,

- «Long-period fiber-grating-based gain equalizers,» *Optics Letters*, vol. 21, n° 5, pp. 336-338, 1996.
- [14] R. Kashyap, J. R. Armitage, R. Wyatt, S. T. Davey y D. L. Williams, «All-fibre narrowband reflection gratings at 1500 nm,» *Electronics Letters*, vol. 26, n° 11, pp. 730-732, 1990.
- [15] Y. O. Barmenkov, A. V. Kiryanov, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Pulse regimes of erbium-doped fiber laser Q-switched using acousto-optical modulator,» *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 20, n° 5, 2014.
- [16] D. Sáez-Rodríguez, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Fiber laser with combined feedback of core and cladding modes assisted by an intracavity long-period grating,» *Optics Letters*, vol. 36, n° 10, pp. 1839-1841, 2011.
- [17] J. W. Nicholson, J. M. Fini, A. M. DeSantolo, E. Monberg, F. DiMarcello, J. Fleming, C. Headley, D. J. DiGiovanni, S. Ghalmi y S. Ramachandran, «A higher-order-mode erbium-doped-fiber amplifier,» *Optics Express*, vol. 18, n° 17, pp. 17651-17657, 2010.
- [18] A. D. Kersey, M. A. Davis, H. J. Patrick, M. LeBlanc, K. P. Koo, C. G. Askins, M. A. Putnam y E. J. Friebele, «Fiber grating sensors,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, n° 8, pp. 1442-1463, 1997.
- [19] S. W. James y R. P. Tatam, «Optical fibre long-period grating sensors; characteristics and application,» *Measurement Science and Technology*, n° 14, pp. R49-R61, 2003.
- [20] H. J. Patrick, A. D. Kersey y F. Bucholtz, «Analysis of the response of long period fiber gratings to external index of refraction,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, n° 9, pp. 1606-1612, 1998.
- [21] D. R. Solli y B. Jalali, «Analog optical computing,» *Nature Photonics*, vol. 9, pp. 704-706, 2015.
- [22] L. Venema, «Photonic technologies,» *Nature*, vol. 424, n° 6950, p. 809, 2003.
- [23] J. Azaña, «Ultrafast analog all-optical signal processors based on fiber-grating devices,» *IEEE Photonics Journal*, vol. 2, n° 3, pp. 359-386, 2010.
- [24] N. Q. Ngo, S. F. Yu, S. C. Tjin y C. H. Kam, «A new theoretical basis of higher derivative optical differentiators,» *Optics Communications*, n° 230, pp. 115-129, 2004.
- [25] M. Kulishov y J. Azaña, «Long-period fiber gratings as ultrafast optical differentiators,» *Optics Letters*, vol. 30, n° 20, pp. 2700-2702, 2005.
- [26] Y. Park, J. Azaña y R. Slavík, «Ultrafast all-optical first and higher-order differentiators based on interferometers,» *Optics Letters*, vol. 32, n° 6, pp. 710-712, 2007.
- [27] R. Slavík, Y. Park, D. Krcmarík y J. Azaña, «Stable all-fiber photonic temporal differentiator using a long-period fibergrating interferometer,» *Optics Communications*, n° 282, pp. 2339-2342, 2009.
- [28] M. A. Preciado y M. A. Muriel, «Design of an ultrafast all-optical differentiator based on a fiber Bragg grating in transmission,» *Optics Letters*, vol. 33, n° 21, pp. 2458-2460, 2008.

- [29] N. Q. Ngo, «Optical integrator for optical dark-soliton detection and pulse shaping,» *Applied Optics*, vol. 45, n° 26, pp. 6785-6791, 2006.
- [30] N. Q. Ngo y L. N. Binh, «Optical realization of Newton-Cotes based integrators for dark soliton generation,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 24, n° 1, pp. 563-571, 2006.
- [31] R. Slavík, Y. Park, N. Ayotte, S. Doucet, T. Ahn, S. LaRochelle y J. Azaña, «Photonic temporal integrator for all-optical computing,» *Optics Express*, vol. 16, n° 22, pp. 18202-18214, 2008.
- [32] J. Azaña, «Proposal of a uniform fiber Bragg grating as an ultrafast all-optical integrator,» *Optics Letters*, vol. 33, n° 1, pp. 4-6, 2008.
- [33] Y. Ding, X. Zhang y D. Huang, «Proposal for loadable and erasable optical memory unit based on dual active microring optical integrators,» *Optics Communications*, n° 281, pp. 5315-5321, 2008.
- [34] N. Q. Ngo, «Design of an optical temporal integrator based on a phase-shifted fiber Bragg grating in transmission,» *Optics Letters*, vol. 32, n° 20, pp. 3020-3022, 2007.
- [35] Y. Park, M. Kulishov, R. Slavík y J. Azaña, «Picosecond and sub-picosecond flat-top pulse generation using uniform long-period fiber gratings,» *Optics Express*, vol. 14, n° 26, pp. 12670-12678, 2006.
- [36] M. Asghari y J. Azaña, «Proposal and analysis of a reconfigurable pulse shaping technique based on multi-arm optical differentiators,» *Optics Communications*, n° 281, pp. 4581-4588, 2008.
- [37] F. Li, Y. Park y J. Azaña, «Complete temporal pulse characterization based on phase reconstruction using optical ultrafast differentiation (PROUD),» *Optics Letters*, vol. 32, n° 22, pp. 3364-3366, 2007.
- [38] C. Dorrer, «High-speed measurements for optical telecommunications systems,» *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 12, n° 4, pp. 843-858, 2006.
- [39] K. Goda y B. Jalali, «Dispersive Fourier transformation for fast continuous single-shot measurements,» *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 102-112, 2013.
- [40] A. V. Oppenheim y J. S. Lim, «The importance of phase in signals,» *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, n° 5, pp. 529-541, 1981.
- [41] S. Tan, Z. Wu, L. Lei, S. Hu, J. Dong y X. Zhang, «All-optical computation system for solving differential equations based on optical intensity differentiator,» *Optics Express*, vol. 21, n° 6, pp. 7008-7013, 2013.
- [42] M. J. Strain y M. Sorel, «Integrated III-V Bragg gratings for arbitrary control over chirp and coupling coefficient,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 20, n° 22, pp. 1863-1865, 2008.
- [43] M. Ferrera, Y. Park, L. Razzari, B. E. Little, S. T. Chu, R. Morandotti, D. J. Moss y J. Azaña, «On-chip CMOS-compatible all-optical integrator,» *Nature Communications*, vol. 1, n° 29, 2010.
- [44] C. Cuadrado-Laborde, «All-optical ultrafast fractional differentiator,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 40, pp. 983-990, 2009.

-
- [45] B. Ross, «The development of fraccional calculus,» *Historia Mathematica*, n° 4, pp. 75-89, 1977.
- [46] K. S. Miller y B. Ross., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley and Sons, 1993.
- [47] S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Courcier, 1819, pp. 409-410.
- [48] K. Oldham y J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press, 1973.
- [49] I. Podlubny, «Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation,» *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 5, n° 4, pp. 367-386, 2002.
- [50] M. Du, Z. Wang y H. Hu, «Measuring memory with the order of fractional derivative,» *Scientific Reports*, vol. 3, n° 3431, pp. 1-3, 2013.
- [51] R. L. Bagley y P. J. Torvik, «On the fractional calculus model of viscoelastic behavior,» *Journal of Rheology*, vol. 30, n° 133, pp. 133-155, 1986.
- [52] O. P. Agrawal, «A general souldion for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain,» *Computers and Structures*, n° 79, pp. 1497-1501, 2001.
- [53] M. F. Silva y J. A. Tenreiro, «Fractional order PD joint control of legged robots,» *Journal of Vibration and Control*, vol. 12, n° 12, pp. 1483-1501, 2006.
- [54] J. A. Tenreiro, M. F. Silva, R. F. Barbosa, I. S. Jesus, C. M. Reis, M. G. Marcos y A. F. Galhano, «Some applications of fractional calculus in engineering,» *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, pp. 1-34, 2009.
- [55] J. A. Tenreiro y A. M. Galhano, «Fractional order inductive phenomena based on the skin effect,» *Nonlinear Dynamics*, n° 68, pp. 107-115, 2012.
- [56] B. A. Horwitz, «Phase image differentiation with linear intensity output,» *Applied Optics*, vol. 17, n° 2, pp. 181-186, 1978.
- [57] E. Tajahuerce, T. Szoplik, J. Lancis, V. Climent y M. Fernandez, «Phase-object fractional differentiation using Fourier plane filters,» *Pure and Applied Optics*, n° 6, pp. 481-490, 1997.
- [58] C. Cuadrado-Laborde, M. V. Andrés y J. Lancis, «Self-referenced phase reconstruction proposal of GHz bandwidth non-periodical optical pulses by in-fiber semi-differintegration,» *Optics Communications*, n° 284, pp. 5636-5640, 2011.
- [59] L. M. Bernardo y O. D. Soares, «Fractional Fourier transforms and imaging,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, n° 10, pp. 2622-2626, 1994.
- [60] V. A. Narayanan y K. M. Prabhu, «The fractional Fourier transform: theory, implementation and error analysis,» *Microprocessors and Microsystems*, n° 27, pp. 511-521, 2003.
- [61] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky y M. Alper-Kutay, The fractional Fourier transform with applications in

- optics and signal processing, Wiley, 2001.
- [62] A. W. Lohmann, «Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, n° 10, pp. 2181-2186, 1993.
- [63] B. M. Hennelly y J. T. Sheridan, «Generalizing, optimizing and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, n° 5, pp. 917-927, 2005.
- [64] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw Hill, 1996.
- [65] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez y L. B. Almeida, «The fractional Fourier transform in optical propagation problems,» *Journal of Modern Optics*, vol. 41, n° 5, pp. 1037-1044, 1994.
- [66] H. M. Ozaktas y M. Mendlovic, «Fractional Fourier optics,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 12, n° 4, pp. 743-751, 1995.
- [67] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «In-fiber all-optical fractional differentiator,» *Optics Letters*, vol. 34, n° 6, pp. 833-835, 2009.
- [68] B. Jin, J. Yuan, C. Yu, X. Sang, Q. Wu, F. Li, K. Wang, B. Yan, G. Farrell y P. K. Wai, «Tunable fractional-order photonic differentiator based on the inverse Raman scattering in a silicon microring resonator,» *Optics Express*, vol. 23, n° 9, pp. 11141-11151, 2015.
- [69] H. Shahoei, J. Albert y J. Yao, «Tunable fractional order temporal differentiator by optically pumping a tilted fiber bragg grating,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 24, n° 9, pp. 730-732, 2012.
- [70] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Design of an ultra-broadband all-optical fractional differentiator with a long-period fiber grating,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 571-576, 2011.
- [71] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Proposal and design of an in-fiber all-optical fractional integrator,» *Optics Communications*, n° 283, pp. 5012-5015, 2010.
- [72] C. Cuadrado-Laborde, J. Lancis y M. V. Andrés, «Proposal of time-resolved chirp-measurement through all-optical in-fiber mathematical operators,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 97-108, 2010.
- [73] Y. Zhang, F. Zhang y M. Lu, «Relationship between fractional calculus and fractional Fourier transform,» *Proceedings of the SPIE - Signal and Data Processing of Small Targets*, vol. 9596, pp. 95960A1-95960A8, 2015.
- [74] C. Cuadrado-Laborde, R. Duchowicz, R. Torroba y E. E. Sicre, «Fractional Fourier transform dual random phase encoding of time-varying signals,» *Optics Communications*, n° 281, pp. 4321-4328, 2008.
- [75] S. Manabe, «The non-integer integral and its application to control systems,» *ETJ of Japan*, vol. 6, n° 3, pp. 83-87, 1961.
- [76] M. S. Takyar y T. T. Georgiou, «The fractional integrator as a control design element,» de *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Estados Unidos, 2007.

- [77] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Long-period grating assisted fractional differentiation of highly chirped light pulses,» *Optics Communications*, n° 363, pp. 37-41, 2016.
- [78] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Experimental demonstration of fractional order differentiation using a long-period grating-based in-fiber modal interferometer,» *Optics Communications*, n° 380, pp. 35-40, 2016.
- [79] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Instantaneous frequency measurement by in-fiber 0.5th order fractional differentiation,» *Optics Communications*, n° 371, pp. 89-92, 2016.

Capítulo 2 – Marco Teórico

2.1 Cálculo Fraccional

2.1.1 Definiciones Fundamentales

El primer objetivo del presente análisis teórico será presentar los operadores de derivación e integración fraccional como una extensión de los conceptos ya conocidos del cálculo convencional de orden entero. Se expondrá la manera en que es posible englobar tanto la operación de diferenciación como la de integración en un mismo operador matemático. Ésta operación matemática general se definirá como la “diferintegral” de una función. El desarrollo en este apartado es un resumen del que se presenta en el libro clásico de Oldham y Spanier [1].

Para iniciar, denotaremos la n -ésima derivada de una función $f(x)$ respecto a su variable independiente x de la forma usual:

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad (2.1.1)$$

donde n es un número entero positivo.

Debido a que la integración es la operación inversa a la derivación, es natural pensar que podamos definir la n -ésima integral de una función mediante la notación de la ecuación (2.1.2):

$$\frac{d^{-n} f}{dx^{-n}} \quad (2.1.2)$$

Para explicar el origen del operador “diferintegral”, tendremos que limitarnos sólo a las integrales definidas. Ahora, éste proceso de integración necesariamente incluirá límites de integración inferior y superior, por lo que es necesario tomarlos en cuenta de alguna manera. Definiremos la ecuación (2.1.2) como la integral n -ésima con un límite inferior de integración igual a cero:

$$\frac{d^{-n} f}{dx^{-n}} = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0) dx_0 \quad (2.1.3)$$

Como también será necesario integrar con un límite inferior a distinto de cero, se puede hacer la siguiente sustitución:

$$\int_a^x f(y)dy = \int_0^{x-a} f(y+a)dy \quad (2.1.4)$$

A partir de lo anterior, y utilizando la ecuación (2.1.3) la integral n -ésima de una función a partir de un límite inferior a arbitrario se escribirá como:

$$\frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \quad (2.1.5)$$

Por su generalidad respecto a los límites de integración, se preferirá trabajar con la ecuación (2.1.5) para definir el operador diferintegral que se describirá más adelante.

Procederemos entonces a buscar las fórmulas que describen el proceso iterativo de diferenciar n veces una función, así como el de integrarla n veces. Al comparar ambas se llegará entonces a una sola ecuación que englobe ambos procesos, y a partir de allí se generalizará este operador no sólo para órdenes enteros n , sino también para órdenes reales q .

Empezaremos con la derivación. Las tres primeras derivadas de una función f son:

$$\frac{d^1 f}{dx^1} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \{ [\delta x]^{-1} [f(x) - f(x - \delta x)] \} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \{ [\delta x]^{-2} [f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)] \} \quad (2.1.7)$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \{ [\delta x]^{-3} [f(x) - 3f(x - \delta x) + 3f(x - 2\delta x) - f(x - 3\delta x)] \} \quad (2.1.8)$$

Repitiendo este proceso, se deduce la fórmula para la derivada de orden n :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ [\delta x]^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta x) \right\} \quad (2.1.9)$$

Por conveniencia, y para luego comparar la ecuación (2.1.9) con la definición de integral definida por sumas de Riemann, definiremos los diferenciales δx de la siguiente manera:

$$\delta x = \delta_N x = \frac{x-a}{N} \quad (2.1.10)$$

donde N es un número natural arbitrariamente grande y a una constante menor a x . La constante a se convertirá en el límite inferior de integración a la hora de generalizar la

fórmula de derivada de orden n para incluir a las integrales. Sustituyendo el nuevo diferencial discretizado en la ecuación de la derivada de orden n , se obtiene:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta_N x) \right\} \quad (2.1.11)$$

Ahora, el coeficiente binomial dentro del sumatorio se puede considerar como cero para valores de $n < k$, por lo que se pueden extender sin problemas los índices de la suma hasta un valor $N - 1$, siempre que $N - 1 > n$. Tenemos entonces:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta_N x) \right\} \quad (2.1.12)$$

Para hacer los diferenciales arbitrariamente pequeños, debemos hacer que N tienda a infinito. Por lo tanto, la ecuación (2.1.12) se reescribe como:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{x-a}{N} \right]^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f \left(x - k \left[\frac{x-a}{N} \right] \right) \right\} \quad (2.1.13)$$

Teniendo así la fórmula de la derivada de orden n convenientemente escrita, procedemos a deducir la ecuación para las integrales definidas de orden n a partir de la definición por sumas de Riemann.

La integral de orden 1, con límite de integración igual a una constante a es:

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1} f}{[d(x-a)]^{-1}} &= \int_a^x f(y) dy \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x] [f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \dots + f(a + \delta_N x)] \right\} \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x] \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(x - k\delta_N x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

De forma similar, al integrar una vez más se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{d^{-2}f}{[d(x-a)]^{-2}} &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x - \delta_N x) + 3f(x - 2\delta_N x) + \dots + Nf(a + \delta_N x)] \right\} \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^2 \left[\sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x - k\delta_N x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

La integral de tercer orden viene a ser:

$$\begin{aligned} \frac{d^{-3}f}{[d(x-a)]^{-3}} &= \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^3 \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} f(x - k\delta_N x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Finalmente, la ecuación para la n -ésima integral se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^n \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} f(x - k\delta_N x) \right\} \quad (2.1.17)$$

Haciendo tender los diferenciales a cero mediante la elección de N arbitrariamente grande, tenemos:

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{x-a}{N} \right]^n \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} f\left(x - k \left[\frac{x-a}{N} \right]\right) \right\} \quad (2.1.18)$$

De esta forma, si se comparan las ecuaciones de la derivada (2.1.13) y de la integral de orden n (2.1.18), se observa una clara similitud. Para unificar ambas ecuaciones, se debe hacer uso de la función Gamma, que vendrá a servir entonces de piedra angular entre las operaciones de diferenciación e integración. En particular haremos uso de la siguiente propiedad:

$$\binom{k+n-1}{k} = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \quad (2.1.19)$$

Mediante la ecuación (2.1.19), es posible resumir ambos operadores matemáticos en uno solo. Sustituyendo n por $-q$ obtenemos:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{x-a}{N} \right]^{-q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} f \left(x-k \left[\frac{x-a}{N} \right] \right) \right\} \quad (2.1.20)$$

La ecuación (2.1.20) será llamada de ahora en adelante la diferintegral de orden q de f , donde q no solamente puede ser un entero negativo o positivo, sino que puede ser cualquier número real.

Si bien la definición de diferintegral propuesta en la ecuación (2.1.20) es la más fundamental y se puede aplicar a una gran cantidad de funciones, es sólo útil a la hora de calcular diferintegrales de funciones muy simples. Existe una definición más manejable basada en una transformada integral. Ésta se conoce como integral de Riemann-Liouville.

Para conocer de dónde proviene dicha transformada integral, es necesario recurrir a la fórmula de una integral iterada de orden n pero no por sumas de Riemann como se hizo en la ecuación (2.1.18), sino más bien escrita como una integral simple acompañada de una función de peso. Dicha ecuación es:

$$\frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \cdots \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy \quad (2.1.21)$$

Si se hace uso nuevamente de la función Gamma para generalizar la integración a órdenes no necesariamente enteros, se obtiene lo que se conoce como la integral de Riemann-Liouville, que viene a ser una definición alternativa de la diferintegral de orden q , con la salvedad de que ésta definición solo se aplica para órdenes $q < 0$ (integrales fraccionales), ya que de lo contrario la integral no converge. Nótese que de nuevo se sustituye n por $-q$:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x (x-y)^{-q-1} f(y) dy, \quad q < 0 \quad (2.1.22)$$

¿Qué sucede entonces con las derivadas? Para extender esta nueva (y más conveniente) definición de diferintegral para órdenes de q mayores o iguales a cero, o lo que es lo mismo, para derivadas fraccionales, es necesario recurrir a la propiedad de suma de índices de los operadores diferenciales:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}} \right\} \quad (2.1.23)$$

De esta forma, para calcular una derivada fraccional de orden q , inicialmente se debe obtener la integral de Riemann-Liouville de orden $q-n$, donde n es un número natural tal que $q-n$ sea negativo; esto último para asegurarnos de que la integral converja. Luego, al resultado se le calcula la n -ésima derivada respecto a su variable independiente. En otras palabras:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{d}{dx^n} \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^x (x-y)^{n-q-1} f(y) dy \right\}, \quad q \geq 0, \quad q-n < 0 \quad (2.1.24)$$

Las ecuaciones (2.1.22) y (2.1.24) serán entonces las definiciones de integral fraccional y derivada fraccional, respectivamente. Éstas poseen la ventaja de que son mucho más sencillas de manipular que la definida mediante sumas de Riemann.

2.1.2 Diferintegrales de Funciones Simples

Para iniciar nuestro estudio de las diferintegrales, estudiaremos la diferintegral de orden q de la función constante $f(x) = C$. Al aplicar la definición de diferintegral por sumas de Riemann (2.1.20) y mediante propiedades de la función Gamma, se llega a:

$$\frac{d^q(C)}{[d(x-a)]^q} = C \frac{(x-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad (2.1.25)$$

A modo de ejemplo, se muestra en la Figura 2.1.1 las diferintegrales de orden q de la función constante $C = 1$ con el parámetro a igual a cero. Los valores de q fueron elegidos entre cero y uno. Los valores $q = 0$ y $q = 1$ no se representan, ya que corresponden a los casos triviales de la función $f(x) = 1$ y su primera derivada, respectivamente.

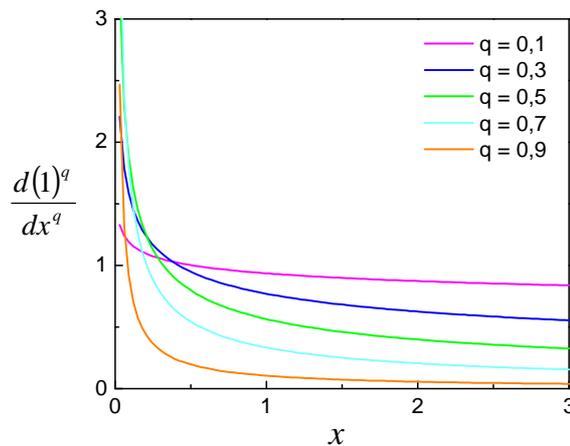


Figura 2.1.1 Derivadas de orden fraccional para $0 < q < 1$ de una función constante.

Nótese que las derivadas fraccionales de una constante dependen de la variable independiente x , y para $x < 0$ toman valores complejos. De forma análoga, se representan en la Figura 2.1.2 las diferintegrales de orden q menor a cero para la misma función constante $C = 1$.

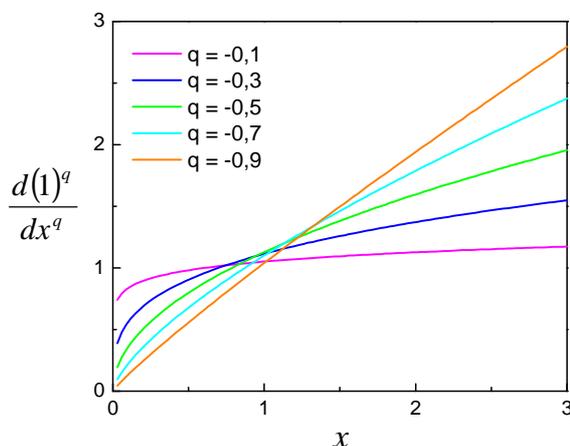


Figura 2.1.2 Integrales de orden fraccional $-1 < q < 0$ para una función constante.

Cabe destacar que si la función constante es $C = 0$, la diferintegral también será igual a cero independientemente del orden q que se utilice.

Resulta interesante observar el comportamiento de las diferintegrales de la función constante si el orden de diferintegración es tal que $|q| > 1$. En el caso de las derivadas fraccionales, se tiene el resultado en la Figura 2.1.3.

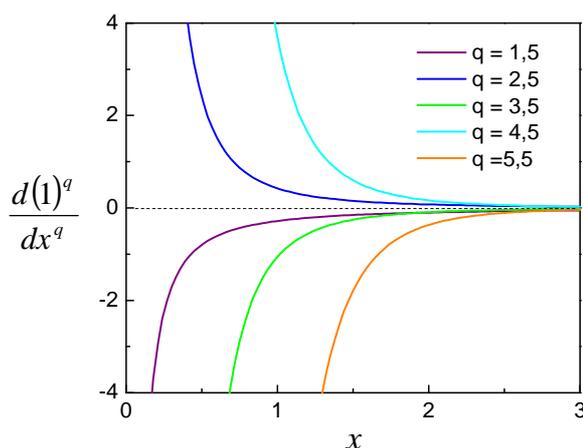


Figura 2.1.3 Derivadas de orden fraccional de la función constante para $q > 1$.

El comportamiento asintótico al tender x a infinito es común para todos los órdenes, mas no así su signo, que alterna de valor debido a que la función Gamma también lo hace para argumentos negativos. El gráfico de la función Gamma se adjunta en la Figura 2.1.4.

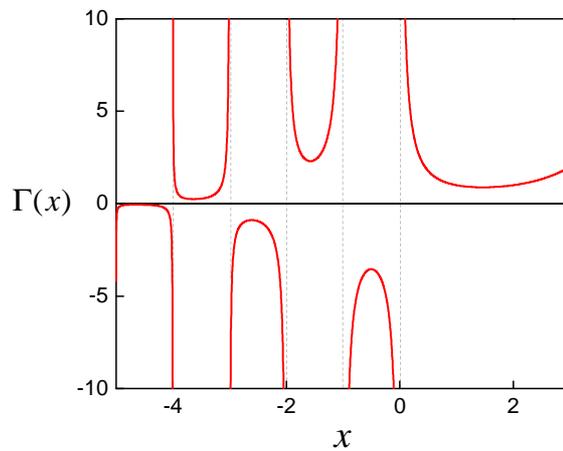


Figura 2.1.4 Función Gamma para $-5 < x < 3$.

Teniendo en mente que la función Gamma es siempre mayor a cero para argumentos positivos, y recordando que las integrales fraccionales incluyen un factor $\Gamma(1-q)$ es de esperar que las integrales fraccionales también sean positivas, como se muestra en la Figura 2.1.5.

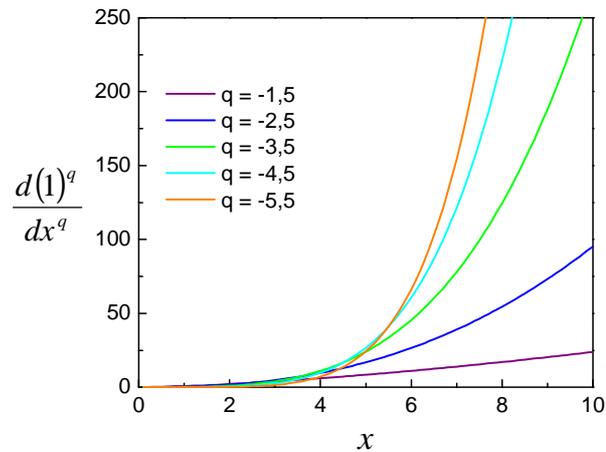


Figura 2.1.5 Integrales de orden fraccional de la función constante para $q < -1$.

Pasando a analizar la función lineal, si trabajamos con:

$$f(x) = x - a \quad (2.1.26)$$

La diferintegral de orden q es:

$$\frac{d^q(x-a)}{[d(x-a)]^q} = \frac{(x-a)^{1-q}}{\Gamma(2-q)} \quad (2.1.27)$$

Esta expresión es bastante similar a la ecuación de la diferintegral de una constante, salvo por un orden extra del numerador y un desplazamiento en los posibles cambios de signo de la función Gamma.

Para funciones de tipo

$$f(x) = (x-a)^p \quad (2.1.28)$$

La definición de diferintegral sólo es válida para valores de $p > -1$, ya que una de las condiciones para que una función se considere como diferintegrable es que cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)f(x)\} = 0 \quad (2.1.29)$$

Para concluir, se puede mostrar que la ecuación de la diferintegral de orden q para este tipo de funciones es:

$$\frac{d^q(x-a)^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)} \quad p > -1, \quad \forall q \quad (2.1.30)$$

En este apartado se han explorado las diferintegrales de funciones del tipo $C(x-a)^p$. La importancia de funciones de este tipo radica en su uso para representaciones en series de potencias de funciones analíticas más complejas [1].

2.1.3 Propiedades Generales de las Diferintegrales

A continuación se hará un listado de las principales propiedades de las diferintegrales utilizando la misma nomenclatura que en la referencia [1]:

1. Linealidad

$$\frac{d^q(f_1 + f_2)}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^q f_1}{[d(x-a)]^q} + \frac{d^q f_2}{[d(x-a)]^q} \quad (2.1.31)$$

2. Homogeneidad

Para una constante C que acompañe a la función f tenemos:

$$\frac{d^q[Cf]}{[d(x-a)]^q} = C \frac{d^q[f]}{[d(x-a)]^q} \quad (2.1.32)$$

3. Diferintegral de una serie de potencias

Sea una función analítica $\varphi(x)$ con la siguiente representación en series de potencias:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad a_k = \frac{a^{(k)}(a)}{k!} \quad (2.1.33)$$

La diferintegral de orden q se aplica a todos los términos de la serie infinita:

$$\frac{d^q \varphi(x)}{[d(x-a)]^q} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^q (x-a)^k}{[d(x-a)]^q} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)(x-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} \quad (2.1.34)$$

El intervalo de convergencia de la serie diferintegrada es el mismo que el de la serie original excepto en los extremos, donde puede que no converja.

4. Cambio de Escala

Para el caso de una función $f(x)$ en donde se considera un límite inferior de diferintegración a y una constante β que sirva como factor de escala, queremos indagar en la forma que adopta la diferintegral de la siguiente expresión

$$f(\beta(x-a) + a) \quad (2.1.35)$$

Mediante la definición por integral de Riemann-Liouville se obtiene que:

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(\beta(x-a)+a) = \beta^q \frac{d^q}{[d(\beta(x-a))]^q} f(\beta(x-a)+a) \quad (2.1.36)$$

El caso más útil será cuando el límite inferior a sea igual a cero, ya que la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{d^q f(\beta x)}{dx^q} = \beta^q \frac{d^q f(\beta x)}{d(\beta x)^q} \quad (2.1.37)$$

5. Regla de Leibniz para productos

La diferintegral de orden q de un producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es de nuevo una generalización de las reglas del producto tanto para derivadas como para integrales de orden entero. Se tiene entonces que:

$$\frac{d^q [f(x)g(x)]}{[d(x-a)]^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \frac{d^{q-k} f(x)}{[d(x-a)]^{q-k}} \frac{d^k g(x)}{[d(x-a)]^k} \quad (2.1.38)$$

Donde para un valor q arbitrario, el coeficiente binomial generalizado en la ecuación anterior se define como:

$$\binom{q}{k} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(q-k+1)} \quad (2.1.39)$$

6. Regla de la Cadena

Debido a la imposibilidad de encontrar una regla generalizada para integrar funciones compuestas, no es posible describir una fórmula que englobe tanto a la derivación como a la integración de orden generalizado. Si bien existe una fórmula para órdenes q positivos, su enorme complejidad la hace poco práctica, por lo que no será tomada en cuenta en este trabajo.

7. Traslación

Si se tiene una función con su argumento trasladado $f(x+A)$, con A una constante positiva, entonces la fórmula para su diferintegral es:

$$\frac{d^q f(x+A)}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^q f(x+A-a)}{[d(x+A-a)]^q} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{q+k}(1)}{[d(x+A-a)]^{q+k}} \frac{d^{-k} f(a+A)}{[d(a+A-a)]^{-k}} \quad (2.1.40)$$

Vale la pena destacar que la serie de potencias en la ecuación anterior usualmente se anula si se consideran las funciones que normalmente se utilizan en problemas físicos [1].

8. Diferintegral de la función exponencial

Para nuestro análisis será fundamental conocer qué forma tiene la diferintegral de la función exponencial con un argumento lineal:

$$f(x) = \exp(-cx) \quad (2.1.41)$$

Con c una constante. Primero es necesario expresar la función f como una serie de potencias centrada en a , que será el límite inferior de la diferintegral:

$$\exp(-cx) = \exp(-ca) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k (x-a)^k}{\Gamma(k+1)} \quad (2.1.42)$$

Tomando como variable de diferintegración $c(x-a)$, introducimos el operador diferintegral dentro de la serie, y operamos término a término para obtener:

$$\frac{d^q \exp(-cx)}{[d(cx-ca)]^q} = \frac{\exp(-ca)}{[c(x-a)]^q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k (x-a)^k}{\Gamma(k-q+1)} \quad (2.1.43)$$

Para manejar una expresión más sucinta que la anterior, es necesario recurrir a la definición de la función Gamma incompleta inferior γ^* , la cual depende tanto de la variable independiente x como de una constante c . La definición es muy similar a la de la función Gamma, sólo que la constante c en esta ocasión juega el papel de límite superior de la integral. En series de potencias, la función Gamma incompleta inferior se escribe como:

$$\gamma^*(c, x) = \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(x+c+1)} \quad (2.1.44)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.1.44), y la propiedad de cambio de escala (2.1.37) para eliminar la dependencia respecto a $(cx-ca)$ de la diferintegral, ésta se puede reescribir en términos de la función Gamma incompleta inferior de la siguiente forma:

$$\frac{d^q \exp(-cx)}{[d(x-a)]^q} = \frac{\gamma^*(-q, -c(x-a))}{(x-a)^q} \exp(-cx) \quad (2.1.45)$$

En el caso de que el límite inferior de integración a sea cero, la expresión se simplifica considerablemente. Por conveniencia de notación llamaremos a $-c$ como $j\omega$. Luego, mediante propiedades de la función $\gamma^*(c, x)$ cuando x es grande, la ecuación (2.1.45) se puede simplificar a:

$$\frac{d^q \exp(j\omega x)}{dx^q} = (j\omega)^q \exp(j\omega x) \quad (2.1.46)$$

Éste último resultado será clave para estudiar el comportamiento de un pulso óptico ante un operador diferintegral. En particular, nos interesará el caso en el que $q=1/2$, y al que llamaremos operador semiderivada.

2.2 Diferintegral de un Pulso Óptico

En este apartado se pretende describir matemáticamente cómo las técnicas del cálculo fraccional se pueden aplicar en el procesamiento de señales; específicamente en el cálculo de la diferintegral de un pulso óptico. Posteriormente, estas técnicas de cálculo fraccional serán utilizadas para obtener la fase del campo eléctrico que compone al pulso.

La importancia de averiguar la fase radica en que gran parte de la información que puede contener una señal se encuentra contenida en ésta. En un experimento efectuado por Oppenheim y Lim [2], se demuestra que es posible reconstruir buena parte de una señal partiendo solamente de su fase original y utilizando una distribución de amplitud totalmente aleatoria.

Para iniciar nuestro análisis, el pulso óptico en cuestión será denominado $f(t)$, y puede ser descrito mediante la siguiente ecuación

$$f(t) = e(t) \exp(j\omega_0 t) \quad (2.2.1)$$

Donde $e(t)$ es la envolvente compleja del pulso, y ω_0 es la frecuencia óptica que contiene la portadora. Una representación gráfica de un pulso de picosegundos se muestra en la Figura 2.2.1, con la parte real del pulso en rojo y la envolvente compleja en línea discontinua.

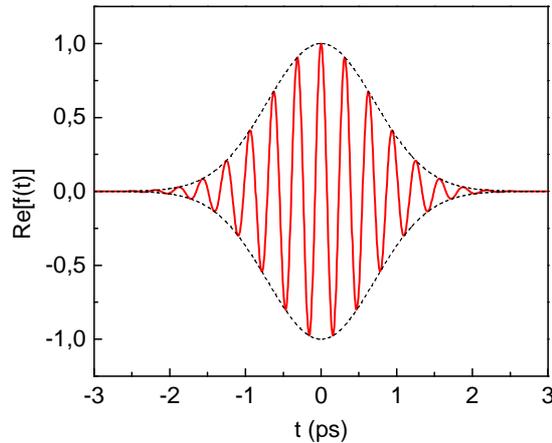


Figura 2.2.1 Representación de la parte real de un pulso óptico de picosegundos.

La envolvente compleja tendrá una amplitud $|e(t)|$ y una fase $\varphi(t)$:

$$e(t) = |e(t)| \exp[j\varphi(t)] \quad (2.2.2)$$

Combinando la definición del pulso (2.2.1) junto con la de su envolvente compleja (2.2.2), encontramos que éste puede ser reescrito mediante un solo término de fase $\Theta(t)$:

$$f(t) = |e(t)| \exp[j(\varphi(t) + \omega_0 t)] = |e(t)| \exp[j\Theta(t)] \quad (2.2.3)$$

Es precisamente ésta función de fase $\Theta(t)$ la que va a contener la mayor parte de la información acerca del pulso óptico, y de ahí su gran relevancia. La primera derivada respecto al tiempo de ésta función de fase se denomina frecuencia instantánea, y es una forma de medir cómo cambia la frecuencia de la portadora ω_0 a lo largo del pulso [3]:

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.2.4)$$

Nótese que la frecuencia instantánea depende en gran parte de la fase de la envolvente $\varphi(t)$. Si la razón de cambio respecto al tiempo de $\varphi(t)$ es nula o una constante, la frecuencia instantánea mantiene su valor inalterado a lo largo de todo el pulso, igual a como se observa en la Figura 2.2.1.

Sin embargo, si $d\varphi(t)/dt$ es una función del tiempo, la frecuencia instantánea variará dentro del pulso. Si éste fuera el caso, diremos que el pulso tiene *chirp*. En el caso de que la frecuencia aumente con el tiempo, se dice que es un *up-chirp*, mientras que si disminuye, es un *down-chirp*. Un ejemplo de *up-chirp* se muestra en la Figura 2.2.2.

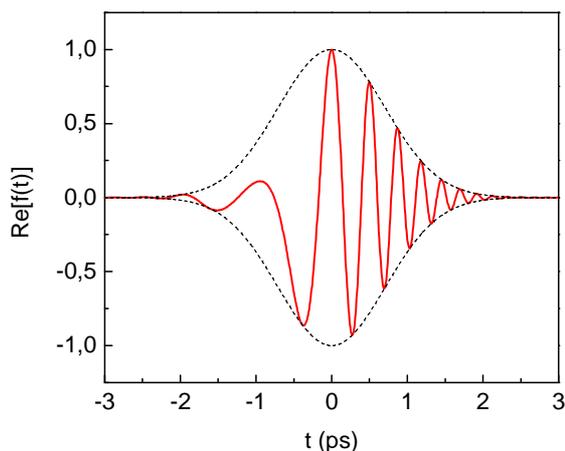


Figura 2.2.2 Representación de un pulso óptico con *up-chirp*.

Procederemos ahora a estudiar la representación del pulso en el dominio de la frecuencia. Haciendo uso de la ecuación (2.2.1), la transformada de Fourier del pulso óptico $f(t)$ es:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = E(\omega-\omega_0) \quad (2.2.5)$$

Donde $E(\omega)$ es la transformada de la envolvente compleja $e(t)$. La ecuación anterior nos indica que la transformada de Fourier del pulso consiste en la transformada de su envolvente compleja desplazada en frecuencia una cantidad ω_0 , que es la frecuencia de su portadora.

Debido a éste desplazamiento en frecuencia, las ecuaciones se simplifican si se trabaja en banda base. Esto es, usando una variable de frecuencia Ω centrada en ω_0 y definida como:

$$\Omega = \omega - \omega_0 \quad (2.2.6)$$

Valiéndose de la transformada de Fourier inversa, y de la nueva variable de banda base, se puede encontrar una expresión alternativa para el pulso óptico en el dominio temporal, que será útil para nuestros propósitos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.2.7)$$

Nótese que en la expresión anterior, la dependencia temporal se encuentra solamente en las exponenciales complejas dentro del integrando. Recurriendo entonces a la linealidad del operador diferintegral, y al resultado (2.1.46) acerca de la diferintegral de una función exponencial, podemos introducir dicho operador dentro de la integral:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\Omega) [(j\Omega)^q e^{j\Omega t}] d\Omega \quad (2.2.8)$$

La integral anterior no tiene en general solución analítica. Por lo tanto, lo más conveniente es trabajar directamente en el dominio de la frecuencia realizando de nuevo una transformada de Fourier, ya que de esta forma la diferintegral de $f(t)$ se simplifica a:

$$\mathfrak{S} \left\{ \frac{d^q f(t)}{dt^q} \right\} = (j\Omega)^q \mathfrak{S} \{ f(t) \} = (j\Omega)^q E(\Omega) \quad (2.2.9)$$

De esta manera, nos damos cuenta de que la diferintegral de orden q de un pulso óptico en el tiempo es equivalente a filtrar la señal con una función de transferencia en el dominio de la frecuencia de la forma:

$$H(\Omega) = (j\Omega)^q \quad (2.2.10)$$

Así, dependiendo de si q es positivo o negativo, el filtro tendrá un comportamiento distinto. Para q positivo, se considerará una derivada fraccional, mientras que para un q negativo, será una integral fraccional [4,5].

2.3 Función de Transferencia de un Derivador Fraccional

2.3.1 Respuesta del Derivador Fraccional en Amplitud y Fase

Como se mostró en el apartado anterior, una diferintegral puede representar en el dominio de la frecuencia a un filtro. Estudiaremos entonces el comportamiento de éste para valores de q positivos, o lo que es lo mismo, para un derivador fraccional. Reescribiendo la ecuación (2.2.10), un derivador fraccional en el dominio de la frecuencia es:

$$H(\omega) = [j(\omega - \omega_0)]^q \quad q > 0 \quad (2.3.1)$$

Es necesario estudiar con detenimiento la forma que tiene dicha función de transferencia tanto en amplitud como en fase. De ésta manera, estaremos en capacidad de comparar el comportamiento de un derivador fraccional ideal con el de dispositivos físicamente realizables que puedan llevar a cabo ésta función. En amplitud la función tendrá la siguiente forma para valores de q mayores a cero:

$$|H(\omega)| = |\omega - \omega_0|^q \quad q > 0 \quad (2.3.2)$$

y centrándonos en la frecuencia de la portadora ω_0 , o equivalentemente, en $\Omega = 0$, observamos la respuesta en amplitud en la Figura 2.3.1:

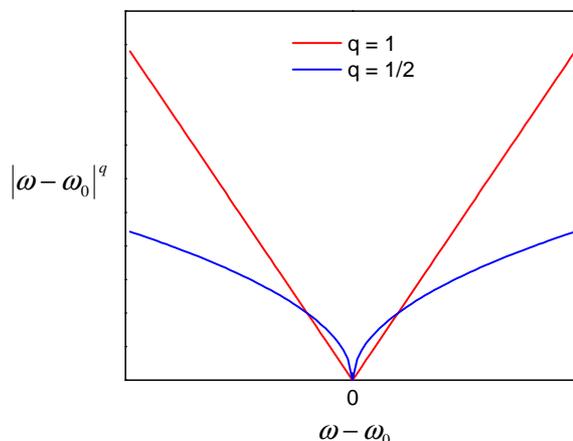


Figura 2.3.1 Respuesta en amplitud de derivadores de orden 1 y $1/2$.

El filtro en amplitud elimina la frecuencia de la portadora, y le da un peso importante a las frecuencias altas. Este comportamiento es general para cualquier orden q entre 0 y 1. Como ejemplos elegimos $q = 1$, que corresponde a la derivada de orden 1, y $q = 1/2$ o semiderivada, ya que ambas jugarán un papel importante en la recuperación de fase de pulsos ópticos. Estas ideas ya se han explorado previamente en otros trabajos para detección de objetos de fase [6-8].

Por otro lado, para la respuesta en fase tenemos lo siguiente:

$$\arg[H(\omega)] = \begin{cases} -q \frac{\pi}{2}, & \omega < \omega_0 \\ +q \frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

El derivador fraccional introduce así dos fases distintas dependiendo de si la frecuencia óptica es menor o mayor a ω_0 . En otras palabras, tenemos una diferencia o salto de fase de $q\pi$ radianes centrado en la frecuencia de la portadora del pulso. Esto lo apreciamos gráficamente en la Figura 2.3.2.

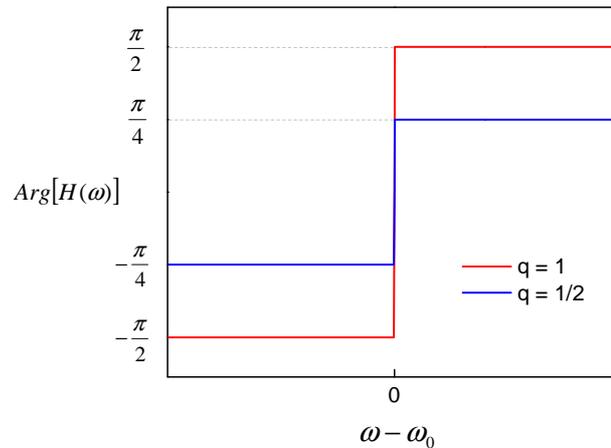


Figura 2.3.2 Respuesta en fase de derivadores de orden 1 y 1/2.

En la Figura 2.3.2 se ha trabajado nuevamente en banda base al colocar la frecuencia de la portadora en el origen, y se ha normalizado la fase respecto a π . El salto de fase para un derivador de orden 1 es simplemente π , mientras que para uno fraccional de orden 1/2 es $1/2 \pi$.

Físicamente, el introducir una fase para las frecuencias menores a ω_0 , y luego otra distinta para las que son mayores a ω_0 , implicará que el pulso en el dominio temporal se verá partido en dos pulsos con fases opuestas. Se explorará ésta consecuencia en la siguiente sección.

2.3.2 Derivada Fraccional de un Pulso Gaussiano

Iniciaremos el estudio del efecto de una derivada fraccional sobre un pulso Gaussiano. En general, la envolvente compleja de un pulso de este tipo tiene la siguiente forma:

$$e(t) = E_0 e^{-\left(1+jC\right)\left(\frac{t}{\tau_G}\right)^2} \quad (2.3.5)$$

Donde τ_G corresponde al ancho temporal a $1/e$ del máximo, y la constante C es el parámetro de chirp, que es adimensional, y es una forma de medir cuánto varía la frecuencia de la portadora a lo largo del pulso. Si la constante C es negativa, la frecuencia aumenta con el tiempo, dando paso a un up-chirp, mientras que si es positiva, sucede lo contrario, y se denomina un down-chirp.

Su transformada de Fourier corresponde a:

$$E(\omega) = \frac{E_0 \tau_G \sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+C^2}} \exp \left\{ j\Phi(\omega) - \frac{\omega^2 \tau_G^2}{4(1+C^2)} \right\} \quad (2.3.6)$$

La función de fase $\Phi(\omega)$ está definida como:

$$\Phi(\omega) = -\frac{1}{2} \arctan(C) + \frac{C \tau_G^2}{4(1+C^2)} \omega^2 \quad (2.3.7)$$

Iniciaremos entonces el estudio de la derivada fraccional con el caso sencillo en el cual el parámetro de chirp C es nulo, y con una duración de pulso $\tau_G = 1$ ps. Además, tomaremos la amplitud $E_0 = 1$ V/m.

Procederemos entonces a aplicar el filtro derivador al espectro del pulso Gaussiano, siempre tomando en cuenta el hecho de que se trabaja en banda base. Se muestra en la Figura 2.3.3 el espectro del pulso en amplitud y el resultado de aplicarle las derivadas de orden 1 y de orden 1/2.

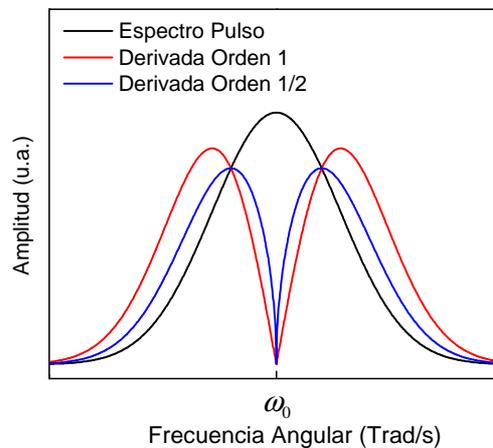


Figura 2.3.3. Espectro del Pulso Gaussiano y sus derivadas de orden 1 y 1/2 en el dominio frecuencial.

Como podemos observar, el pulso es dividido en dos partes por el filtro derivador, eliminando la frecuencia de la portadora ω_0 . Con respecto al comportamiento en fase, el derivador introducirá una fase distinta para ambas mitades del espectro del pulso: $+q\pi/2$ para las frecuencias mayores a la portadora, y $-q\pi/2$ para las frecuencias menores, como se representa esquemáticamente en la Figura 2.3.4.

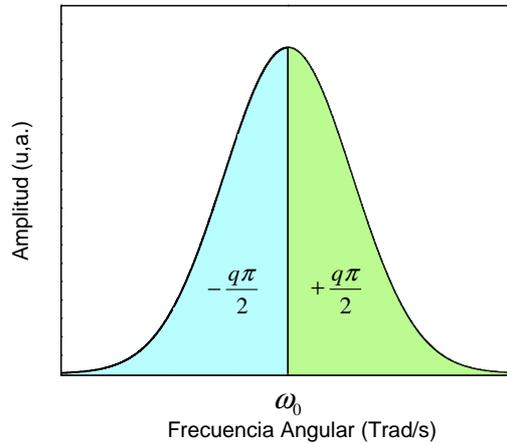


Figura 2.3.4 Representación de la fase introducida por un derivador de orden q sobre el espectro del pulso original.

Haciendo la transformada de Fourier inversa del espectro del pulso filtrado por el derivador se obtiene la forma temporal de la derivada, tanto de orden 1 como de orden 0.5. Se trabajó con las expresiones analíticas en los casos en que el software utilizado (Mathematica versión 9.0) pudiera hallarlas. Para los demás casos se optó por muestrear las señales en el tiempo y aplicar el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier o FFT. En estos casos, se tuvo el cuidado de usar frecuencias de muestreo mayores a la frecuencia de Nyquist, deducida a partir del ancho de banda máximo del pulso.

Como decíamos anteriormente, el salto de fase entre las dos mitades del espectro es físicamente equivalente a que en el dominio del tiempo, el pulso se vea separado en dos lóbulos con una fase distinta. La parte real de la envolvente compleja del pulso Gaussiano y su primera derivada se muestran normalizadas a 1 en la Figura 2.3.5.

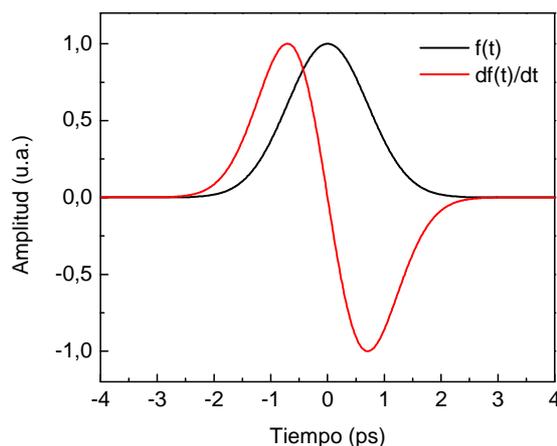


Figura 2.3.5. Parte real de la envolvente compleja de un pulso Gaussiano y de su primera derivada.

Observamos entonces que el pulso se separa en dos partes con una fase distinta. Sin embargo, para la derivada fraccional de orden 1/2, el pulso se vuelve asimétrico, como se ve en la Figura 2.3.6.

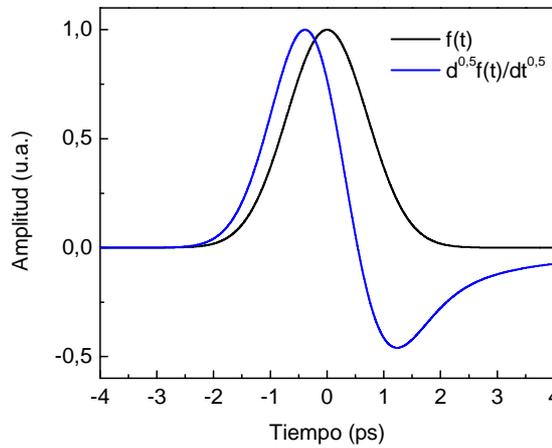


Figura 2.3.6 Parte real de la envolvente compleja de un pulso Gaussiano y de su derivada de orden 0.5.

Al representar en intensidad tanto la derivada de primer orden como la de orden 0.5, obtenemos el gráfico en la Figura 2.3.7.

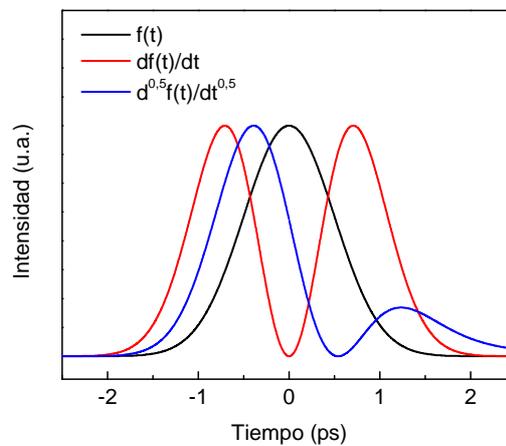


Figura 2.3.7 Intensidad normalizada del pulso Gaussiano y sus derivadas de orden 1 y 1/2.

La derivada fraccional separa en dos partes el pulso gaussiano principalmente por la diferencia de fase entre ambas partes del espectro. Este comportamiento en fase es tan importante que incluso si la función de transferencia a considerar fuera la de un transformador de Hilbert:

$$H(\omega) = [j\text{Sgn}(\omega - \omega_0)]^q, \quad q > 0 \tag{2.3.8}$$

donde $Sgn(\cdot)$ corresponde a la función signo, la diferencia de fase también divide al pulso en dos lóbulos, incluso cuando su respuesta en amplitud es unitaria [9,10].

Por otro lado, la forma del pulso derivado cambia sustancialmente si se le agrega un chirp a la señal. Se muestra en la Figura 2.3.8 solamente el caso de la derivada de orden 1/2 del mismo pulso gaussiano usado anteriormente, pero con parámetros de chirp de $C = 0$, $C = 2$ y $C = 4$. Al introducir una constante de chirp distinta de cero, las derivadas del pulso no tienen forma analítica, de modo que se utilizó la FFT para estudiarlas.

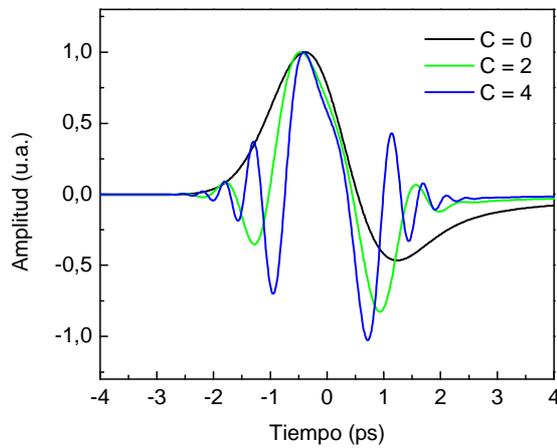


Figura 2.3.8 Chirp positivo en la derivada de orden 1/2 de un pulso Gaussiano (parte real de la envolvente).

El efecto es más claro al observar la intensidad del pulso. Conforme aumenta el valor de la constante de chirp, el pulso se vuelve más simétrico, como se muestra en la Figura 2.3.9. Además, nótese que con el aumento del chirp, la distancia temporal entre los máximos de ambos lóbulos se hace cada vez menor:

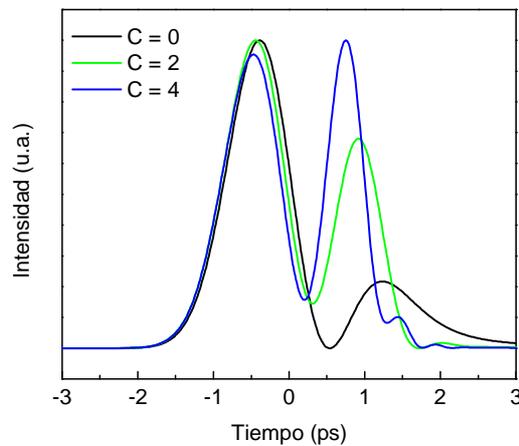


Figura 2.3.9 Chirp positivo en la derivada de orden 1/2 de un pulso Gaussiano (intensidad).

La decisión de sólo representar la derivada de orden fraccional es porque si la derivada es de orden 1, el chirp no tiene ninguna influencia en la forma de la intensidad del pulso derivado. Además, el signo del chirp es irrelevante a la hora de observar estas variaciones en intensidad si se hace con un derivador fraccional, tal y como se ha verificado en simulaciones numéricas [11].

Vale la pena destacar que la variación de la forma de la intensidad en función del chirp es una cualidad exclusiva de los operadores fraccionales, y que mediante un derivador o un integrador fraccional es posible estimar cuánto chirp posee un pulso (en magnitud), y realizar las acciones correctivas, ya que éste es usualmente un efecto indeseable [12].

2.4 Redes de Difracción en Fibra Óptica

2.4.1 Descripción Cualitativa de las Redes de Difracción

De forma previa a la descripción del funcionamiento de las redes de difracción, es necesario hacer un breve comentario acerca de los modos que pueden existir en una fibra óptica.

Como sabemos, el guiado de la luz en una fibra se debe a que el índice de refracción del núcleo n_1 es mayor al de la cubierta n_2 para las longitudes de onda usadas. Además, si el diámetro del núcleo es lo suficientemente pequeño en comparación a las longitudes de onda, la luz termina siendo confinada dentro del núcleo y guiada mediante un único modo, llamado modo fundamental, como se ilustra en la Figura 2.4.1.

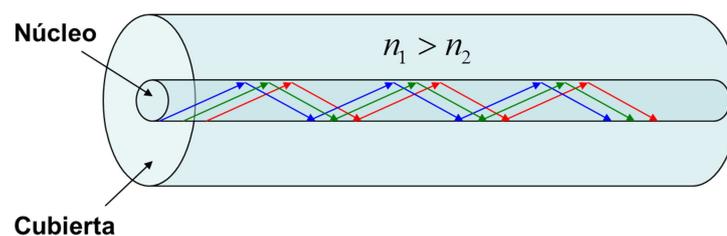


Figura 2.4.1 Luz siendo guiada por el modo fundamental de la fibra.

Sin embargo, cuando la fibra es desprovista de su polímero plástico (que no se muestra en la figura anterior), y asumiendo que la fibra esté rodeada de aire o de un medio de índice menor que n_2 , la cubierta puede funcionar también como una guía de ondas.

Debido a que el diámetro de la cubierta es mucho mayor que el del núcleo, las mismas longitudes de onda que antes eran guiadas por un único modo en el núcleo, ahora

pueden ser guiadas a través de todo el diámetro de la cubierta mediante múltiples modos, llamados modos de la cubierta. De esta forma, una fibra óptica desprovista de su polímero protector puede funcionar como una guía multimodo si estos nuevos modos son excitados de forma adecuada, como se muestra en la Figura 2.4.2.

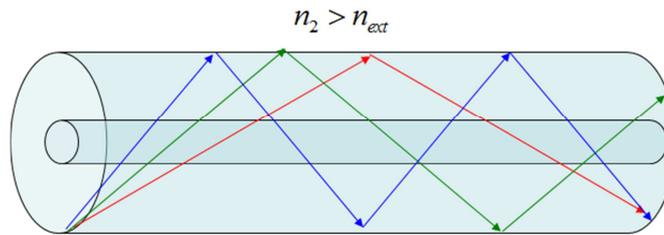


Figura 2.4.2 Luz guiada por los múltiples modos de la cubierta.

Teniendo en mente la distinción entre el único modo del núcleo, y los numerosos modos de la cubierta, se procede a describir las propiedades ópticas de las redes de difracción, como dispositivo que puede generar el acoplo entre estos modos.

Las redes de difracción en fibra óptica consisten en un cambio periódico del índice de refracción de su núcleo. Denotaremos su longitud total como L y su periodicidad como Λ_g :

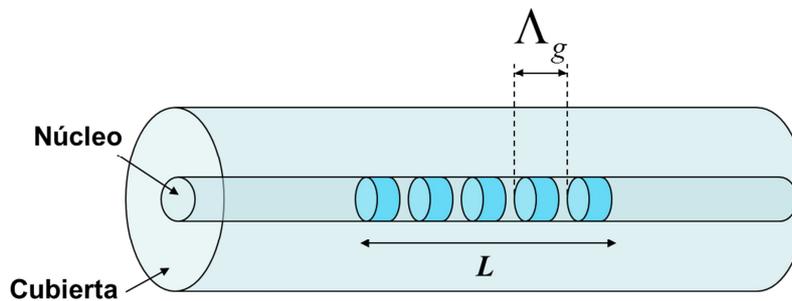


Figura 2.4.3 Red de difracción uniforme en fibra óptica.

Debido a que estas redes son básicamente una perturbación controlada de la permitividad dieléctrica, permiten el trasvase de energía entre los distintos modos de la guía, tanto el del núcleo como los de la cubierta. Es precisamente esta propiedad la que hace que las redes de difracción sean un dispositivo fotónico de interés para una gran cantidad de aplicaciones.

Las redes se pueden clasificar en dos grupos: las redes de período corto o redes de Bragg (Fiber Bragg Gratings o FBGs), y las de período largo (Long Period Gratings o LPGs). Para operación en longitudes de onda del infrarrojo cercano, las redes de período corto suelen tener su periodicidad en el orden de los 500 nm (del mismo orden de magnitud

que la longitud de onda), mientras que para las de Período Largo su periodicidad suele ser cercana a las 500 μm .

2.4.2 Redes de Período Corto

Las redes de período corto se utilizan básicamente como espejos de banda estrecha; típicamente menor a 1 nm. La luz dentro de ésta banda se acopla al mismo modo fundamental de la fibra pero en dirección contrapropagante, como muestra el esquema de la Figura 2.4.4.

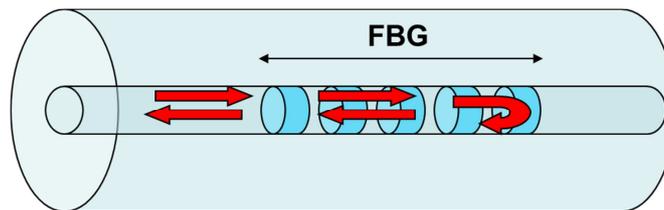


Figura 2.4.4 Acoplo en dirección contrapropagante del modo fundamental por una FBG.

En el espectro de transmisión de una FBG, se observa entonces una profunda atenuación de una banda específica de longitudes de onda, que son precisamente las que han sido reflejadas. A continuación se muestra un espectro de transmisión experimental de una red de período corto con longitud de onda de resonancia de 1061,6 nm, y con un ancho de banda a 3 dB de aproximadamente 250 pm:

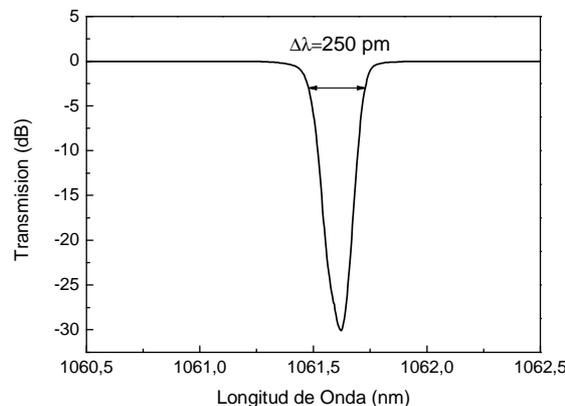


Figura 2.4.5 Espectro en transmisión de una red de período corto centrado en la longitud de onda de Bragg.

Es muy importante mencionar que además del acoplo que se da en el modo fundamental, a longitudes de onda más cortas la red de Bragg acoplará luz también a cada uno de los modos de la cubierta, también de forma contrapropagante [13]. Esto se muestra en la Figura 2.4.6.

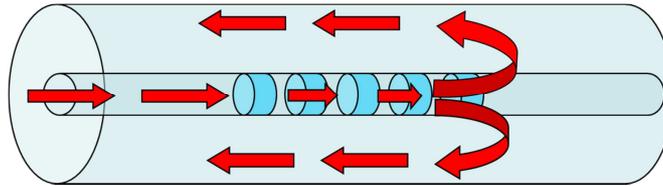


Figura 2.4.6 Acoplamiento contrapropagante a los modos de la cubierta por una FBG.

En el espectro de transmisión, esto se observa como una serie de bandas estrechas de atenuación a longitudes de onda más cortas que la del modo fundamental del núcleo. Los modos de la cubierta de orden mayor presentan sus resonancias a longitudes más cortas.

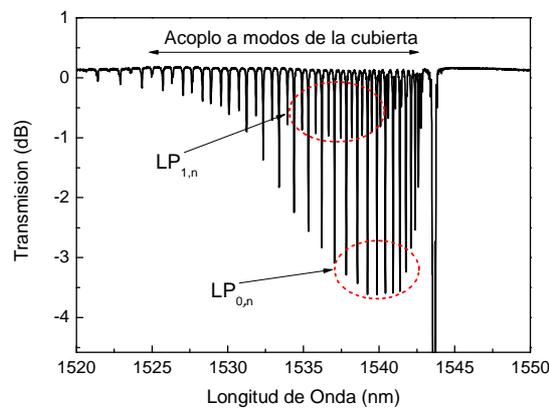


Figura 2.4.7 Acoplamiento a modos de la cubierta por una FBG en su espectro de transmisión.

En la Figura 2.4.7. se distinguen dos familias distintas de modos de la cubierta. Las de un acoplamiento más intenso pertenecen a modos del tipo $LP_{0,n}$ contrapropagantes, que poseen la misma simetría azimutal que el modo fundamental del núcleo (el $LP_{0,1}$). Sin embargo, también se distinguen (con menos intensidad) una familia de modos $LP_{1,n}$ que se ven excitados debido a que la fibra no es perfectamente simétrica en su sección transversal, y permite entonces el acoplamiento de energía a este tipo de modos azimutalmente asimétricos.

El conocer la longitud de onda exacta en donde ocurren estos acoplos a los modos de la cubierta será primordial para el diseño de las redes de período largo, como se explicará más adelante.

2.4.3 Redes de Período Largo

Por otro lado, las redes de período largo o LPGs tienen como función principal acoplar luz que viaja en el núcleo directamente a los modos de la cubierta, sólo que en dirección copropagante, como se muestra en la Figura 2.4.8:

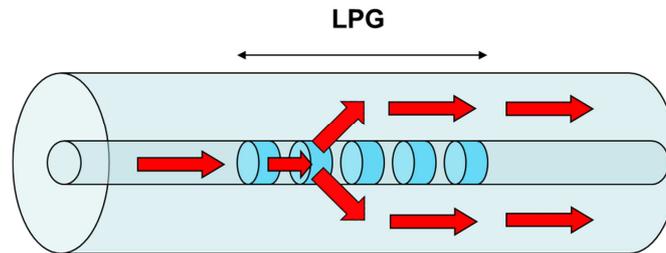


Figura 2.4.8 Acoplo copropagante a los modos de la cubierta mediante una LPG.

El espectro de transmisión de una LPG presenta entonces una multitud de resonancias, que corresponden a la luz que se ha acoplado a los distintos modos de la cubierta y que se muestran en la Figura 2.4.9. Los modos de la cubierta de orden más bajo presentarán sus resonancias a longitudes de onda más cortas, al contrario que en el acoplo contrapropagante.

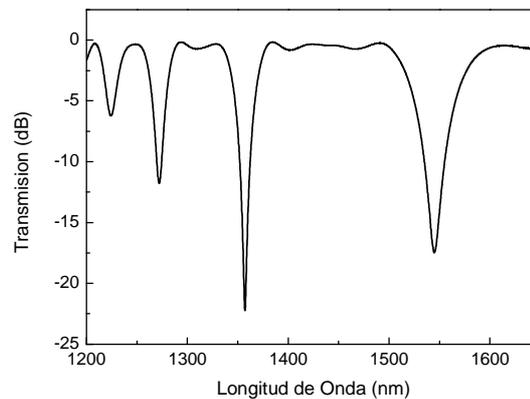


Figura 2.4.9 Acoplo a modos copropagantes de la cubierta por una red de período largo.

Normalmente, la luz que se ha acoplado a la cubierta se propaga por éste y nunca más regresa al núcleo de la fibra, ya que eventualmente la fibra tendrá su polímero protector en alguna zona cercana a donde se ha grabado la red, y la condición de confinamiento en la guía se pierde. Es importante destacar que la dependencia de los modos de la cubierta respecto al índice n_{ext} permite una miríada de aplicaciones en sensores de variables físicas que se encuentren en el entorno de la fibra, como lo son temperatura, tensión mecánica, índice de refracción, etc. [14]. Incluso, han sido utilizadas como detectores de cadenas de ADN con una previa funcionalización de la superficie de la fibra para atrapar estos compuestos [15].

2.4.4 Ecuaciones de Modos Acoplados Copropagantes para una Red de Período Largo (LPG) en Fibra Óptica

En este apartado desarrollaremos las ecuaciones necesarias para deducir matemáticamente el comportamiento de las redes de difracción antes descritas. Se hará el estudio de dos modos copropagantes en una red, donde el primero de ellos será el modo fundamental del núcleo y el segundo uno de los modos de la cubierta. Este desarrollo describe entonces la interacción de los modos en una red de período largo o LPG.

El campo eléctrico en una fibra óptica para una excitación oscilante a frecuencia ω puede escribirse en la forma:

$$\vec{E}^c = \vec{e}^c(x, y)e^{j(\omega t - \beta_c z)} \quad (2.4.1)$$

Donde $\vec{e}^c(x, y)$ contiene la dependencia transversal del campo a la dirección de propagación z y β_c es el factor de propagación. Las tres componentes del campo son soluciones de la ecuación de Helmholtz a la frecuencia ω . En una fibra monomodo el índice c hace referencia al modo fundamental del núcleo o *core* $HE_{1,1}$ que en aproximación LP corresponde al modo $LP_{0,1}$.

Tomaremos en cuenta ahora un solo modo de la cubierta con su constante de propagación. Debido a que estamos estudiando únicamente perturbaciones que tienen simetría de rotación alrededor de z , los modos de la cubierta con los que podrá interactuar el modo fundamental serán también de la forma $LP_{0,n}$ [16]. Así, podemos escribir el campo eléctrico del modo de la cubierta de forma similar a la del modo fundamental:

$$\vec{E}^l = \vec{e}^l(x, y)e^{j(\omega t - \beta_l z)} \quad (2.4.2)$$

donde el índice l hace referencia al modo de la cubierta. Las constantes de propagación tanto del núcleo como de la cubierta se suelen escribir también en términos de un índice efectivo por cada modo:

$$\beta_c = n_{eff,c} \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4.3)$$

$$\beta_l = n_{eff,l} \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4.4)$$

donde para una longitud de onda dada, el índice efectivo del núcleo es siempre mayor al índice efectivo de cualquier modo de la cubierta.

De esta manera, ya una vez definidos los campos para ambos modos, el campo eléctrico total en cualquier punto de la fibra será simplemente la suma de ambos campos con coeficientes de peso ρ y σ :

$$\vec{E} = \rho \vec{E}^c + \sigma \vec{E}^l \quad (2.4.5)$$

Además, este campo total deberá cumplir con la ecuación de ondas, dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.4.6)$$

En nuestro caso, debido a la simetría traslacional, el operador Laplaciano conviene ser escrito como:

$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial}{\partial z^2}, \quad \nabla_T^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad (2.4.7)$$

Ahora, si introducimos en el núcleo de la guía una red de difracción uniforme con período Λ_g , el perfil de índice de refracción a lo largo de su longitud L se verá como en la Figura 2.4.10 (se representa un perfil cuadrado de forma ilustrativa).

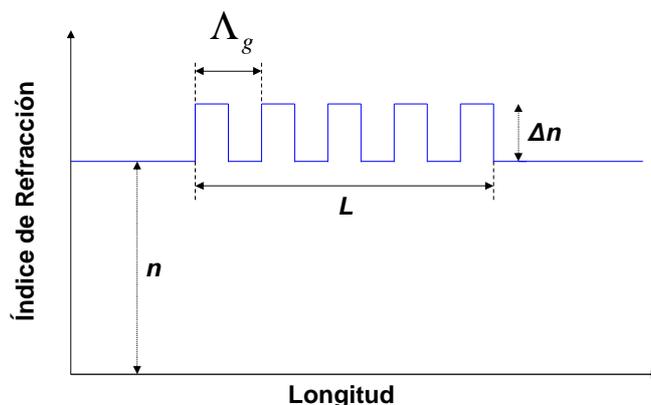


Figura 2.4.10 Cambio de índice del núcleo a lo largo de una red de difracción.

Gracias a esta perturbación del índice, tanto el campo eléctrico del modo del núcleo como del modo de la cubierta variarán en amplitud y fase al pasar a través de la red de difracción. Si la variación de índice es pequeña se puede asumir que los modos no varían su estructura, y el efecto de cambio de índice se modela añadiendo a los modos funciones de peso $E^c(z)$ y $E^l(z)$ que varían a lo largo de la dirección de propagación. Adaptando entonces las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2):

$$\vec{E}^c = E^c(z) \vec{e}^c(x, y) e^{j(\omega t - \beta_c z)} \quad (2.4.8)$$

$$\vec{E}^l = E^l(z) \vec{e}^l(x, y) e^{j(\omega t - \beta_l z)} \quad (2.4.9)$$

El campo eléctrico total viene a ser entonces la suma de ambas contribuciones:

$$\vec{E} = E^c(z)\vec{e}^c(x, y)e^{j(\omega t - \beta_c z)} + E^l(z)\vec{e}^l(x, y)e^{j(\omega t - \beta_l z)} \quad (2.4.10)$$

El campo total debe satisfacer la ecuación de ondas, que debe ser modificada también para tener en cuenta este cambio de índice de refracción. La modificación de índice se traduce como la introducción de una perturbación de la permitividad $\Delta\epsilon$ a lo largo de z :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 [\epsilon + \Delta\epsilon(z)] \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.4.11)$$

La relación entre el cambio de índice $\Delta n(z)$ y el cambio de permitividad $\Delta\epsilon(z)$ es:

$$\Delta\epsilon(z) = 2\epsilon_0 n \Delta n(z) \quad (2.4.12)$$

Así, al desarrollar la ecuación de ondas con las modificaciones antes descritas en las ecuaciones (2.4.10) y (2.4.11), para los componentes transversales del campo \vec{e}_T^c y \vec{e}_T^l se obtiene:

$$\begin{aligned} & \vec{e}_T^c(x, y) \frac{d^2 E^c(z)}{dz^2} e^{-j\beta_c z} + \vec{e}_T^l(x, y) \frac{d^2 E^l(z)}{dz^2} e^{-j\beta_l z} + \\ & -2j\beta_c \vec{e}_T^c(x, y) \frac{dE^c(z)}{dz} e^{-j\beta_c z} - 2j\beta_l \vec{e}_T^l(x, y) \frac{dE^l(z)}{dz} e^{-j\beta_l z} \quad (2.4.13) \\ & = -\omega^2 \mu_0 \Delta\epsilon(z) \vec{e}_T^c(x, y) E^c(z) e^{-j\beta_c z} - \omega^2 \mu_0 \Delta\epsilon(z) \vec{e}_T^l(x, y) E^l(z) e^{-j\beta_l z} \end{aligned}$$

Podemos eliminar las derivadas de segundo orden en la ecuación anterior y así simplificarla, gracias a que la perturbación del índice de refracción es pequeña. Como consecuencia, el módulo del campo eléctrico variará muy poco al propagarse una longitud de onda:

$$\left| \frac{d^2 E^c(z)}{dz^2} \right| \ll \left| 2\beta_c \frac{dE^c(z)}{dz} \right| \quad (2.4.14)$$

$$\left| \frac{d^2 E^l(z)}{dz^2} \right| \ll \left| 2\beta_l \frac{dE^l(z)}{dz} \right| \quad (2.4.15)$$

Ahora, para poder implementar la perturbación periódica $\Delta\epsilon(z)$ en la ecuación de ondas ya desarrollada, lo más conveniente es expresarla como serie de Fourier:

$$\Delta\epsilon(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j \frac{2\pi m}{\Lambda_s} z} \quad (2.4.16)$$

Reescribiendo la ecuación (2.4.13) con el cambio de permitividad descrito como serie, y habiendo eliminado las derivadas de segundo orden, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -2j\beta_c \bar{e}_T^c(x, y) \frac{dE^c(z)}{dz} e^{-j\beta_c z} - 2j\beta_l \bar{e}_T^l(x, y) \frac{dE^l(z)}{dz} e^{-j\beta_l z} \\
 & = -\omega^2 \mu_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda_g} z} \bar{e}_T^c(x, y) E^c(z) e^{-j\beta_c z} + \\
 & \quad -\omega^2 \mu_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda_g} z} \bar{e}_T^l(x, y) E^l(z) e^{-j\beta_l z}
 \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Partiendo de la ecuación anterior, el siguiente paso es encontrar en cuáles de los términos la fase del campo eléctrico varía de forma suave. Para eso, se multiplica por el factor $\exp[+j\beta_c z]$, y nos queda:

$$\begin{aligned}
 & -2j\beta_c \bar{e}_T^c(x, y) \frac{dE^c(z)}{dz} - 2j\beta_l \bar{e}_T^l(x, y) \frac{dE^l(z)}{dz} e^{j(\beta_c - \beta_l)z} \\
 & = -\omega^2 \mu_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda_g} z} \bar{e}_T^c(x, y) E^c(z) + \\
 & \quad -\omega^2 \mu_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\left(\frac{2\pi m}{\Lambda_g} + \beta_c - \beta_l\right)z} \bar{e}_T^l(x, y) E^l(z)
 \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

De todos los anteriores términos, los únicos en los que el campo eléctrico varía su fase lentamente son:

- En el lado izquierdo de la ecuación, el término que carece del factor de fase $\exp[j(\beta_c - \beta_l)z]$.
- En el primer sumatorio del lado derecho, el término con $m = 0$.
- En el segundo sumatorio del lado derecho, los cualesquiera m términos de la serie que cumplan que el factor de fase sea casi nulo. Ésta condición se denomina condición de acoplo:

$$\frac{2\pi m}{\Lambda_g} + \beta_c - \beta_l \approx 0 \tag{2.4.19}$$

Nótese que debido a que $\beta_c > \beta_l$, los m necesarios para cumplir esta condición son negativos. De esta manera, para cada uno de los m sumandos de la serie que cumplen (2.4.16), nos quedamos con (para $m < 0$):

$$\begin{aligned}
 -2j\beta_c \bar{e}_T^c(x, y) \frac{dE^c(z)}{dz} &= -\omega^2 \mu_0 a_0 \bar{e}_T^c(x, y) E^c(z) + \\
 -\omega^2 \mu_0 a_m e^{j\left(\frac{2\pi m}{\Lambda_g} + \beta_c - \beta_l\right)z} \bar{e}_T^l(x, y) E^l(z) &
 \end{aligned}
 \tag{2.4.20}$$

Ahora, si en la ecuación (2.4.17) se multiplica por $\exp[+j\beta_l z]$ en vez de por $\exp[+j\beta_c z]$, se puede llegar a una ecuación que complementa a la (2.4.20), y que permite obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Ésta nueva ecuación, realizando consideraciones similares a las que fueron tomadas antes es:

$$\begin{aligned}
 -2j\beta_l \bar{e}_T^l(x, y) \frac{dE^l(z)}{dz} &= -\omega^2 \mu_0 a_0 \bar{e}_T^l(x, y) E^l(z) + \\
 -\omega^2 \mu_0 a_m e^{j\left(\frac{2\pi m}{\Lambda_g} + \beta_l - \beta_c\right)z} \bar{e}_T^c(x, y) E^c(z) &
 \end{aligned}
 \tag{2.4.21}$$

En esta ocasión los m necesarios para obtener la condición de acoplo son la contraparte positiva de los que fueron necesarios en la ecuación (2.4.20). Se debe realizar una normalización del campo del modo del núcleo en la ecuación (2.4.20) y del modo de la cubierta en la ecuación (2.4.21). Esto se logra multiplicando ambos lados de las ecuaciones por los conjugados de los campos respectivos, y definiendo que la integral de estos campos en todo el plano xy es 1. Esto nos permite despejar las derivadas de $E^c(z)$ y $E^l(z)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE^c(z)}{dz} &= \kappa_{cc} E^c(z) + \kappa_{cl} E^l(z) e^{j\Delta\beta z} \\
 \frac{dE^l(z)}{dz} &= \kappa_{ll} E^l(z) + \kappa_{lc} E^c(z) e^{-j\Delta\beta z}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.22}$$

donde $\Delta\beta$ se denomina factor de desintonía, y se define como:

$$\Delta\beta = \beta_c - \beta_l - \frac{2m\pi}{\Lambda_g} \quad m = 1, 2, 3, \dots
 \tag{2.4.23}$$

Las constantes κ_{cc} y κ_{ll} son llamadas constantes de autoacoplo (núcleo-núcleo y cubierta-cubierta, respectivamente) y se representan como:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{cc} &= -\frac{j\omega^2 \mu_0 a_0}{2\beta_c} \iint |\bar{e}_T^c|^2 dx dy \\
 \kappa_{ll} &= -\frac{j\omega^2 \mu_0 a_0}{2\beta_l} \iint |\bar{e}_T^l|^2 dx dy
 \end{aligned}
 \tag{2.4.24}$$

Por otra parte, las otras dos constantes de acoplo se denominan constantes de acoplo mutuo (núcleo-cubierta y cubierta-núcleo), dadas por:

$$\begin{aligned}\kappa_{cl} &= -\frac{j\omega^2 \mu_0 a_m^*}{2\beta_c} \iint \vec{e}_T^l (\vec{e}_T^c)^* dx dy \\ \kappa_{lc} &= -\frac{j\omega^2 \mu_0 a_m}{2\beta_l} \iint \vec{e}_T^c (\vec{e}_T^l)^* dx dy\end{aligned}\quad (2.4.25)$$

El área de integración de las integrales en (2.4.24) y (2.4.25) quedará limitada exclusivamente al núcleo de la fibra, ya que los a_m que las acompañan son solamente distintos de cero en la zona donde se ha producido el cambio de índice. Finalmente, reescribiendo la ecuación (2.4.19) en términos de longitudes de onda e índices efectivos, la condición de acoplo se da cuando:

$$m\lambda \approx (n_{\text{eff},c} - n_{\text{eff},l})\Lambda_g \quad m = 1, 2, 3\dots \quad (2.4.26)$$

La longitud de onda de resonancia de la red se da cuando el factor de desintonía $\Delta\beta$ se anula, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia de caminos ópticos entre los modos es exactamente cero:

$$\lambda_{LPG} = (n_{\text{eff},c} - n_{\text{eff},l}) \frac{\Lambda_g}{m} \quad m = 1, 2, 3\dots \quad (2.4.27)$$

La solución general del sistema de ecuaciones (2.4.22) permite conocer las variaciones de amplitud y fase $E^l(z)$ y $E^c(z)$ del campo original:

$$\begin{aligned}E^l(z) &= e^{-jAz} (C e^{-jBz} + D e^{jBz}) \\ E^c(z) &= \frac{1}{\kappa_{lc}} e^{j(\Delta\beta - A)z} \left[-(jA + \kappa_{ll})(C e^{-jBz} + D e^{jBz}) + jB(-C e^{-jBz} + D e^{jBz}) \right]\end{aligned}\quad (2.4.28)$$

donde las constantes A y B dependen de las constantes de acoplo y el factor de desintonía, y C y D de las condiciones de contorno. Definiendo primero:

$$\kappa'_{cc} = \frac{\kappa_{cc}}{-j}, \quad \kappa'_{ll} = \frac{\kappa_{ll}}{-j}, \quad |\kappa|^2 = -\kappa_{cl} \kappa_{lc} \quad (2.4.29)$$

las constantes A y B se obtienen de las ecuaciones (2.4.28) y (2.4.22):

$$\begin{aligned}A &= \frac{\kappa'_{ll} + \kappa'_{cc} + \Delta\beta}{2} \\ B &= \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{\Delta\beta} (\kappa'_{cc} - \kappa'_{ll}) \right] + |\kappa|^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa'_{cc} - \kappa'_{ll}}{2|\kappa|}\right)^2 \right]}\end{aligned}\quad (2.4.30)$$

Finalmente, las constantes C y D dependerán de las condiciones iniciales que se le dan al sistema de ecuaciones. En general, se asumirán las siguientes condiciones iniciales de los campos del núcleo y de la cubierta en $z = 0$, que es donde se inyecta la luz a la red:

$$E^c(z=0) = E_0^c, \quad E^l(z=0) = 0 \quad (2.4.31)$$

Haciendo esto, las ecuaciones (2.4.28) resultan:

$$E^c(z) = E_0^c e^{j(\Delta\beta - A)z} \left[\cos(Bz) - j(A - \kappa_{ll}') \frac{\sin(Bz)}{B} \right] \quad (2.4.32)$$

$$E^l(z) = E_0^c \kappa_{lc} e^{-jAz} \frac{\sin(Bz)}{B}$$

Al investigar cómo se comporta la energía transportada por cada uno de los modos, se observa un trasvase periódico de la energía conforme ambos modos se propagan a lo largo de la red de difracción:

$$|E^c(z)|^2 = |E_0^c|^2 \left[1 - |\kappa|^2 \frac{\sin^2(Bz)}{B^2} \right] \quad (2.4.33)$$

$$|E^l(z)|^2 = |E_0^c|^2 |\kappa_{lc}|^2 \frac{\sin^2(Bz)}{B^2}$$

Una simplificación importante de las ecuaciones de acoplo se puede hacer si el desarrollo en series de Fourier del cambio de índice $\Delta n(z)$ se hace de forma que su valor medio a_0 sea nulo. Esto es, centrando el desarrollo de la serie justo en el valor medio del índice, como se muestra en la Figura 2.4.11.

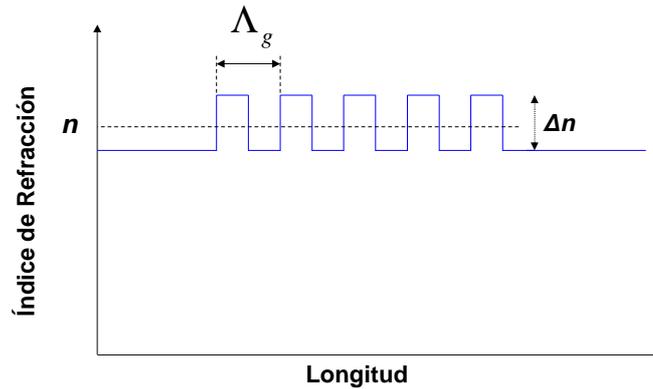


Figura 2.4.11 Consideración para desarrollar la perturbación $\Delta n(z)$ con valor medio nulo

Si el desarrollo se hace de la forma descrita, ambas constantes de autoacoplo desaparecen y las ecuaciones se simplifican considerablemente, especialmente en la forma de los parámetros A y B . Al eliminar las constantes de autoacoplo, la B se reduce a la siguiente expresión, que denotaremos con la letra γ :

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 + |\kappa|^2} \quad (2.4.34)$$

De esta forma, las ecuaciones (2.4.30) simplificadas, y que serán usadas para las simulaciones son:

$$\begin{aligned} E^c(z) &= E_0^c e^{j\frac{\Delta\beta}{2}z} \left[\cos(\gamma z) - j \frac{\Delta\beta}{2} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \right] \\ E^l(z) &= E_0^c \kappa_{lc} e^{-j\frac{\Delta\beta}{2}z} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Al hacer esta simplificación, es fácil determinar a partir de la ecuación (2.4.33) cuál es la longitud L_{\max} que tiene que tener la red de difracción para un acoplo del 100% de la energía al modo de la cubierta a la longitud de onda de la resonancia:

$$L_{\max} = \frac{\pi}{2|\kappa|} \quad (2.4.36)$$

Otro parámetro importante que se puede deducir a partir de la ecuación (2.4.33) es el ancho de banda a mitad de altura (3 dB) de la respuesta en intensidad. Recordando la definición de la longitud de onda de resonancia (2.4.27), el ancho de banda a 3 dB de una red de longitud L con un acoplo máximo cercano al 100% es aproximadamente:

$$\Delta\lambda \approx \frac{0,8\lambda_{LPG}^2}{L\Delta n_g} \quad (2.4.37)$$

Donde Δn_g es la diferencia de índices de grupo del modo del núcleo respecto al modo de la cubierta, la cual está dada por la ecuación (2.4.38):

$$\Delta n_g = n_{eff,c} - n_{eff,l} + \lambda \left(\frac{\partial n_{eff,c}}{\partial \lambda} - \frac{\partial n_{eff,l}}{\partial \lambda} \right) \quad (2.4.38)$$

Esta consideración debe hacerse ya que para encontrar el ancho de banda, se deben utilizar dos longitudes de onda distintas, una a cada lado de la resonancia. El valor de Δn_g en (2.4.38) debe evaluarse a λ_{LPG} al sustituirlo en (2.4.37).

La ecuación (2.4.36) será de especial importancia, ya que el orden de derivación fraccional de una red de período largo dependerá del cociente de su longitud total L y la longitud de acoplo óptimo L_{\max} [17]. En las Figuras 2.4.12 y 2.4.13 se muestran las respuestas simuladas en amplitud y en fase de una red de período largo centrada a 1550 nm

(193,54 THz), tal que sus constantes de acoplo y su longitud cumplan la condición de acoplo máximo de la ecuación (2.4.36).

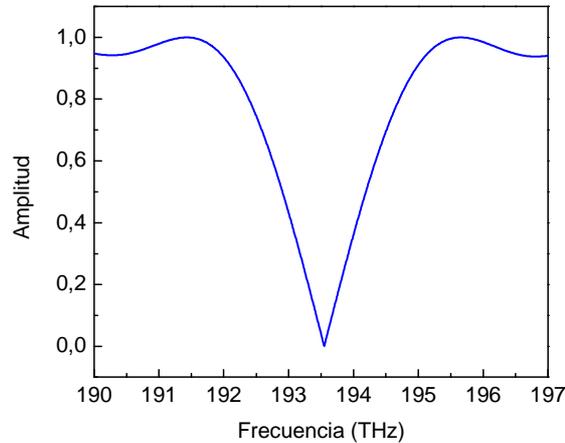


Figura 2.4.12 Espectro de transmisión de una LPG con acoplo de 100% a 1550 nm (193,5 THz).

Nótese la similitud que existe con la forma de “V” del módulo de la función de transferencia de un derivador ideal de orden 1 (Fig. 2.3.1) para un cierto ancho de banda alrededor de la resonancia. Al igual que un derivador ideal, la LPG elimina la frecuencia de resonancia a la cual está centrada, y le da un peso creciente a componentes frecuenciales que se encuentren a su alrededor.

Estudiando ahora la forma de la fase introducida por esta misma LPG simulada, se obtiene lo siguiente:

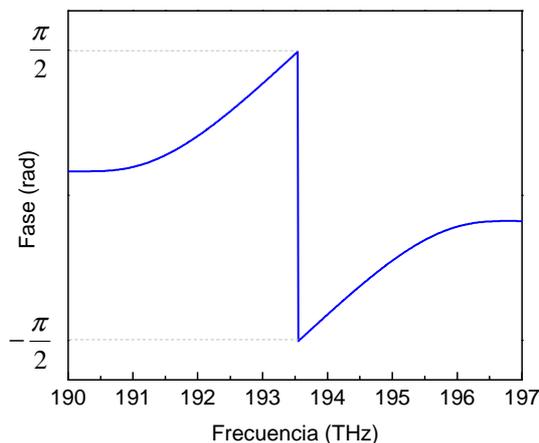


Figura 2.4.13 Fase introducida por una LPG con acoplo de 100% a 1550 nm (193,5 THz)

Observamos entonces el inherente salto de fase de cualquier dispositivo que funcione como derivador; en nuestro caso centrado en la frecuencia de resonancia de la LPG. Como se observa en la figura, hay una transición brusca de fase de π radianes, aunque

en dirección contraria al salto de fase de un derivador de orden 1, por lo que la LPG se comporta como una función de transferencia $H(\omega) = -j\omega$ cerca de la resonancia.

Este hecho se puede corroborar comparando el desarrollo en serie de la función de transferencia de la LPG en torno a la frecuencia de resonancia. Partimos entonces de la ecuación simplificada de una LPG cercana a su acoplo máximo. Esto es, cuando su longitud total L cumple que $\gamma L \approx \pi/2$.

Para frecuencias cercanas a la resonancia, el valor del parámetro γ es de aproximadamente $|\kappa|$, ya que el factor de desintonía $\Delta\beta$ se vuelve casi cero. Por lo tanto, el argumento de las funciones seno y coseno en las ecuaciones de (2.4.35) será cercano a $\pi/2$, que es el valor alrededor del cual centraremos el desarrollo en serie.

Como $\gamma L \approx \pi/2$ y $\gamma \approx |\kappa|$ por las razones ya expuestas, podemos realizar una aproximación de la función de transferencia de una LPG con un acoplo cercano al 100% para las frecuencias adyacentes a la resonancia ω_{LPG} :

$$\begin{aligned} E^c(L)\big|_{\omega=\omega_{LPG}} &= E_0^c e^{j\frac{\Delta\beta}{2}L} \left[\cos(\gamma L) - j\frac{\Delta\beta}{2} \frac{\sin(\gamma L)}{\gamma} \right] \\ &\approx E_0^c \left[\left(\frac{\pi}{2} - \gamma L \right) - j\frac{\Delta\beta}{2} \frac{2L}{\pi} \right] \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

En amplitud, la ecuación (2.4.39) tiende a cero, como esperamos. Sin embargo, es su comportamiento en fase lo que resulta verdaderamente interesante. Si realizamos algunas manipulaciones algebraicas, podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E^c(L)\big|_{\omega=\omega_{LPG}} &\approx \\ \approx E_0^c \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - L \frac{n\Delta n}{2\pi c \sqrt{n_{eff,c} n_{eff,l}}} \omega \right) - j2L \frac{n_{eff,c} - n_{eff,l}}{2\pi c} \text{Sgn}(\omega - \omega_{LPG}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Ahora, escribiremos el desarrollo en serie de la siguiente función de transferencia, y lo compararemos con el de la LPG:

$$H(\omega) = [-j(\omega - \omega_{LPG})]^q \quad (2.4.41)$$

Para valores de q cercanos a 1. Ésta función de transferencia corresponde a un derivador fraccional ideal. Su desarrollo es:

$$H(\omega) = [-j(\omega - \omega_{LPG})]^q \approx |\omega - \omega_{LPG}|^q \left(\frac{\pi}{2}(1-q) - j\text{Sgn}(\omega - \omega_{LPG}) \right) \quad (2.4.42)$$

De esta forma, al comparar las ecuaciones (2.4.40) y (2.4.42) podemos concluir que ambas tienen básicamente la misma forma en cuanto a lo que se refiere a su fase. La parte imaginaria de ambas ecuaciones cambia de signo en torno a $\omega = \omega_{LPG}$, y los parámetros constructivos de la LPG son los que determinan el orden de derivación fraccional q . Para el caso particular de $q = 1$, en donde $L = L_{max}$, se obtiene un derivador de orden entero 1. Para otros valores de L , la LPG es un derivador fraccional. Finalmente, obsérvese que si L es elige suficientemente larga (sobrecoplada), se obtienen órdenes de derivación q mayores a 1.

Es oportuno recalcar que en una LPG el salto de fase es sólo apreciable para un estrecho ancho de banda alrededor de la resonancia, a diferencia de un derivador ideal que introduce este salto entre cualquier frecuencia menor y mayor a la central. El hecho de tener en cuenta la limitación de ancho de banda de la red de difracción será muy importante a la hora de desarrollar los experimentos en este trabajo.

Hay que observar que la respuesta de una LPG (2.4.40) es la conjugada del derivador ideal (ecuación 2.3.1). Esto implica que en la actuación sobre un pulso (la LPG y el derivador ideal) actuarán de manera especular sobre el perfil temporal del pulso, como se verá en la sección 2.5.

2.4.5 Ecuaciones de Modos Acoplados Contrapropagantes para una Red de Período Corto (FBG) en Fibra Óptica

El estudio de la interacción entre la onda propagante del núcleo y una contrapropagante de la cubierta (como se muestra en la Figura 2.4.6) se efectúa de forma muy similar al caso de las redes de período largo descrito en el apartado anterior. La diferencia fundamental será que se cambiará la dirección de propagación del modo de la cubierta utilizando en su término de fase el factor $\exp[+j\beta_c z]$ en vez de $\exp[-j\beta_c z]$ para indicar una propagación en dirección $-z$.

Denotaremos como antes a la onda que se propaga en dirección $+z$ del modo fundamental como:

$$\vec{E}^c = E^c(z)\vec{e}^c(x, y)e^{j(\omega t - \beta_c z)} \quad (2.4.43)$$

donde de nuevo β_c es la constante de propagación del modo fundamental, y $E^c(z)$ es la variación de la amplitud y fase del campo eléctrico producida por la modulación del índice a lo largo de la red de período corto.

La onda contrapropagante guiada por el modo de la cubierta, tendrá ahora la siguiente forma:

$$\vec{E}^l = E^l(z)\vec{e}^l(x, y)e^{j(\omega t + \beta_l z)} \quad (2.4.44)$$

El campo eléctrico en cualquier punto del interior de la fibra será entonces la suma de ambos campos.

$$\vec{E} = E^c(z)\vec{e}^c(x, y)e^{j(\omega t - \beta_c z)} + E^l(z)\vec{e}^l(x, y)e^{j(\omega t + \beta_l z)} \quad (2.4.45)$$

Los campos deberán cumplir la ecuación de ondas perturbada (2.4.11), que al ser desarrollada de una forma similar a como se hizo en el apartado anterior, se llega a una ecuación diferencial de la misma forma que (2.4.22), sin más que sustituir $-j\beta_l$ por $+j\beta_l$ en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dE^c(z)}{dz} &= \kappa_{cc} E^c(z) + \kappa_{cl} E^l(z) e^{+j2\Delta\beta'z} \\ \frac{dE^l(z)}{dz} &= \kappa_{ll} E^l(z) + \kappa_{lc} E^c(z) e^{-j2\Delta\beta'z} \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

En la ecuación (2.4.47) el factor de desintonía $\Delta\beta'$ es definido de forma distinta que en el caso copropagante para facilitar la escritura de la solución de esta nueva ecuación diferencial. Se hace de la siguiente manera:

$$\Delta\beta' = \beta_c + \beta_l - \frac{m\pi}{\Lambda_g} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.47)$$

Las dos constantes de acoplo κ_{cc} y κ_{cl} son idénticas que las del caso copropagante, definidas ya en el apartado anterior. Sin embargo, debido a que las constantes de acoplo κ_{ll} y κ_{lc} dependen del factor de propagación del modo de la cubierta, éstas son de signo opuesto a sus análogas del caso copropagante:

$$\begin{aligned} \kappa_{ll} &= -\kappa_{ll} \\ \kappa_{lc} &= -\kappa_{lc} \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

A partir de la ecuación (2.4.47), la condición de acoplo en el caso contrapropagante, en términos de longitud de onda es:

$$\lambda \approx (n_{eff,c} + n_{eff,l}) \frac{\Lambda_g}{m} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.49)$$

Realizando las mismas consideraciones respecto al valor promedio del cambio de índice $\Delta n(z)$ que se hizo anteriormente para eliminar las constantes de autoacoplo, nos quedamos con el siguiente sistema de ecuaciones simplificado:

$$\begin{aligned}\frac{dE^c(z)}{dz} &= \kappa_{cl} E^l(z) e^{+j2\Delta\beta'z} \\ \frac{dE^l(z)}{dz} &= \kappa_{lc}'' E^c(z) e^{-j2\Delta\beta'z}\end{aligned}\quad (2.4.50)$$

La solución general del sistema de ecuaciones anterior resulta en:

$$\begin{aligned}E^c(z) &= e^{j\Delta\beta'z} (Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}) \\ E^l(z) &= \frac{1}{\kappa_{cl}} e^{-j2\Delta\beta'z} \left[j\Delta\beta' (Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}) + \mu e^{j\Delta\beta'z} (Ae^{\mu z} - Be^{-\mu z}) \right] \\ \text{con } \mu^2 &= |\kappa|^2 - \Delta\beta'^2\end{aligned}\quad (2.4.51)$$

donde las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales. En nuestro caso, estas condiciones serán dadas para las posiciones $z = 0$ y $z = L$ de la red de difracción

$$\begin{aligned}E^c(0) &= E_0 \\ E^l(L) &= 0\end{aligned}\quad (2.4.52)$$

De esta manera, a una longitud z dentro de la red, los campos tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}E^c(z) &= E_0 e^{j\Delta\beta'z} \frac{\mu \cosh[\mu(z-L)] - j\Delta\beta' \sinh[\mu(z-L)]}{\mu \cosh[\mu L] + j\Delta\beta' \sinh[\mu L]} \\ E^l(z) &= E_0 \kappa_{lc}'' e^{-j\Delta\beta'z} \frac{\sinh[\mu(z-L)]}{\mu \cosh[\mu L] + j\Delta\beta' \sinh[\mu L]}\end{aligned}\quad (2.4.53)$$

Es imprescindible enfocar ahora nuestra atención al caso en el cual el modo contrapropagante sea el mismo modo del núcleo, y no un modo de la cubierta, como se ha venido tratando hasta el momento. De hecho, la enorme mayoría de las aplicaciones de las FBGs se basan en su función como reflectores del modo fundamental del núcleo, tal y como se ilustró esquemáticamente en la Figura 2.4.4.

Para ello, no hace falta más que sustituir la constante de propagación del modo de la cubierta β_1 por la constante de propagación β_c del modo del núcleo. Las ecuaciones en este apartado serán igual de válidas a la hora de considerar este caso especial, con la salvedad de que la condición de acoplo (2.4.47), al hacer $\beta_1 = \beta_c$ nos queda:

$$\lambda \approx 2n_{eff,c} \frac{\Lambda_g}{m} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.54)$$

Para la longitud de onda en que el factor de desintonía $\Delta\beta'$ se anula, la ecuación (2.4.47) se convierte en una igualdad, y se obtiene lo que llamamos la longitud de onda de Bragg de la red de período corto:

$$\lambda_{Bragg} = 2n_{eff,c} \frac{\Lambda_g}{m} \quad m = 1,2,3,\dots \quad (2.4.55)$$

Intuitivamente, la longitud de onda de Bragg es aquella en la cual el camino óptico que ve la onda en un trayecto de ida y vuelta a lo largo de un período de la red es exactamente un número entero de longitudes de onda. Las ecuaciones de las FBGs (2.4.49) y (2.4.55) serán fundamentales para diseñar y fabricar las redes de período largo o LPGs. Éste hecho se pondrá en evidencia posteriormente en esta tesis.

2.5 Redes de Período Largo como Derivadores Fraccionales

Como se mostró con anterioridad, el coeficiente de transmisión de una red de período largo en condición de acoplo óptimo se asemeja al comportamiento de un derivador ideal de orden 1, siempre y cuando se trabaje en un ancho de banda limitado alrededor de la frecuencia de resonancia [18,19]. Si se relaja la condición a simplemente cumplir $\gamma L \approx \pi/2$ la LPG también puede funcionar como un derivador fraccional de orden q .

Procederemos a simular la salida de una LPG ante un pulso Gaussiano sin chirp y trabajando en banda base. Utilizando una LPG óptimamente acoplada, y con el mismo ancho de banda (FWHM) que el pulso Gaussiano, los espectros de amplitud del pulso y de la LPG se muestran en las Figuras 2.5.1 y 2.5.2.

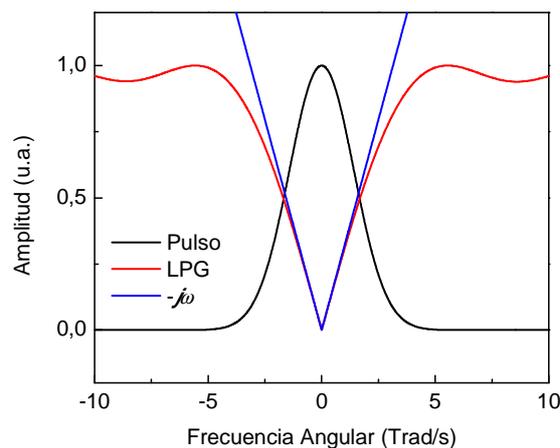


Figura 2.5.1 Espectro de amplitud de un pulso Gaussiano y una LPG funcionando como derivador de orden 1.

En la Figura 2.5.1 se ha añadido la respuesta de un derivador ideal de orden 1 a modo de comparación. Es importante mencionar que para realizarla, se debe agregar un factor de escala al derivador ideal, ya que su ámbito no se limita de 0 a 1, a diferencia de la LPG. Como se esperaba, tanto el derivador de orden 1 como la LPG presentan su forma característica de “V” centrada en la frecuencia de resonancia.

Al igualar la resonancia de la red de difracción con la frecuencia central (o portadora) del pulso, ésta última se ve suprimida, mientras que los componentes de más alta frecuencia tienen un mayor peso. En amplitud, éste es el comportamiento esperado de un derivador. Por otro lado, la respuesta en fase es la que se muestra en la Figura 2.5.2.

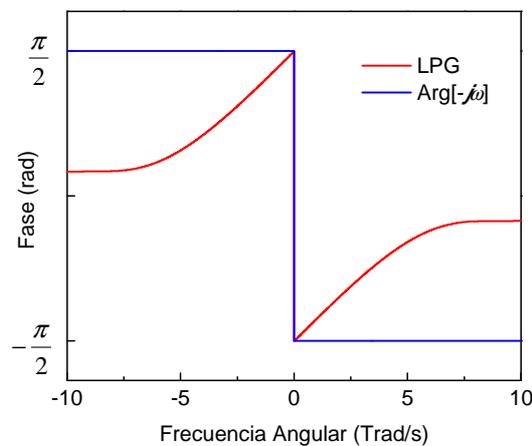


Figura 2.5.2 Salto de fase introducido por una LPG como derivador de orden 1 y de un menos derivador de orden 1 ideal.

Nótese que con respecto a un derivador ideal, la respuesta en fase de una LPG posee dos diferencias fundamentales: la primera es la dirección en que se da el salto de fase, ya que la gráfica muestra la fase de $-j\omega$, y la segunda, que el salto no se da en forma de un escalón brusco, sino que se encuentra en medio de una pendiente de fase. El hecho de introducir una pendiente en el factor de fase se ve traducido en el dominio del tiempo como un retardo, debido a la propiedad de traslación de la transformada de Fourier que establece que:

$$\mathfrak{F}\{f(t - \Delta\tau)\} = F(\omega)e^{j\Delta\tau\omega} \quad (2.5.1)$$

Este retardo se observa entonces en la forma del pulso una vez que ha sido procesada por la LPG. Si se corrige numéricamente este retardo, y se normaliza a 1, se obtienen las gráficas de la Figura 2.5.3, en donde se compara la salida de la LPG con la de un “menos” derivador ideal.

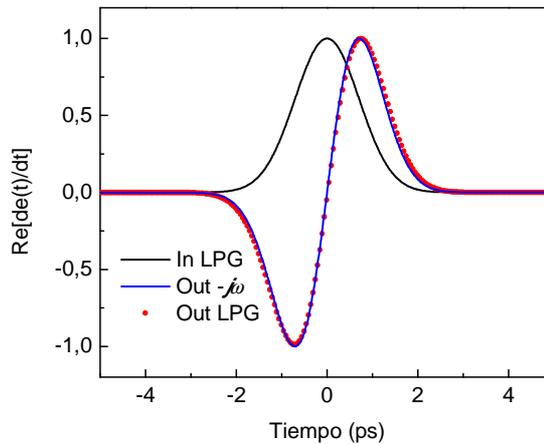


Figura 2.5.3 Parte real de la envolvente compleja de un pulso Gaussiano a la entrada (In) y a la salida (Out) de una LPG y de un menos derivador ideal $-j\omega$.

Como se observa, la forma de la salida es muy similar a la de la derivada de orden 1, aunque con un signo menos adicional. Por otro lado, en términos de intensidad, se obtiene lo siguiente:

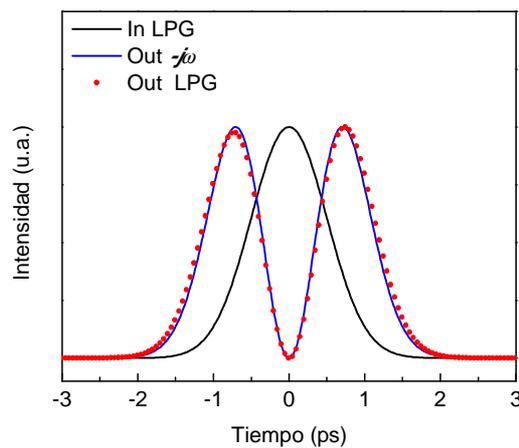


Figura 2.5.4 Intensidad de un pulso Gaussiano a la entrada (In) y salida (Out) de una LPG como derivador de orden 1, junto con la de un menos derivador ideal $-j\omega$.

De esta manera, y bajo las condiciones de ancho de banda antes mencionadas, podemos decir que una LPG en acoplo máximo es proporcional a un derivador de orden 1 de un pulso.

Ahora, según [17] una red de período largo también puede funcionar como un derivador de orden fraccional si se ajusta la longitud de la red tal que ésta sea una fracción de la longitud de acoplo máximo. Además, en [12], se establece una ecuación que relaciona el orden de derivación fraccional q con respecto a la longitud de acoplo óptimo L_{\max} de la red:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_{\max}}\right)^2} \quad (2.5.2)$$

Así, para un derivador de orden 0,5, la longitud de la red deberá ser aproximadamente 0,87 veces la longitud de máximo acoplo. Como resultado, a la longitud de onda de resonancia el acoplo máximo de la LPG es de un 80%. Si se simula una red con estas características de forma que la parte central del pulso esté contenida en el FWHM de la red subacoplada, con un ancho $\Delta\omega$ de 3,4 Trad/s para este caso particular, se obtienen los espectros de la Figura 2.5.5:

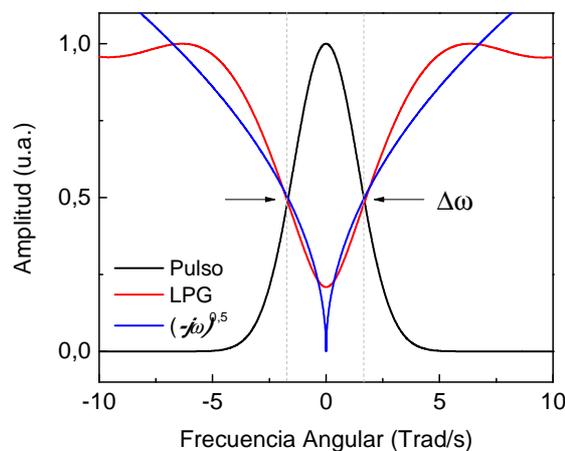


Figura 2.5.5 Espectro de Amplitud de un Pulso Gaussiano, de una LPG como menos derivador de orden 0,5 y de un menos derivador ideal de orden 0,5.

En el caso de los derivadores fraccionales, la aproximación no es tan precisa como en el caso del derivador de orden 1, ya que a la frecuencia de resonancia, la red de período largo no acopla el 100% de la energía a la cubierta, lo cual sí realizaría un derivador de orden fraccional ideal. Además, el salto de fase proporcionado por la LPG subacoplada no se da de forma abrupta, sino que lo hace a lo largo de un cierto ancho frecuencial que es aproximadamente el mismo $\Delta\omega$ de la respuesta en amplitud de la red, como se observa en la Figura 2.5.6:

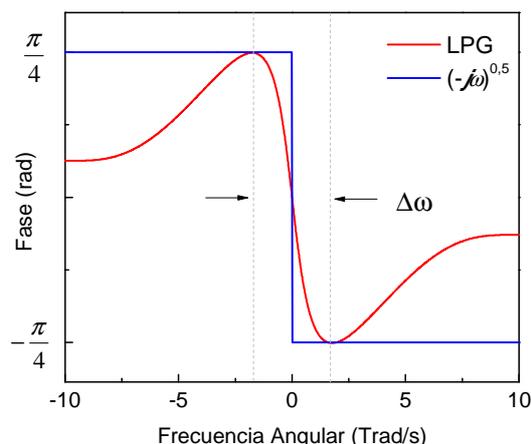


Figura 2.5.6 Salto de fase introducido por una LPG como menos derivador de orden 0,5 y un menos derivador ideal de orden 0,5. El salto de fase por la LPG subacoplada no es abrupto, sino que se da a lo largo de un ancho de banda $\Delta\omega$.

Nuevamente, el salto de fase de la LPG tiene la magnitud esperada y se encuentra en medio de una pendiente de fase que introduce un retardo en la señal, aunque se da en dirección contraria al caso ideal. Los gráficos de la parte real de la envolvente compleja del pulso derivado fraccionalmente y su intensidad son los de la Figura 2.5.7.

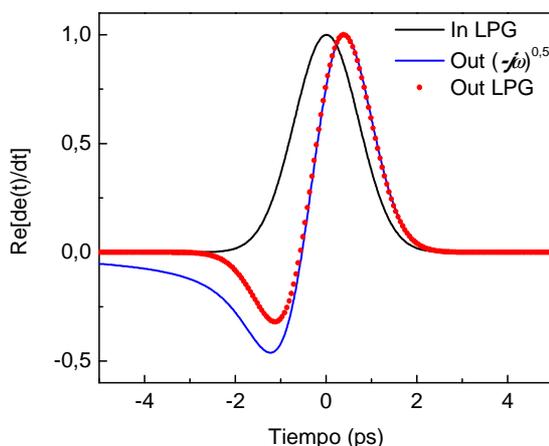


Figura 2.5.7 Parte real de la envolvente compleja a la entrada (In) y salida (Out) de una LPG como menos derivador de orden 0,5.

Existe entonces una desviación respecto al menos derivador ideal, debida principalmente a la transición suave de fase de la LPG en comparación al escalón del derivador fraccional ideal. De hecho, el ancho de banda $\Delta\omega$ que necesita la LPG para cambiar de fase es el mínimo ancho de banda que se requiere que tenga la señal a procesar, mientras que el máximo ancho de banda está dado por los máximos de transmisión de la LPG [17,20]. Podemos decir entonces que mientras más se aproxime la respuesta en fase de la LPG a un escalón de magnitud $q\pi$ para el ancho de banda de la señal, más similar será la salida de la LPG a la del derivador fraccional ideal.

En intensidad, la salida del derivador fraccional se muestra en la Figura 2.5.8.

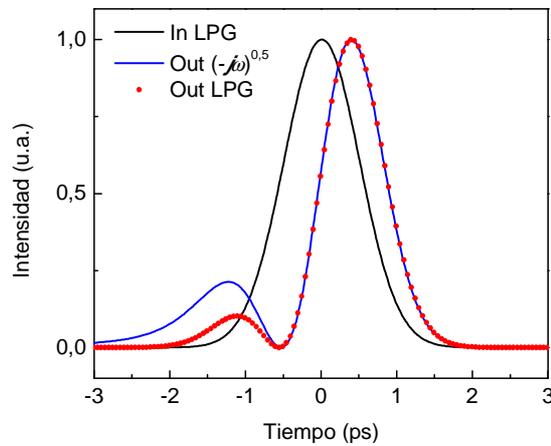


Figura 2.5.8 Intensidad de un pulso Gaussiano a la entrada (In) y salida (Out) de una LPG como menos derivador de orden 0,5.

Luego, si se le agrega un factor de chirp al pulso Gaussiano, la LPG tiene un comportamiento que se aproxima bien al del derivador fraccional ideal. Se muestra en la Figura 2.5.9 la gráfica de intensidad al añadir un chirp de $C = +4$ sin realizar variaciones al ancho de banda de la LPG o del derivador fraccional de las simulaciones anteriores.

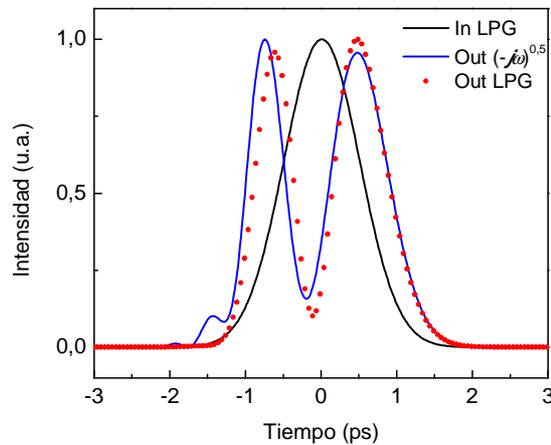


Figura 2.5.9 Intensidad de un pulso Gaussiano con chirp a la entrada (In) y salida (Out) de una LPG como menos derivador de orden 0,5.

Nuevamente, el efecto del chirp en la derivada fraccional será el de hacer ambos lóbulos más simétricos y reducir el intervalo temporal entre el máximo de ambos [11]. Esto será evidente al estudiar los resultados experimentales de derivación fraccional con un pulso dotado de un alto factor de chirp.

2.6 Interferómetro Mach-Zehnder en Fibra Óptica Como Derivador Fraccional

Existen múltiples alternativas para implementar un comportamiento similar al de un derivador fraccional. Además del método ya discutido mediante una red de período largo uniforme [12], existe la opción de utilizar una FBG asimétrica [4], o una FBG con *tilt* o inclinación en fibra de Er-Yb [21]. Sin embargo, estas opciones se encuentran limitadas en lo que respecta a su ancho de banda, ya que por lo general son adecuadas para procesar señales de menos de 20 GHz en el caso de las FBGs, o de más de 1 THz para las LPGs [22].

Para poder procesar señales con anchos de banda intermedios entre los 20 GHz y 1 THz, se optará por la opción de un interferómetro modal de tipo Mach-Zehnder o MZI, construido a partir de dos redes de período largo en serie. Definiremos entonces las distancias L_1 y L_2 como las longitudes de cada una de las LPGs, y L la distancia entre ambas, tal como lo muestra la Figura 2.6.1:

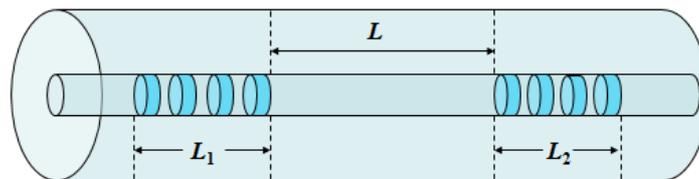


Figura 2.6.1. Interferómetro Mach-Zehnder con dos LPGs en serie.

El funcionamiento del interferómetro se basa en que hay una diferencia entre el camino óptico visto por el modo del núcleo y el que ve un modo de la cubierta, ya que sus constantes de propagación son distintas. El interferómetro se diseña de forma que la primera LPG acople la mitad de la energía a un modo de la cubierta, mientras que la otra mitad sigue en el núcleo. Luego de haber viajado una distancia L , ambos campos ya desfasados se recombinan con la ayuda de la segunda LPG, y se produce la interferencia:

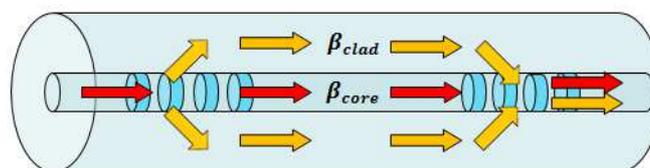


Figura 2.6.2 Funcionamiento del interferómetro basado en LPGs.

La forma más sencilla de estudiar el comportamiento de éste dispositivo será mediante matrices, ya que consiste de varios elementos en serie. A partir de las ecuaciones (2.4.32) que describen la variación del campo a la salida de una LPG, tanto para el modo del núcleo como el de la cubierta, es posible definir la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} E^c(z) \\ E^l(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^c(0) \\ E^l(0) \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

donde los elementos M_{ij} describen a la red de período largo. Estos elementos son:

$$\begin{aligned} M_{11} &= e^{j\frac{\Delta\beta}{2}z} \left[\cos(\gamma z) - j \frac{\Delta\beta}{2} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \right] \\ M_{12} &= \kappa_{cl} e^{j\frac{\Delta\beta}{2}z} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \\ M_{21} &= \kappa_{lc} e^{-j\frac{\Delta\beta}{2}z} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \\ M_{22} &= e^{-j\frac{\Delta\beta}{2}z} \left[\cos(\gamma z) + j \frac{\Delta\beta}{2} \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma} \right] \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Por otro lado, la propagación por la fibra óptica se puede modelar por medio de una matriz diagonal F , donde sus elementos no nulos son factores de fase que dependen de la propagación en z , junto con los índices del núcleo y de la cubierta:

$$F(z) = \begin{pmatrix} e^{-j\beta_c z} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_l z} \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

Así, la salida del interferómetro se puede escribir como una multiplicación de las matrices de cada uno de los elementos que lo conforma, tomando en cuenta además las matrices de propagación para cada uno de ellos ($L_{Total}=L_1+L_2$):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E^c(L_{Total}) \\ E^l(L_{Total}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-j\beta_c L_2} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_l L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-j\beta_c L} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_l L} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-j\beta_c L_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_l L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^c(0) \\ E^l(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Tomando como condiciones iniciales las definidas en la ecuación (2.4.31), que consisten en un campo E_0 en el núcleo de la fibra y nulo en la cubierta, se obtiene que la salida del dispositivo es:

$$E^c(L_{Total}) = e^{-j\beta_c L_{Total}} \left[M_{11}^{(2)} M_{11}^{(1)} + M_{12}^{(2)} M_{21}^{(1)} e^{j(\beta_c - \beta_l)(L_1 + L_2)} \right] E_0 \quad (2.6.5)$$

El interferómetro presentará entonces múltiples bandas de atenuación a distintas frecuencias, con una banda intensa a la frecuencia de resonancia de la LPG. En la Figura 2.6.3 se muestra una simulación de este comportamiento cuando se utilizan dos LPGs idénticas de 3 dB cada una. Esto es, que acoplan la mitad de la energía al modo de la cubierta correspondiente, y la otra mitad continúa por el modo fundamental. Al simular la ecuación anterior se obtiene, en amplitud la respuesta de la Figura 2.6.3.

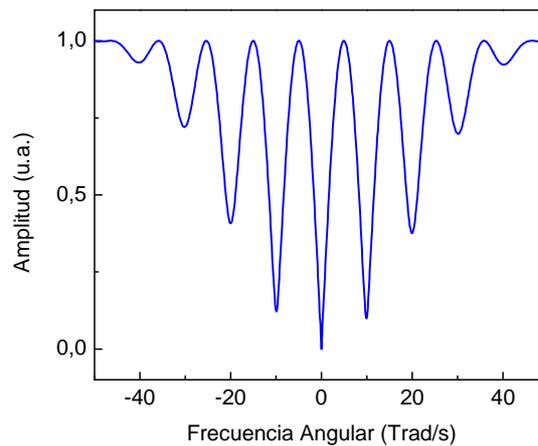


Figura 2.6.3 Respuesta en amplitud del interferómetro modal con dos LPGs iguales.

Por otro lado, la fase presenta múltiples saltos en cada una de las resonancias, como se observa en la Figura 2.6.4.

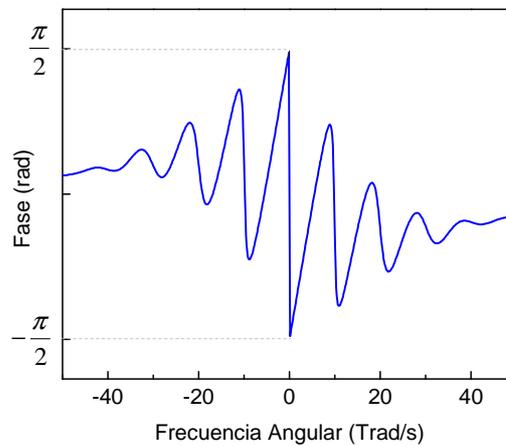


Figura 2.6.4 Respuesta en fase del interferómetro modal con dos LPGs iguales.

Nótese que la franja central posee las mismas características de un derivador de orden 1, ya que presenta una atenuación del 100% en amplitud en la frecuencia central, y además un salto abrupto de fase de π . Al introducir el mismo pulso gaussiano utilizado anteriormente, y ajustando su FWHM para que coincida con el de la franja central se obtiene un pulso derivado, como se observa en la Figura 2.6.5.

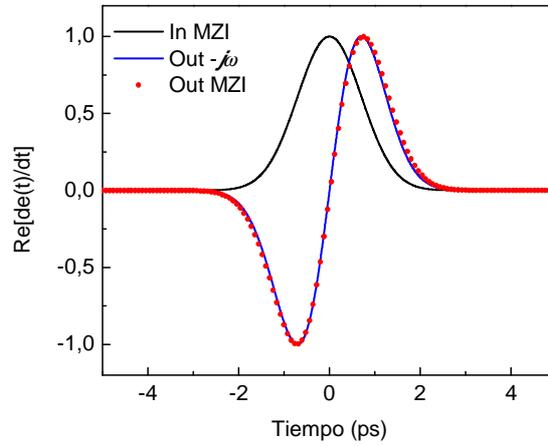


Figura 2.6.5 Parte real de la envolvente de un pulso Gaussiano a la entrada (In) y salida (Out) del interferómetro, junto a la respuesta de un menos derivador ideal.

Si bien este interferómetro se utilizó originalmente para estudios de cambios del índice efectivo del modo fundamental de la fibra mediante radiación ultravioleta [23], en el trabajo de B.H. Lee y J. Nishii [24], se deriva una ecuación que relaciona el espaciado entre las franjas del interferómetro con la distancia entre ambas redes de período largo, y es dada por:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{\Delta n_g \left(L + \frac{L_1 + L_2}{2} \right)} \quad (2.6.6)$$

De esta manera, diseñando la distancia entre ambas redes de manera adecuada, es bastante sencillo elegir el ancho de banda que se necesita y cumplir con el objetivo de superar los 20 GHz antes mencionado. La única restricción es que la longitud L debe ser mayor a las de las redes L_1 y L_2 , ya que de lo contrario la ecuación (2.6.6) pierde validez.

Por otro lado, para mostrar la capacidad como derivador fraccional de éste dispositivo, es necesario hacer que ambas LPGs tengan distinta longitud, y por lo tanto, posean un acoplo distinto. Para desarrollar esta idea, se hará uso de la referencia [21].

Se inicia definiendo el acoplo máximo de potencia χ_1 de la LPG 1 del núcleo a la cubierta, y χ_2 como el acoplo de la LPG 2 de la cubierta al núcleo, ambas a la frecuencia de resonancia:

$$\chi_1 = |E^c(\omega_0)|^2 \quad \chi_2 = |E^l(\omega_0)|^2 \quad (2.6.7)$$

Claramente, $|\chi_i|$ deberá ser un valor entre cero y uno. Si se elige de forma arbitraria χ_1 igual a 0.5, o lo que es lo mismo, que la primera LPG sea de 3 dB, se puede mostrar que

el orden fraccional q de derivación del interferómetro está relacionado al acoplo de la cubierta al núcleo de la segunda LPG mediante:

$$\chi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[2 \tan^2 \left(\frac{q\pi}{2} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (2.6.8)$$

Tomando el orden de derivación de 0.5, el acoplo de la segunda red de período largo deberá ser de $\chi_2 = 0,67$. Recordando que ambas redes tienen la misma constante de acoplo, y lo único que cambia es su longitud, se recurre a la ecuación (2.4.33) para determinar L_2 . La respuesta en frecuencia se muestra en las Figuras 2.6.6 y 2.6.7, junto con el derivador ideal de orden 0.5:

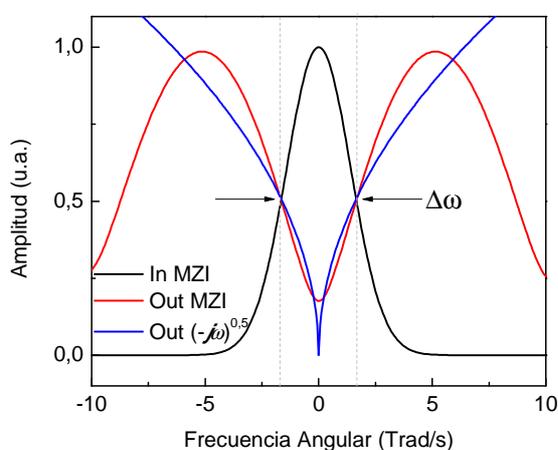


Figura 2.6.6 Amplitud del espectro de un pulso Gaussiano, un interferómetro como menos derivador de orden 0,5, y un menos derivador 0,5 ideal.

La respuesta en fase presenta el salto de $\pi/2$ necesario en un derivador de orden 1/2. De nuevo observamos la transición suave en el MZI que limita el mínimo ancho de banda de las señales que podemos utilizar:

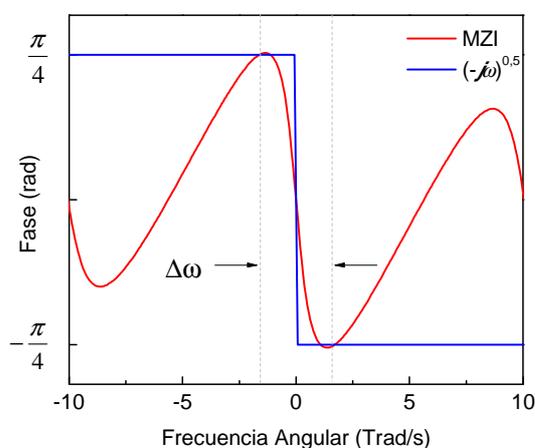


Figura 2.6.7 Fase del interferómetro modal respecto al menos derivador de orden 0,5 ideal.

Finalmente, en el dominio del tiempo, la envolvente compleja del pulso Gaussiano toma la forma indicada en la Figura 2.6.8.

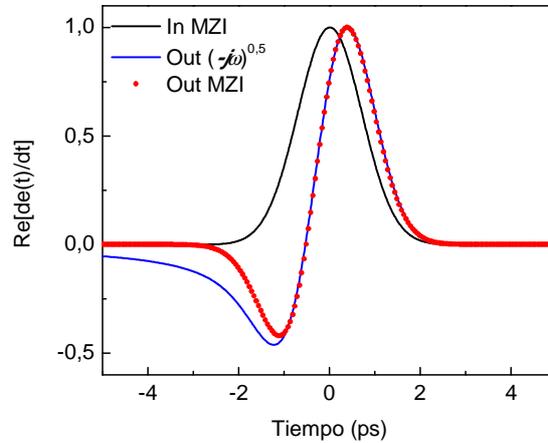


Figura 2.6.8 Parte real de la envolvente compleja de un pulso Gaussiano a la entrada (In) y salida (Out) del interferómetro como menos semiderivador.

En intensidad, la el pulso adquiere una forma similar a la salida de un menos semiderivador, como se observa en la Figura 2.6.9.

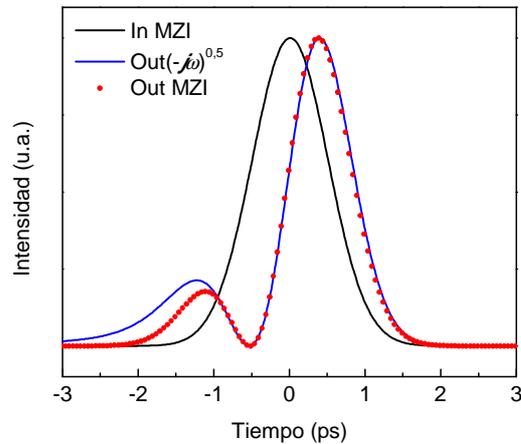


Figura 2.6.9 Intensidad del pulso Gaussiano a la entrada (In) y salida (Out) del interferómetro como menos semiderivador.

Teniendo estos dispositivos ya analizados, se explorarán en los siguientes capítulos los detalles del diseño y fabricación de las redes de difracción, así como los experimentos en donde se muestra la aplicabilidad del cálculo fraccional en problemas físicos.

Bibliografía - Capítulo 2

- [1] K. Oldham y J. Spanier, *The fractional calculus*, Academic Press, 1973.
- [2] A. V. Oppenheim y J. S. Lim, «The importance of phase in signals,» *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, n° 5, pp. 529-541, 1981.
- [3] J. C. Diels y W. Rudolph, *Ultrashort laser pulse phenomena*, Academic Press, 2005.
- [4] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «In-fiber all-optical fractional differentiator,» *Optics Letters*, vol. 34, n° 6, pp. 833-835, 2009.
- [5] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Proposal and design of an in-fiber all-optical fractional integrator,» *Optics Communications*, n° 283, pp. 5012-5015, 2010.
- [6] B. A. Horwitz, «Phase image differentiation with linear intensity output,» *Applied Optics*, vol. 17, n° 2, pp. 181-186, 1978.
- [7] E. Tajahuerce, T. Szoplik, J. Lancis, V. Climent y M. Fernandez, «Phase-object fractional differentiation using Fourier plane filters,» *Pure and Applied Optics*, n° 6, pp. 481-490, 1997.
- [8] J. Lancis, T. Szoplik, E. Tajahuerce, V. Climent y M. Fernández-Alonso, «Fractional derivative Fourier plane filter for phase-change visualization,» *Applied Optics*, vol. 36, n° 29, pp. 7461-7464, 1997.
- [9] M. H. Asghari y J. Azaña, «All-optical Hilbert transformer based on a single phase-shifted fiber Bragg grating: design and analysis,» *Optics Letters*, vol. 34, n° 3, pp. 334-336, 2009.
- [10] J. Ge, C. Wang y X. Zhu, «Fractional optical Hilbert transform using phase shifted fiber Bragg gratings,» *Optics Communications*, n° 284, pp. 3251-3257, 2011.
- [11] C. Cuadrado-Laborde, J. Lancis y M. V. Andrés, «Proposal of time-resolved chirp-measurement through all-optical in-fiber mathematical operators,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 97-108, 2010.
- [12] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Long-period grating assisted fractional differentiation of highly chirped light pulses,» *Optics Communications*, n° 363, pp. 37-41, 2016.
- [13] T. Erdogan, «Fiber Grating Spectra,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, n° 8, pp. 1277-1294, 1997.
- [14] S. W. James y R. P. Tatam, «Optical fibre long-period grating sensors; characteristics and application,» *Measurement Science and Technology*, n° 14, pp. R49-R61, 2003.
- [15] X. Chen, C. Liu, M. D. Hughes, D. A. Nagel, A. V. Hine y L. Zhang, «EDC-mediated oligonucleotide immobilization on a long period grating optical biosensor,» *Biosensors and Bioelectronics*, vol. 6, n° 2, pp. 1-6, 2015.

- [16] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, Academic Press, 1999.
- [17] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Design of an ultra-broadband all-optical fractional differentiator with a long-period fiber grating,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 571-576, 2011.
- [18] R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, R. Morandotti y J. Azaña, «Ultrafast all-optical differentiators,» *Optics Express*, vol. 14, n° 22, pp. 10699-10707, 2006.
- [19] M. Kulishov y J. Azaña, «Long-period fiber gratings as ultrafast optical differentiators,» *Optics Letters*, vol. 30, n° 20, pp. 2700-2702, 2005.
- [20] C. Cuadrado-Laborde, «All-optical ultrafast fractional differentiator,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 40, pp. 983-990, 2009.
- [21] H. Shahoei, J. Albert y J. Yao, «Tunable fractional order temporal differentiator by optically pumping a tilted fiber bragg grating,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 24, n° 9, pp. 730-732, 2012.
- [22] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Experimental demonstration of fractional order differentiation using a long-period grating-based in-fiber modal interferometer,» *Optics Communications*, n° 380, pp. 35-40, 2016.
- [23] E. M. Dianov, S. A. Vasiliev, A. S. Kurkov, O. I. Medvedkov y V. N. Protopopov, «In-fiber Mach-Zehnder interferometer based on a pair of long-period gratings,» de *22 Conferencia Europea en Comunicaciones Ópticas (ECOC)*, Oslo, 1996.
- [24] B. H. Lee y J. Nishii, «Dependence of fringe spacing on the grating separation in a long-period fiber grating pair,» *Applied Optics*, vol. 38, n° 16, pp. 3450-3459, 1999.

Capítulo 3 – Grabación de Redes de Difracción en Fibra Óptica

3.1 Fotosensitividad en Fibras Ópticas

Para fabricar las redes de difracción, ya sean LPGs o Redes de Bragg, es necesario inducir un cambio periódico en el índice de refracción efectivo de la fibra óptica. Para este propósito existen multitud de técnicas. Entre las más conocidas están las de irradiar la fibra con luz de longitudes de onda en el ultravioleta [1], aunque también existen otras opciones, como la de utilizar láseres de femtosegundos [2], pulsos de un láser de CO₂ [3] o incluso se ha logrado fabricar redes de período largo mediante métodos mecánicos [4].

En el caso de esta tesis, la forma en que se logrará inducir el cambio de índice en el núcleo de la fibra es mediante un láser ultravioleta de onda continua a 244 nm, tanto para redes de Bragg como para redes de período largo. La propiedad del vidrio que forma el núcleo de una fibra de modificar su índice de refracción por radiación UV se denomina fotosensitividad, y se debe a defectos en la matriz de óxido de germanio (GeO₂) y sílice (SiO₂) que lo forman.

Cuando la fibra es fabricada, se producen óxidos de germanio de la forma GeO_x (con x = 1,2,3 o 4) [1]. Los átomos de germanio de estas nuevas moléculas tienden a formar enlaces covalentes con los átomos de silicio o con otros átomos de germanio, produciendo defectos en el vidrio. El defecto más común es la presencia de GeO.

Estos enlaces covalentes poseen bandas de absorción en el ultravioleta, de forma que cuando se irradia la fibra a estas longitudes de onda los enlaces se rompen, como se muestra en la Figura 3.1.1:

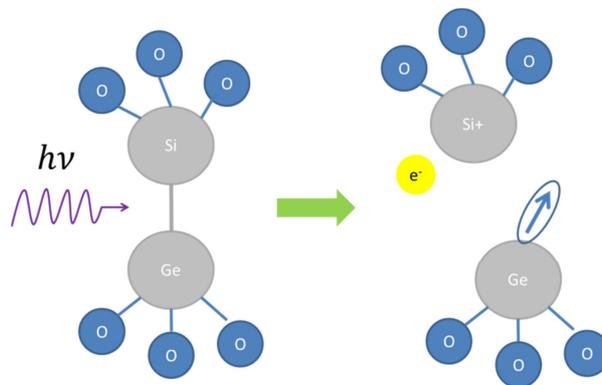


Figura 3.1.1. Ruptura de un defecto Ge-Si por radiación ultravioleta.

El electrón liberado puede entonces recombinarse con el hueco en la molécula de GeO_x o puede desplazarse a otro sitio de la matriz de vidrio para hacerlo en otro defecto similar. El efecto de esta ruptura de enlaces es que las moléculas reorganizan su geometría, cambiando así la polarizabilidad del material, y por ende su índice de refracción. De esta forma, mientras mayor sea la concentración de GeO_2 , mayor será la cantidad de defectos y por lo tanto la fibra tendrá una mayor fotosensibilidad. El proceso puede revertirse térmicamente en mayor o menor grado, por temperaturas superiores a los $100\text{ }^\circ\text{C}$ [1].

En una fibra óptica dada, existe un valor máximo de cambio de índice del núcleo δn_{sat} que se alcanza cuando todos los defectos producidos por dopado se han consumido. Para una fibra estándar con un porcentaje de 4% mol. de GeO_2 , se han observado valores de δn_{sat} de $3,4 \times 10^{-5}$. Si se aumenta el dopado del vidrio a 20% mol., el δn_{sat} llega a $2,5 \times 10^{-4}$ [5].

Debido a que este efecto es relativamente pequeño en fibras ópticas convencionales (de apertura numérica baja), existen opciones para incrementar la fotosensibilidad. Una de las más conocidas es la de introducir las fibras en cámaras con hidrógeno a alta presión por varios días. El hidrógeno se infiltra dentro de la fibra, y forma defectos Ge-OH y Si-OH por la radiación ultravioleta incrementando el índice de refracción [6,7].

Las fibras que han sido hidrogenadas para aumentar su fotosensibilidad presentan dos desventajas importantes. La primera es el aumento de las pérdidas en las bandas de 1390 nm y 1420 nm, que es donde los complejos OH formados por el hidrógeno poseen su resonancia [1], y la segunda, la inestabilidad de las redes de difracción en las horas posteriores a la grabación. Debido a la porosidad de la sílice, el hidrógeno que no se consume como defectos OH poco a poco sale de la fibra, haciendo que cambien los índices efectivos de los modos. Éste efecto es particularmente notable en las LPGs. Es posible acelerar el proceso de difusión del hidrógeno (y por lo tanto de estabilización) mediante un tratamiento térmico de la fibra en un horno [8].

Si bien es cierto que por medio del tratamiento de las fibras con hidrógeno a alta presión se obtienen excelentes niveles de fotosensibilidad [1], el hecho de que el espectro de las redes sea tan inestable representa un obstáculo significativo. Otras alternativas para aumentar la fotosensibilidad consisten en dopar el núcleo con óxido de boro [5], u óxido de estaño [9]. El objetivo de introducir el dopado en el núcleo es que se generen nuevos defectos con los átomos de germanio y de esta forma incrementar el índice al irradiar la fibra con un láser ultravioleta.

Este tipo de fibras dopadas se encuentran comercialmente disponibles, y fueron utilizadas en este trabajo para fabricar la mayor parte de las redes de difracción. Específicamente se usaron las fibras Fibercore PS1250/1500, de núcleo dopado con boro y de N.A. = 0,13 para ser usada en la zona de 1550 nm, de modo que fuera compatible en

apertura numérica y diámetro modal con las fibras de telecomunicaciones. Se usó además la Fibercore PS980 (N.A. = 0,13) también dopada con boro para redes en la zona cercana a los 1000 nm. Finalmente se usaron fibras SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) dopadas con germanio, y con aperturas numéricas 0,19 y 0,29 respectivamente, para fabricar redes de período largo espectralmente estrechas.

3.2 Grabación de Redes de Período Corto (FBGs)

Antes de iniciar con el siguiente apartado, usaremos de ahora en adelante una nomenclatura distinta para las periodicidades de las redes de período corto y de período largo. Usaremos Λ_{Bragg} para denotar la periodicidad de una red de período corto o FBG, y Λ_{LPG} para la periodicidad de una red de período largo o LPG. Se adoptará esta forma de representar las periodicidades para evitar confusiones, ya que se manejarán ambos tipos de redes simultáneamente.

Para grabar las redes de período corto, se utilizó el método de máscara de fase. Esta es una técnica interferométrica, que se vale de una rejilla de difracción fabricada mediante un haz de electrones sobre un sustrato de vidrio. Se obtienen así surcos sobre la placa de vidrio espaciados una distancia Λ_{mask} . Al incidir un haz ultravioleta de longitud de onda λ_{UV} a un ángulo de incidencia θ_i , ésta rejilla difractará el haz en varios órdenes m , a ángulos θ_m dados por la ecuación (3.2.1).

$$\sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{m\lambda_{UV}}{\Lambda_{mask}} + \sin\theta_i \quad (3.2.1)$$

En la Figura 3.2.1 se ilustra la difracción de un haz ultravioleta para un caso específico, en donde $\Lambda_{mask} = 2\lambda_{UV}$ y con un ángulo de incidencia de 30° .

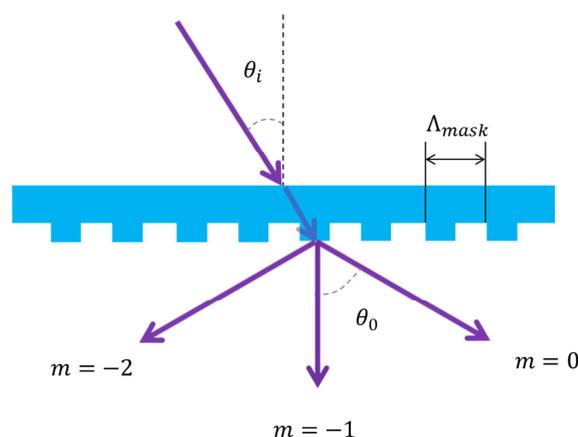


Figura 3.2.1 Haz ultravioleta con incidencia oblicua difractado por una máscara de fase.

La configuración que se utilizará para nuestros propósitos es la de incidencia normal sobre la máscara de fase. Para éste caso ($\theta_i = 0$), la energía del haz se distribuye entre los órdenes de difracción 0, +1 y -1. La máscara se diseña para que el orden 0, que tiene la misma dirección del haz incidente, se vea atenuado y que la mayor parte de la potencia del haz se concentre en los otros dos órdenes, que serán responsables de formar un patrón de interferencia justo frente a la máscara de fase, como se muestra en la Figura 3.2.2. La anulación del orden 0 se consigue dimensionando adecuadamente la profundidad h de los surcos a media longitud de onda de la radiación incidente.

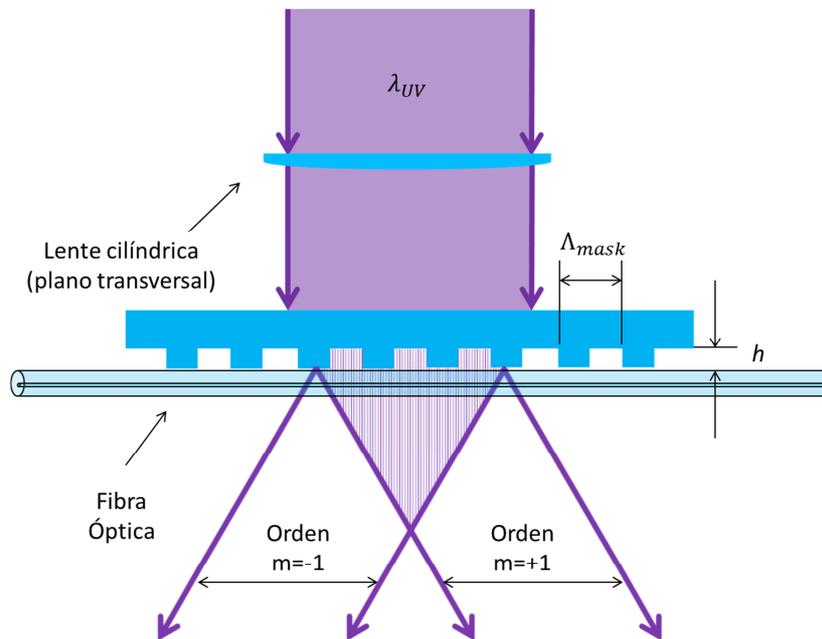


Figura 3.2.2. Grabación de una red de período corto mediante una máscara de fase.

La fibra óptica donde se quiere grabar la red de Bragg se coloca desprovista de su polímero protector lo más cerca posible de la máscara de fase. De esta forma, las franjas del patrón de interferencia producidas por los órdenes +1 y -1 producirán un cambio de índice periódico en el núcleo. La periodicidad del patrón de interferencia será Λ_{Bragg} , y se relaciona con la periodicidad de los surcos de la máscara Λ_{mask} de la siguiente forma:

$$\Lambda_{Bragg} = \frac{\lambda_{UV}}{2 \sin(\theta_m / 2)} = \frac{\Lambda_{mask}}{2} \quad (3.2.2)$$

Nótese que la relación entre la periodicidad de la máscara de fase y la del patrón de interferencia no depende de la longitud de onda del haz. Las máscaras de fase son diseñadas para operar solamente a una longitud de onda UV específica; si no se usa la longitud de onda correcta, el orden 0 del haz no es atenuado adecuadamente, y el patrón de

interferencia pierde su calidad [1]. Éste detalle se debe tener en cuenta a la hora de seleccionar qué tipo de máscara de fase se utilizará.

Para controlar la longitud física de la red, debemos barrer el haz UV a lo largo de la máscara de fase. El láser utilizado es un Coherent Innova 300C FRED (Frequency Doubled), que corresponde a un láser de argón con un cristal doblador para emitir en el ultravioleta. La potencia nominal de éste es de 100 mW (onda continua) con emisión a 244 nm. El diámetro del haz a la salida del láser es de entre 0,6 mm y 0,8 mm, medido alrededor de su punto de potencia máxima cuando ésta decae en un factor de $1/e^2$.

El haz ultravioleta se hace pasar por una lente cilíndrica de forma que es focalizado a lo largo de una línea sobre la máscara de fase. Posteriormente, con la ayuda de un motor DC de pasos (Physik Instrumente M-525.22), y de una plataforma móvil con un espejo, el haz láser focalizado se barre a lo largo de la máscara de fase. El motor DC posee una resolución de 34 nm. En la Figura 3.2.3 se muestra el montaje descrito.

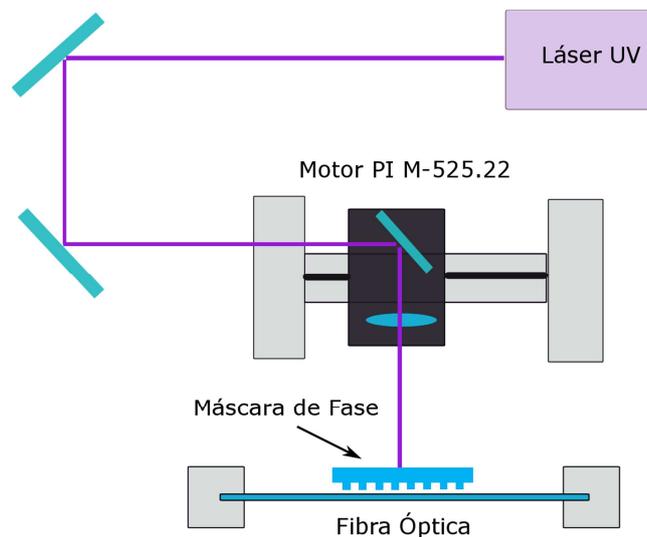


Figura 3.2.3 Montaje experimental para la grabación de las redes de período corto.

Para fabricar una FBG se necesita además de los elementos de grabado mencionados, una forma de monitorizar en tiempo real la evolución de la red. Para ésto, se introduce a la fibra luz de alguna fuente de banda ancha (típicamente uno o varios LEDs) cuyo espectro cubra el rango de longitudes de onda en donde se espera obtener las resonancias de la red. La salida de la fibra se conecta entonces a un Analizador de Espectros Ópticos (OSA – Optical Spectrum Analyzer) durante el proceso de grabado. El OSA utilizado fue el Yokogawa AQ6370C (600 nm – 1700 nm) con resolución de 0,02 nm. Se muestra el esquema del montaje en la Figura 3.2.4.

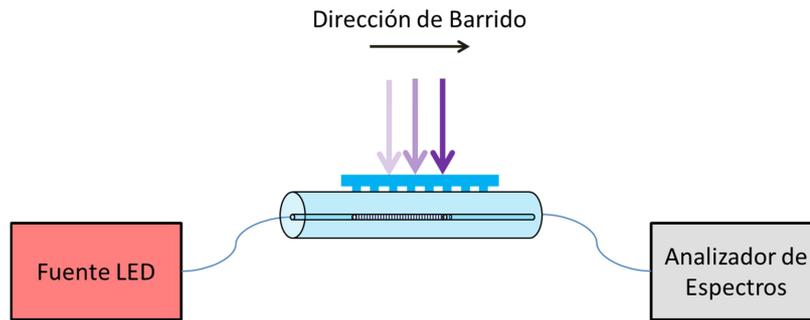


Figura 3.2.4 Monitorización del grabado de una red de período corto mediante un LED y un Analizador de Espectros.

De esta manera, antes de hacer incidir el láser sobre la fibra e iniciar la grabación, se debe tomar una captura del espectro de emisión de la fuente de banda ancha para ser tomada como referencia. Una vez hecho esto, se inicia la rutina del software que controla el motor para que el láser efectúe el barrido sobre la máscara de fase. Una velocidad típica de barrido para una red uniforme como las que se fabricaron para esta tesis es de alrededor de $30 \mu\text{m/s}$.

Típicamente nos encontraremos con la situación de querer fabricar una FBG para conseguir una longitud de onda de Bragg específica. Inicialmente se puede tomar $n_{\text{eff},c} = 1.45$, que es un valor aproximado del índice de refracción del sílice para el infrarrojo cercano. Luego, utilizamos la ecuación (2.4.55) con $m = 1$, para despejar la periodicidad Λ_{Bragg} que deberá tener la red, y así elegir la máscara de fase adecuada:

$$\Lambda_{\text{Bragg}} = \frac{\lambda_{\text{Bragg}}}{2n_{\text{eff},c}} \quad (3.2.3)$$

Se muestra en la Figura 3.2.5 el espectro en transmisión de una red de período corto grabada sobre fibra Fibercore PS980. Esta fibra tiene una fotosensitividad mejorada gracias a un dopado con boro, y fue diseñada para operar a longitudes de onda cercanas a 1060 nm. Su longitud de onda de corte se encuentra a 940 nm y posee una apertura numérica de 0,13. La periodicidad Λ_{Bragg} de la red es de 365 nm, lo cual corresponde a una máscara de fase con $\Lambda_{\text{mask}} = 730 \text{ nm}$. En este caso, longitud de onda de Bragg es de 1061,44 nm. La medida de λ_{Bragg} en el analizador de espectros ópticos permite entonces conocer el índice efectivo del modo fundamental en la red grabada con una precisión de 0,002%.

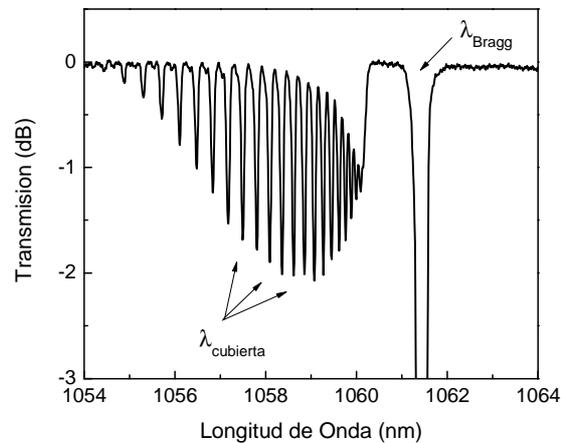


Figura 3.2.5 Espectro en transmisión de una red de período corto de $\Lambda_{\text{Bragg}}=365$ nm para la zona de 1060 nm. Se indican las resonancias contrapropagantes para el modo del núcleo λ_{Bragg} y para los modos de la cubierta $\lambda_{\text{cubierta}}$.

Obsérvese que en el espectro no sólo aparece la resonancia a la longitud de onda de Bragg correspondiente al modo $\text{LP}_{0,1}$, sino que además los picos a longitudes de onda más cortas $\lambda_{\text{cubierta}}$ corresponden a acoplos contrapropagantes a modos de la cubierta del tipo $\text{LP}_{0,n}$. Se ordenan los modos de acuerdo a su posición en el espectro; el orden n se incrementa conforme las longitudes de onda de las resonancias son más cortas.

Se observa además en la Figura 3.2.5 una zona de pérdidas de 1058 nm a 1060 nm junto con las resonancias de los modos de la cubierta. Estas pérdidas son debido a acoplo a modos de radiación [1], que se producen si al fabricar la red de difracción, el haz UV no incide de forma totalmente perpendicular sobre la fibra.

La fabricación de una red de Bragg para visualizar las resonancias a modos de la cubierta es un paso previo al diseño de las LPGs, ya que nos permite calcular experimentalmente los valores de los índices efectivos de los modos y así acoplar la longitud de onda que deseamos a un modo de la cubierta específico.

3.3 Grabación de Redes de Período Largo (LPGs)

3.3.1 Cálculo de los Índices Efectivos del Núcleo y de la Cubierta

Para diseñar y fabricar redes de período largo a una longitud de onda λ_{LPG} deseada, es preciso conocer primero el índice efectivo del modo fundamental del núcleo $n_{\text{eff},c}$ y el índice efectivo de alguno de los modos de la cubierta $n_{\text{eff},l}$ al cual se desea acoplar la energía, tal y como se puede corroborar en la ecuación (2.4.27) para acoplos copropagantes. En todos los casos estaremos trabajando para el primer armónico ($m = 1$) de la resonancia.

En este trabajo, la información acerca de los índices efectivos se obtuvo de forma experimental mediante la grabación de una red de Bragg (FBG), ya que su espectro de transmisión proporciona los valores aproximados de los índices efectivos tanto del núcleo como de la cubierta. Es importante mencionar que la resonancia de la red de Bragg deberá ser cercana a la longitud de onda λ_{LPG} que se pretende obtener para así minimizar los problemas derivados de la dispersión de los modos. Debido a la dispersión cromática, los valores de los índices efectivos serán solamente válidos en la misma región del espectro a la que se encuentran las resonancias de la FBG.

Comenzaremos entonces determinando el índice efectivo del núcleo. A partir de un espectro de transmisión de una FBG como el de la Figura 3.2.5, se utiliza la ecuación (2.4.55) para obtener $n_{eff,c}$. Debido a que Λ_{Bragg} y λ_{Bragg} son datos experimentales, podemos despejar el valor del índice efectivo del núcleo:

$$n_{eff,c} = \frac{\lambda_{Bragg}}{2\Lambda_{Bragg}} \quad (3.3.1)$$

Una vez obtenido el índice efectivo del núcleo, se debe elegir a cuál de los modos de la cubierta se va a acoplar la energía a la longitud de onda deseada λ_{LPG} . Como se observa en la Figura 3.2.5, cada uno de los modos de la cubierta posee un acoplo distinto. Para el caso particular de ésta red de Bragg, el acoplo de cada uno de los modos de la cubierta se representa en la Figura 3.3.1:

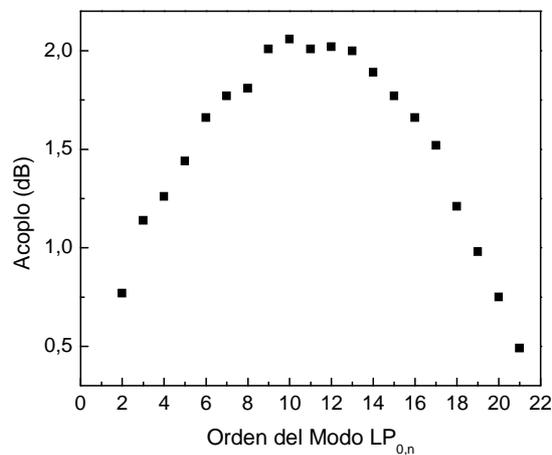


Figura 3.3.1 Acoplo de los modos de la cubierta en una fibra PS980 para una red de Bragg en la zona de 1060 nm.

Típicamente se suele elegir alguno de los modos de más alto acoplo para la red de período largo; en particular para la el caso de la Figura 3.3.1, se seleccionarían alguno de los modos 8 al 14. Una vez seleccionado el modo de la cubierta al que se desea acoplar la energía, se mide la longitud de onda de resonancia $\lambda_{cubierta}$ correspondiente a ése modo particular en el espectro de la red de Bragg de la Figura 3.2.5. Posteriormente, se utiliza la

ecuación (2.4.49), que es la ecuación de acoplo entre el modo del núcleo y uno de los modos de la cubierta en dirección contrapropagante para determinar el índice efectivo del modo de la cubierta elegido:

$$n_{eff,l} = \frac{\lambda_{cubierta}}{\Lambda_{Bragg}} - n_{eff,c} \quad (3.3.2)$$

Obsérvese que todos los datos son conocidos, ya que previamente se había determinado el índice efectivo del núcleo también a partir del espectro de la FBG. Finalmente, conociendo ambos índices efectivos, podemos determinar la periodicidad de la red de período largo Λ_{LPG} que se debe fabricar para trasvasar la luz a longitud de onda λ_{LPG} desde el modo del núcleo al modo deseado de la cubierta mediante la ecuación (2.4.27) de acoplo copropagante:

$$\Lambda_{LPG} = \frac{\lambda_{LPG}}{n_{eff,c} - n_{eff,l}} \quad (3.3.3)$$

Nótese que al aplicar las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) en un caso práctico, se está asumiendo que el índice efectivo de los modos tiene dispersión cromática despreciable en el rango espectral de la red de Bragg utilizada como base (Figura 3.2.5 en este caso). Ésto en general es cierto para los modos de orden más bajo de la cubierta; típicamente para los primeros modos hasta llegar al de acoplo más alto, sin embargo, pierde validez para modos de orden más alto.

En ocasiones, el criterio para elegir el modo de la cubierta no es la intensidad del acoplo, sino más bien el ancho de banda que se puede obtener en la LPG. Conforme mayor es el orden del modo, los anchos de banda que se pueden obtener son cada vez más estrechos, debido a que los índices efectivos $n_{eff,l}$ decrecen al incrementar el orden del modo, pero sin pasar del modo de acoplo máximo, ya que las resonancias pueden llegar al punto de retorno por dispersión y producir un ensanchamiento indeseado. Un menor índice efectivo de la cubierta implica un ancho de banda más estrecho, tal y como lo muestra la ecuación (2.4.37). En la Figura 3.3.2 se representan los valores de los índices efectivos a partir del espectro de la red de Bragg en la zona de 1060 nm de la Figura 3.2.5. El índice efectivo del $LP_{0,1}$ es el que tiene mayor magnitud por ser el índice del modo fundamental que viaja por el núcleo.

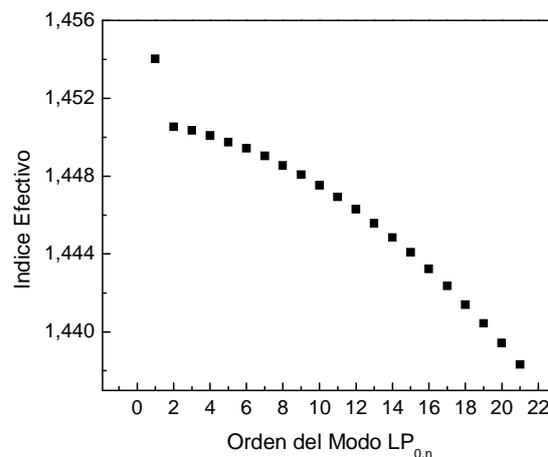


Figura 3.3.2 Índices efectivos de los modos $LP_{0,n}$ de la fibra calculados a partir de una red de Bragg en la zona de 1060 nm en la fibra PS980

A modo de resumen, en la Tabla 3.3.1 se muestran los índices efectivos y el acoplo contrapropagante para los primeros 21 modos de la fibra óptica PS980 en la zona de 1060 nm, siendo el $LP_{0,1}$ el modo fundamental del núcleo, y los modos $LP_{0,2}$ a $LP_{0,21}$ correspondientes a modos de la cubierta. Se calculan además por medio de la ecuación (3.3.3) las periodicidades que tendría que tener una red de período largo (LPG) para que la condición de acoplo copropagante se cumpla exactamente a 1060 nm.

Tabla 3.3.1 Índices efectivos de los modos de la cubierta para la fibra PS980 cercanos a 1060 nm, y cálculo de periodicidades para una LPG con resonancia a $\lambda_{LPG} = 1060$ nm

Modo	Índice efectivo	Acoplo (dB)	Λ_{LPG} para $\lambda_{LPG} = 1060$ nm (μm)
LP _{0,1}	1,454027	19,78	-
LP _{0,2}	1,450548	0,766	304,68
LP _{0,3}	1,450357	1,142	288,76
LP _{0,4}	1,450083	1,258	268,71
LP _{0,5}	1,449754	1,444	248,04
LP _{0,6}	1,449425	1,66	230,32
LP _{0,7}	1,449041	1,766	212,60
LP _{0,8}	1,448548	1,812	193,46
LP _{0,9}	1,448083	2,008	178,31
LP _{0,10}	1,447535	2,064	163,26
LP _{0,11}	1,446932	2,01	149,39
LP _{0,12}	1,446302	2,016	137,21
LP _{0,13}	1,445589	2,002	125,62
LP _{0,14}	1,444850	1,888	115,50
LP _{0,15}	1,444083	1,774	106,59
LP _{0,16}	1,443233	1,66	98,20
LP _{0,17}	1,442357	1,516	90,82
LP _{0,18}	1,441398	1,212	83,93
LP _{0,19}	1,440439	0,978	78,01
LP _{0,20}	1,439425	0,754	72,59
LP _{0,21}	1,438329	0,49	67,52

Obsérvese que para obtener una LPG que acople la longitud de onda deseada (1060 nm) a modos altos, se necesitan periodicidades cada vez más pequeñas. Ésto trae toda clase de dificultades a la hora de la fabricación, ya que es necesario limitar el spot del haz láser usando rendijas micrométricas, además de que cualquier desajuste en la alineación del mismo afecta la uniformidad de la red y por ende el espectro del dispositivo.

Otro detalle que vale la pena mencionar es que cada modo de la cubierta tiene un perfil de dispersión único, lo cual hace que sus los valores de los índices efectivos cambien de forma considerable entre sí para un mismo rango de longitudes de onda [10,11]. En la Figura 3.3.3, tomada de la referencia [11], se representan dos gráficos del período Λ_{LPG} de

una red de período largo versus la longitud de onda resonante λ_{LPG} para los modos $LP_{0,n}$ de la cubierta.

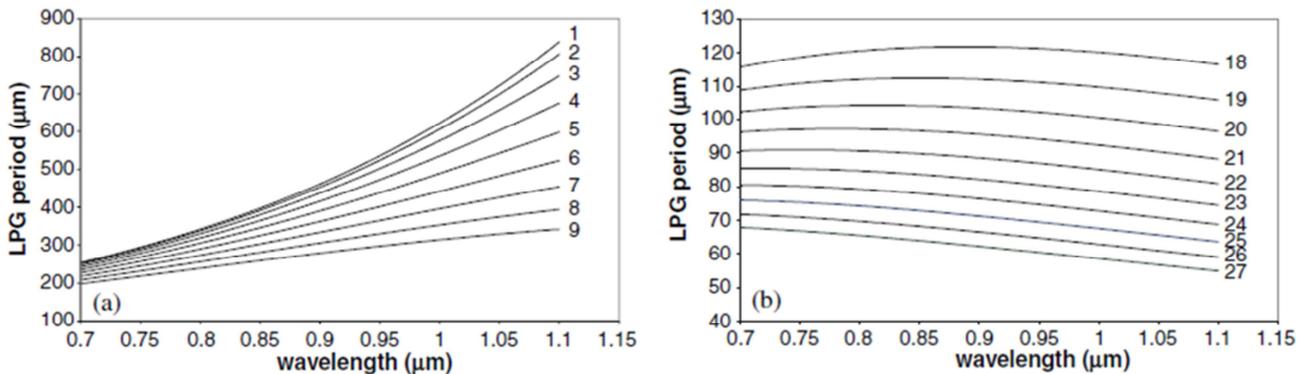


Figura 3.3.3 Relación entre la periodicidad de una LPG y su longitud de onda de resonancia a) para los primeros 9 modos de la cubierta y b) para los modos 18 a 27 en una fibra con longitud de onda de corte a 650 nm. Figura obtenida de [11]

Obsérvese que conforme el modo es más alto, la sensibilidad de la longitud de onda resonante ante un cambio en el período se hace cada vez mayor (el valor de $d\Lambda_{LPG}/d\lambda_{LPG}$ aumenta). Por lo tanto, la relación aproximadamente lineal entre periodicidad y longitud de resonancia se pierde para modos altos. Esto dificultará el ajuste del período Λ_{LPG} a la hora de fabricar LPGs si se utilizan modos de la cubierta de orden superior.

Otro aspecto importante se evidencia en el cambio de pendiente de las curvas para los modos más altos (Figura 3.3.3-b). Algunas de estas curvas poseen un máximo, lo cual significa que para estos modos no se puede acoplar ciertas longitudes de onda por más que se aumente el período. Además, si trazamos una línea horizontal para un período fijo, observamos que ésta cruzaría la curva en dos puntos; esto quiere decir que el acoplo para ese modo se daría en dos longitudes de onda distintas, dando lugar a lo que se conoce como redes de período largo de doble resonancia, que se usan entre otras cosas, para fabricar LPGs de un gran ancho de banda, en caso de que las dos resonancias estén muy cerca la una de la otra [12,13].

3.3.2 Fabricación de las Redes de Período Largo

Teniendo previamente seleccionado el modo de la cubierta que se desea usar y habiendo calculado el valor de la periodicidad Λ_{LPG} correspondiente, se procede a la fabricación de la red. Para la grabación de las redes de período largo se utilizará el método de grabado punto a punto, que consiste básicamente en focalizar el haz UV sobre la fibra y hacer un barrido sobre ésta a dos velocidades distintas; una velocidad “lenta” y otra

“rápida”. Se debe programar una rutina en el software que controla el motor DC para que éste repita de forma indefinida dos pasos sencillos:

- Desplazarse una distancia $\Lambda_{LPG}/2$ con una velocidad “lenta”. De esta forma, el láser se moverá medio período sobre la fibra óptica, causando un incremento en el índice de refracción. Una velocidad típica sería de alrededor de $10 \mu\text{m/s}$
- Desplazarse una distancia $\Lambda_{LPG}/2$ con una velocidad “rápida”. El paso siguiente es que el láser recorra la restante mitad del período Λ_{LPG} lo más pronto posible para así tratar de inducir el mínimo cambio posible de índice de refracción. Típicamente, esta velocidad es de uno o dos órdenes de magnitud mayor a la velocidad lenta. Un valor utilizado de esta velocidad podría ser en torno a los $1500 \mu\text{m/s}$.

Esquemáticamente el proceso de grabado punto a punto sobre una fibra óptica se representa en la Figura 3.3.4:

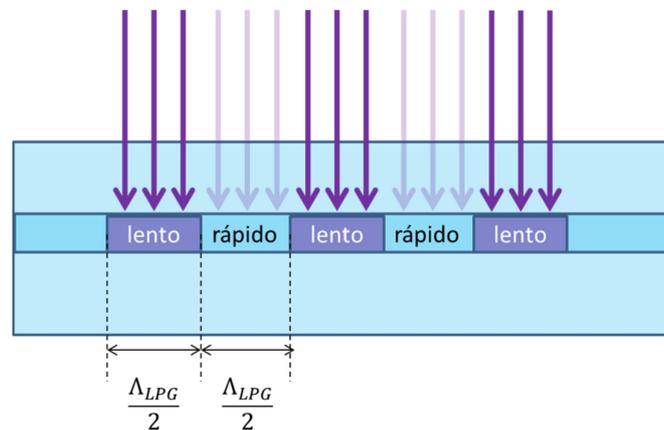


Figura 3.3.4 Grabación de una LPG sobre una fibra óptica por el método punto a punto

Si se repiten los dos pasos mencionados, se puede tener un cambio de índice de refracción periódico a lo largo de un máximo de 20 cm, que es el recorrido total que puede desplazarse el motor. La velocidad “lenta” de grabación se elige en función de qué tan intensa se desea que sea la red. Si se requiere un mayor cambio de índice Δn en la LPG, la densidad de energía (J/cm^2) sobre la fibra deberá ser también mayor en la primera mitad de cada período. Ésto se consigue reduciendo la velocidad lenta de forma que el tiempo de exposición sea mayor. La velocidad “rápida” se elige más libremente, siempre y cuando sea mucho mayor que la velocidad lenta.

El spot del haz focalizado se ha estimado en unos $75 \mu\text{m}$ según la tesis doctoral de D. Sáez-Rodríguez utilizando el mismo montaje que en este trabajo [14], por lo que redes con periodicidades cercanas a ese valor serían imposibles de fabricar sin la utilización de rendijas que limiten su tamaño, de modo que para períodos Λ_{LPG} menores a $150 \mu\text{m}$ (el doble de la anchura del spot) forzosamente se necesita hacer uso de éstas. En el laboratorio

se contaba con rendijas de 50 μm y 25 μm , lo que permitía fabricar LPGs de periodicidades inferiores a 100 μm y 50 μm , respectivamente.

La fabricación de las redes de período largo utilizando rendijas se ilustra en la Figura 3.3.5. Se debe fijar la rendija a un montaje que será desplazado por un motor secundario, y en todo momento debe estar en contacto directo con la fibra. El motor secundario es de marca Physik Instrumente, modelo M-125.10, con una resolución de 59 nm y un recorrido total de 25 mm.

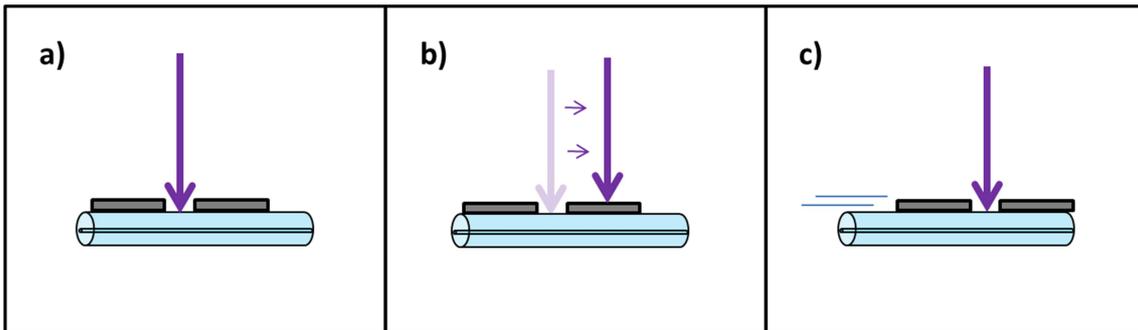


Figura 3.3.5 Grabación punto a punto de una LPG utilizando rendijas. a) El haz láser y la rendija se desplazan una distancia $\Lambda_{LPG}/2$ de forma sincronizada. b) El haz avanza el restante $\Lambda_{LPG}/2$ a alta velocidad mientras que la rendija se detiene para bloquearlo durante éste desplazamiento. c) La rendija se mueve $\Lambda_{LPG}/2$ para quedar centrada de nuevo respecto al haz y poder grabar el siguiente período

Para la grabación con rendija, se debe utilizar una rutina de software que controle a ambos motores de forma que se muevan en sincronía, previa alineación del haz a través de la misma. Éste método ofrece la ventaja de que el haz no incide en la fibra en la segunda mitad de cada período, de forma que el contraste de índice de refracción Δn es mayor.

Con respecto al cambio de índice de refracción Δn , si recordamos las ecuaciones (2.4.25) de las constantes de acoplo, observamos que éstas son directamente proporcionales a $|a_m|$, que corresponden a los coeficientes de la serie de Fourier que definen al cambio de índice Δn . Por ende, mientras mayor sea el cambio de índice (al hacer la velocidad de grabación más lenta), mayores serán también las constantes de acoplo.

El valor de $|\kappa|$ tiene un efecto importante en la longitud de máximo acoplo de la LPG. Reescribiendo la ecuación (2.4.36), tenemos:

$$L_{\max} = \frac{\pi}{2|\kappa|} \quad (3.3.4)$$

Así, mientras mayor sea $|\kappa|$, la condición de acoplo óptimo se alcanzará con una longitud de la LPG menor. Esto tendrá una importante repercusión en el ancho de banda del dispositivo, como se discutirá en el siguiente apartado.

En el caso de las LPGs, es aún más importante monitorizar la evolución de la red conforme se van grabando períodos; el acoplo del modo del núcleo al modo de la cubierta es periódico con respecto a la longitud de la red (ecuación 2.4.33). Si se sobrepasa la longitud de acoplo máximo L_{\max} , la energía que viaja en el modo de la cubierta empieza a acoplarse de nuevo al modo del núcleo, produciendo lo que se conoce como una red sobreacoplada.

Para monitorizar la red, se utiliza el mismo montaje que para hacerlo con una FBG: una fuente de banda ancha, y un Analizador de Espectros Ópticos para observar el acoplo en tiempo real (Figura 3.2.4). En la Figura 3.3.6 se muestra una simulación de la transmisión de una LPG centrada en 1550 nm, conforme su longitud va aumentando desde $0,25L_{\max}$ hasta L_{\max} para una $|\kappa|$ fija. De esta forma se ilustra la evolución de una LPG al grabar más y más períodos hasta alcanzar su condición de acoplo máximo, que es precisamente la situación que se presenta en el laboratorio. Una vez que se ha llegado al acoplo deseado, se bloquea el haz láser y se da por terminado el proceso.

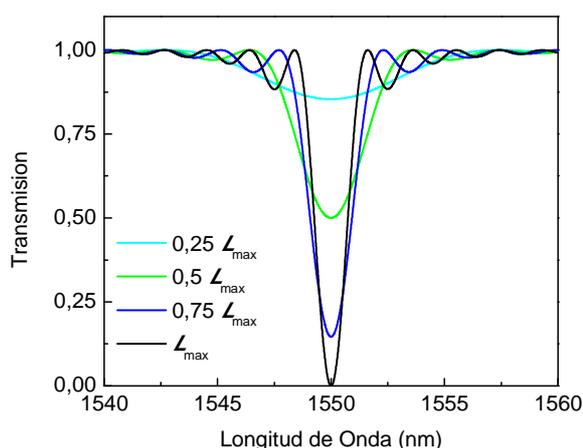


Figura 3.3.6 Evolución de una LPG al aumentar su longitud desde $0,25L_{\max}$ hasta L_{\max} . Si se continuara el proceso de grabación, la red se sobreacoplaría y perdería intensidad

3.3.3 Redes de Período Largo de Ancho de Banda Estrecho

Como comentábamos anteriormente, el módulo de κ determina la longitud de la red para un acoplo máximo. A su vez, L_{\max} repercutirá en el ancho de banda de la red, ya que si recordamos la ecuación (2.4.37), el ancho de banda a 3 dB de una LPG estrecha (con dispersión despreciable) de longitud L y acoplo cercano al óptimo es:

$$\Delta\lambda \approx \frac{0,8 \cdot \lambda_{LPG}^2}{\Delta n_g L} \approx \frac{0,8 \cdot \lambda_{LPG}^2}{(n_{eff,c} - n_{eff,l})L} \quad (3.3.5)$$

Podemos concluir entonces que cuanto mayor sea la constante de acoplo, menor será la longitud de una red óptimamente acoplada, haciendo que en general el ancho de banda aumente. Para el desarrollo de este trabajo, en muchas ocasiones se requirieron LPGs de ancho de banda estrecho, por lo que se utilizaron velocidades de grabación relativamente rápidas con el objetivo de no aumentar demasiado las constantes de acoplo.

Estudiaremos entonces la variación del ancho de banda dado por la ecuación (3.3.5) ante cambios en sus distintos parámetros: la longitud física de la red L , la longitud de onda de resonancia λ_{LPG} y finalmente la diferencia entre índices efectivos (dada fundamentalmente por la apertura numérica). Usaremos para ésto simulaciones de una LPG con los índices efectivos del núcleo y de la cubierta obtenidos experimentalmente de la fibra SM1500(4.2/125) para el modo $LP_{0,18}$, dados por:

$$\begin{aligned} n_{eff,c} &= 1,459170 \\ n_{eff,l} &= 1,429415 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Variación del Ancho de Banda ante distintas longitudes L

Se explorará primero la variación del ancho de banda ante distintas longitudes. Consideraremos 4 redes de distintas longitudes, en donde todas ellas cumplen la condición $\kappa/L = \pi/2$. Esto significa entonces que a cada una le corresponderá una distinta constante de acoplo y por ende un cambio de índice Δn distinto. En la Figura 3.3.7 observamos lo que sucede con el ancho de banda cuando la longitud de óptimo acoplo se incrementa desde los 25 mm hasta los 150 mm, el cual es un rango de longitudes de red perfectamente asequible con el equipo de laboratorio. El cálculo se hizo para un mismo modo y una resonancia λ_{LPG} fija en 1550 nm:

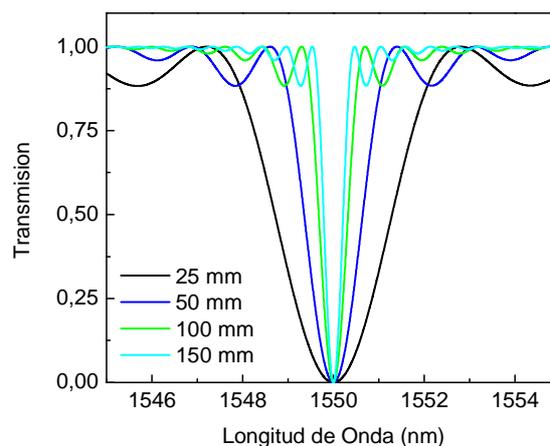


Figura 3.3.7. Variación del ancho de banda de una LPG ante distintas longitudes de acoplo máximo L_{max}

Resumimos los datos sobre ancho de banda y longitud de acoplo máxima para las LPGs simuladas de la Figura 3.3.7 en la Tabla 3.3.2. Se muestra también una estimación del cambio de índice que debe tener la LPG para cada longitud. Dicha estimación considera que el valor de un factor dependiente de las integrales de acoplo entre el modo del núcleo y el modo de la cubierta (que denotaremos como ζ) es igual a 1, aunque normalmente éste valor siempre cumple que $0 < \zeta < 1$, por lo que el valor calculado es una cota superior de Δn .

Tabla 3.3.2. Ancho de banda y estimación de cambio de índice de refracción para distintas L_{max}

L_{max} (mm)	$\Delta n * \zeta$	$\Delta \lambda$ a 3 dB (nm)
25	$6,13 \times 10^{-5}$	2,58
50	$3,07 \times 10^{-5}$	1,29
100	$1,53 \times 10^{-5}$	0,65
150	$1,02 \times 10^{-5}$	0,43

Los datos calculados a partir de la simulación evidencian que al aumentar la longitud L_{max} , necesariamente requeriremos de un cambio de índice más pequeño para así tener un acoplo óptimo y poder cumplir $|\kappa|L_{max} = \pi/2$. Por lo tanto, en el laboratorio el camino a seguir para obtener LPGs espectralmente estrechas fue utilizar tiempos de exposición más cortos sobre las fibras, junto con una lente cilíndrica para distribuir la energía del haz en una línea y no en un sólo punto. De esta forma, se logra que el cambio de índice no sea tan intenso, por lo que el valor de $|\kappa|$ disminuye y permite que la L sea mayor. Una mayor longitud de red es deseable ya que se logra reducir el ancho de banda según la ecuación 3.3.5.

En la Figura 3.3.8 se muestran dos espectros obtenidos de LPGs fabricadas con distinta longitud en fibra SM1500(4.2/125) con acoplo al modo $LP_{0,18}$ en una longitud de onda próxima a 1530 nm. Ambas cumplen una condición cercana al acoplo máximo, y fueron grabadas con una potencia del haz UV similar, con periodicidad de red de 51 μm . La diferencia está en la velocidad de grabado: la 3.3.8-a fue grabada a 1,68 $\mu\text{m/s}$ (velocidad “lenta”) ante las 6,72 $\mu\text{m/s}$ de la 3.3.8-b. Como consecuencia, la que fue grabada a mayor velocidad tendrá una mayor longitud (por la constante de acoplo reducida), y un menor ancho de banda. Las longitudes son de 110 mm y 197 mm, y un ancho de banda a 3 dB de 1,41 nm y 1,08 nm respectivamente. La discrepancia entre los valores obtenidos experimentalmente y los de la Tabla 3.3.2 para longitudes mayores a 100 mm se debe probablemente a la introducción de chirp en el período de la LPG, el cual tiene un efecto de ensanchamiento del espectro.

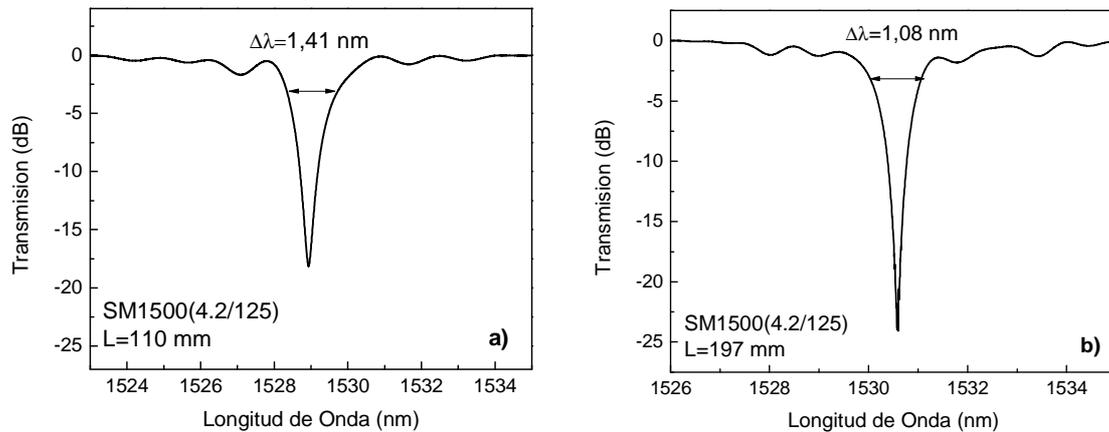


Figura 3.3.8. Efecto de la longitud en el ancho de banda de una red de período largo a) LPG de 110 mm de longitud y b) LPG de 197 mm.

Variación del Ancho de Banda ante distintas longitudes de onda λ_{LPG}

Por otro lado, el ancho de banda también depende de la longitud de onda λ_{LPG} a la que se ha diseñado el dispositivo. Supongamos que hemos fabricado una LPG de 10 mm de longitud para acoplo máximo a 1550 nm, y queremos fabricar otras LPGs de la misma longitud física, pero que tengan su resonancia a longitudes de onda más largas. Para lograrlo, lo que debemos hacer es incrementar el período de la red, según la ecuación (3.3.3).

Manteniendo una variación de índice de refracción constante (un mismo tiempo de exposición de la fibra al láser en cada período) y respetando la longitud de 10 mm, lo que obtendríamos al incrementar el período Λ_{LPG} se representa en la Figura 3.3.9. Se ha utilizado escala logarítmica para visualizar mejor el efecto:

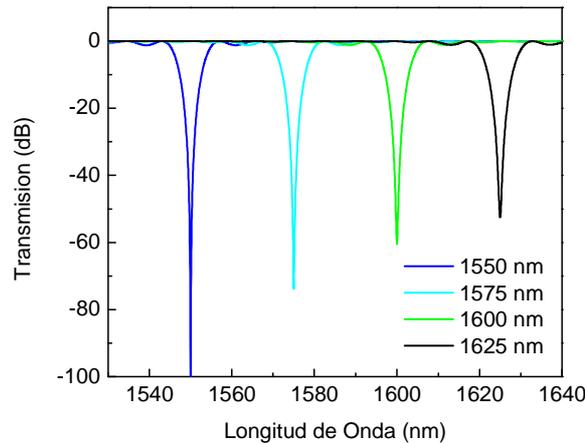


Figura 3.3.9. Variación del acoplo y el ancho de banda ante un cambio en λ_{LPG} utilizando cambio de índice y longitud constantes

Observamos entonces que las redes con resonancias a longitudes de onda más largas no llegan a su máximo acoplo debido a que se ha mantenido la longitud de la red constante sin cambiar la constante de acoplo, por lo que no se cumple $|\kappa|L_{max}=\pi/2$. Además, el ancho de banda se va incrementando como consecuencia de no estar óptimamente acopladas. En la Tabla 3.3.3 se resumen los datos de la simulación de la Figura 3.3.9. Nótese que $\Delta\lambda$ escala con el cuadrado de λ_{LPG} , como lo indica la ecuación (3.3.5).

Tabla 3.3.3. Ancho de banda y variación de la periodicidad ante distintas λ_{LPG} para una longitud de red fija

λ_{LPG} (nm)	Λ_{LPG} (μm)	Transmisión (dB)	$\Delta\lambda$ a 3 dB (nm)
1550	52,09	$-\infty$	6,46
1575	52,93	-75	6,67
1600	53,77	-60	6,88
1625	54,61	-52	7,1

En numerosas ocasiones fue necesario ajustar ligeramente la periodicidad de la LPG para poder variar la longitud de onda de resonancia λ_{LPG} . Se verá con especial atención en los experimentos de derivación fraccional la importancia de obtener la resonancia en el sitio adecuado. Como un ejemplo de la variación de la longitud de onda con la periodicidad de la red, ponemos el caso de dos LPGs grabadas en fibra PS980 bajo las mismas condiciones de potencia del haz UV y velocidad de grabado, pero variando únicamente el período de 194 μm a 195 μm . En este caso se está acoplando la luz del modo fundamental al modo $LP_{0,7}$. Los espectros de ambas LPGs se muestran en la Figura 3.3.10. Los anchos de banda son de 8,11 nm para la LPG centrada en 1030 nm, y de 9,66 nm para la que se encuentra en 1046,51 nm.

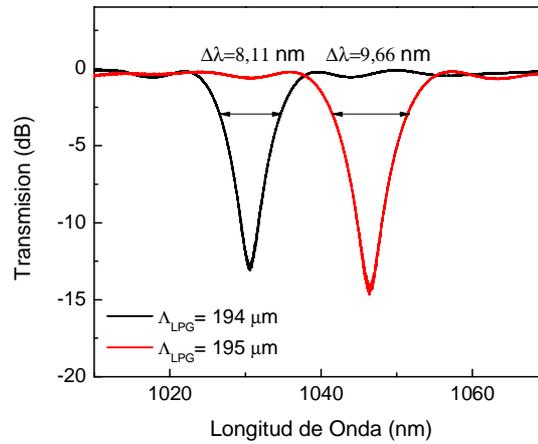


Figura 3.3.10. Variación de la longitud de onda de resonancia de una LPG en fibra PS980 para el modo LP_{0,7}. Una variación de 1 μm se traduce en un desplazamiento de 15,67 nm para este modo en particular

Variación del Ancho de Banda ante la diferencia entre índices efectivos ($n_{eff,c} - n_{eff,l}$) debido al tipo de fibra

Finalmente exploraremos el efecto de variar la diferencia entre los índices efectivos del modo fundamental y del modo de la cubierta. Para eso, estudiaremos los índices efectivos de tres tipos distintos de fibras utilizadas para fabricar redes de período largo en la zona de 1550 nm: la Fibercore PS1250/1500, Fibercore SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125). Las tres poseen distintos valores de apertura numérica (N.A.), dada por la siguiente ecuación [15]:

$$N.A. = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.3.7)$$

donde n_1 es el índice de refracción de la sílice dopada del núcleo, n_2 el índice de la sílice de la cubierta y n_0 es el índice de refracción del medio alrededor de la fibra (generalmente aire). La apertura numérica nos permite conocer la medida del ángulo máximo de aceptación para que la luz incidente pueda ser guiada por el modo fundamental, así como del grado de confinamiento que ésta tendrá en el núcleo.

Debido a que estamos usando modos guiados, los índices efectivos deben cumplir con las siguientes desigualdades respecto a los índices de los materiales que conforman la fibra:

$$\begin{aligned} n_2 &< n_{eff,c} < n_1 \\ n_0 &< n_{eff,l} < n_2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

En fibras de apertura numérica alta, habrá una mayor diferencia entre el índice efectivo del núcleo y los índices efectivos de la cubierta en comparación a las fibras con una N.A. baja, debido a una mayor cantidad de óxido de germanio con el que se dopa el núcleo. Por lo tanto, según la ecuación (3.3.5), mientras mayor sea la apertura numérica, el ancho de banda de las LPGs se verá reducido. La longitud de onda de corte tiene un efecto menos relevante en los índices efectivos para las fibras estudiadas.

De forma análoga a como se obtuvieron los índices efectivos de la fibra Fibercore PS980 para la zona de 1060 nm, se grabaron redes de Bragg intensas en los tres tipos de fibra diseñadas para 1550 nm. En esta ocasión se utilizó una máscara de fase con periodicidad de $\Lambda_{mask} = 1067$ nm para obtener la longitud de onda de Bragg en la vecindad de 1550 nm. Los espectros de las redes de Bragg se muestran en la Figura 3.3.11.

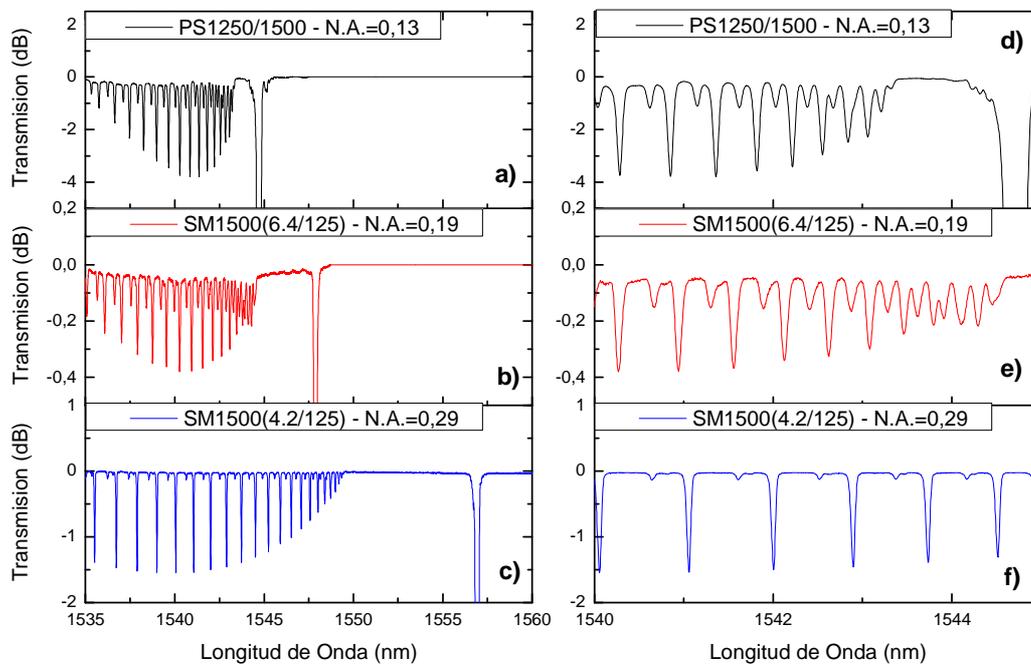


Figura 3.3.11. Redes de Bragg grabadas con una máscara de fase de 1067 nm en las fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125). a-c) Observamos el desplazamiento de λ_{Bragg} y la mayor distancia entre ésta y las resonancias de la cubierta debido al aumento de la N.A. d-f) Detalle de las resonancias de la cubierta y su mayor espaciamiento entre resonancias debido al incremento de la N.A.

Podemos observar entonces varias consecuencias en la estructura modal gracias al incremento de la apertura numérica. En los recuadros a-c de la Figura 3.3.11 se nota un desplazamiento de λ_{Bragg} hacia longitudes de onda más largas como consecuencia del incremento del índice efectivo del modo fundamental. Además, en los recuadros d-f observamos un mayor espaciamiento entre las resonancias a modos de la cubierta, ya que la diferencia entre los índices efectivos de éstos se hace mayor. Esto indica que los índices efectivos crecen con la apertura numérica a pesar de que las fibras tienen longitudes de onda de corte progresivamente mayores de la gráfica a) hasta la c). Se pueden apreciar también unas pequeñas resonancias en medio de los acoplos a los modos $LP_{0,n}$; estos son acoplos indeseados a modos asimétricos del tipo $LP_{1,n}$ que se producen debido a que el cambio de índice de refracción al fabricar la red no es uniforme en la sección transversal de la fibra.

En la Tabla 3.3.4. se indican los valores de los índices efectivos calculados tanto para el modo fundamental como para los modos de la cubierta que se visualizaron para las fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125). La cantidad de modos considerados en las fibras PS1250/1500 y SM1500(6.4/125) es menor debido a que a partir de cierto orden, el acoplo de éstos comenzaba a hacerse demasiado pequeño como para que fuera razonable tomarlos en cuenta.

Tabla 3.3.4 Índices efectivos de los modos $LP_{0,n}$ para fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) en la zona de 1550 nm

Orden del Modo	Índice Efectivo		
	PS1250/1500 (N.A.=0,13)	SM1500(6.4/125) (N.A.=0,19)	SM1500(4.2/125) (N.A.=0,29)
LP _{0,1}	1,447722	1,450676	1,459170
LP _{0,2}	1,445091	1,444275	1,445108
LP _{0,3}	1,444889	1,443615	1,444943
LP _{0,4}	1,444611	1,443038	1,444658
LP _{0,5}	1,444199	1,442415	1,444283
LP _{0,6}	1,443659	1,441696	1,443780
LP _{0,7}	1,443029	1,440841	1,443173
LP _{0,8}	1,442287	1,439904	1,442461
LP _{0,9}	1,441425	1,438839	1,441629
LP _{0,10}	1,440473	1,437692	1,440699
LP _{0,11}	1,439408	1,436425	1,439657
LP _{0,12}	1,438238	1,435053	1,438510
LP _{0,13}	1,436971	1,433591	1,437257
LP _{0,14}	1,435607	1,432016	1,435893
LP _{0,15}	1,434137	1,430344	1,434431
LP _{0,16}	1,432585	1,428575	1,432864
LP _{0,17}	1,430921	1,426693	1,431184
LP _{0,18}	1,429174	1,424721	1,429415
LP _{0,19}	1,427314	--	1,427533
LP _{0,20}	1,425380	--	1,425554
LP _{0,21}	--	--	1,423477
LP _{0,22}	--	--	1,421302
LP _{0,23}	--	--	1,419031
LP _{0,24}	--	--	1,416654
LP _{0,25}	--	--	1,414187
LP _{0,26}	--	--	1,411623
LP _{0,27}	--	--	1,408969
LP _{0,28}	--	--	1,406232
LP _{0,29}	--	--	1,403398
LP _{0,30}	--	--	1,400481

Obsérvese en primera instancia los valores de las aperturas numéricas de cada fibra. Las fibras de telecomunicaciones estándar como la SMF-28 poseen una N.A. de 0,14, por lo que la única que posee un valor comparable es la fibra PS1250/1500. Conforme aumenta la apertura numérica, notamos un incremento del orden de 1×10^{-3} del índice efectivo del modo $LP_{0,1}$ (es decir, el $n_{eff,c}$). En la Figura 3.3.12, representamos la diferencia entre el índice del modo $n_{eff,c}$ con respecto a los demás modos LP, que corresponden a modos de la cubierta (índices $n_{eff,l}$), ya que es este dato es el que es verdaderamente relevante a la hora de estimar el ancho de banda de una LPG.

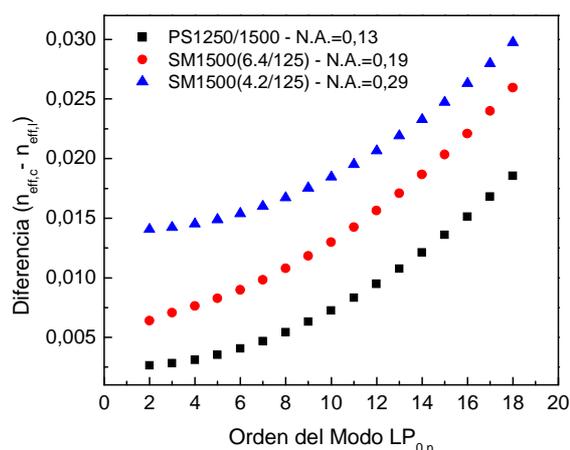


Figura 3.3.12 Diferencia entre el índice efectivo del modo fundamental $n_{eff,c}$ y los modos de la cubierta $n_{eff,l}$ para las fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125)

Tal y como observamos en la Figura 3.3.12, claramente la apertura numérica de la fibra influye en la diferencia entre índices efectivos. Esto tendrá entonces consecuencias en la periodicidad de la LPG necesaria para trasvasar la energía a una longitud de onda deseada (ecuación 3.3.3) y también en su ancho de banda (ecuación 3.3.5). En la Tabla 3.3.5 se muestran los valores de la periodicidad en μm para obtener una red a $\lambda_{LPG} = 1550$ nm, para los primeros modos de la cubierta de las fibras en cuestión.

Tabla 3.3.5. Periodicidades de una LPG capaz de acoplar la luz a 1550 nm del modo del núcleo a los modos de la cubierta para fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125)

Orden del Modo	Periodicidad Λ_{LPG} para acoplar a 1550 nm (μm)		
	PS1250/1500 (N.A.=0,13)	SM1500(6.4/125) (N.A.=0,19)	SM1500(4.2/125) (N.A.=0,29)
LP _{0,1}			
LP _{0,2}	589,179	242,142	110,222
LP _{0,3}	547,082	219,516	108,944
LP _{0,4}	498,292	202,924	106,806
LP _{0,5}	439,966	187,637	104,116
LP _{0,6}	381,507	172,598	100,718
LP _{0,7}	330,305	157,598	96,894
LP _{0,8}	285,194	143,887	92,766
LP _{0,9}	246,144	130,945	88,362
LP _{0,10}	213,813	119,376	83,915
LP _{0,11}	186,432	108,762	79,433
LP _{0,12}	163,439	99,211	75,023
LP _{0,13}	144,176	90,721	70,736
LP _{0,14}	127,937	83,066	66,589
LP _{0,15}	114,096	76,235	62,654
LP _{0,16}	102,399	70,132	58,922
LP _{0,17}	92,255	64,629	55,385
LP _{0,18}	83,566	59,719	52,092
LP _{0,19}	75,952	--	48,993
LP _{0,20}	69,376	--	46,109
LP _{0,21}	--	--	43,426
LP _{0,22}	--	--	40,932
LP _{0,23}	--	--	38,616
LP _{0,24}	--	--	36,457
LP _{0,25}	--	--	34,458
LP _{0,26}	--	--	32,599
LP _{0,27}	--	--	30,876
LP _{0,28}	--	--	29,280
LP _{0,29}	--	--	27,792
LP _{0,30}	--	--	26,410

Podemos corroborar lo que se observó también para las periodicidades de las LPGs en fibra PS980: conforme elegimos modos de la cubierta de más alto orden, las periodicidades necesarias deben reducirse. Por este motivo, si se desea acoplar a modos altos, es usual que se deban emplear rendijas para limitar el spot del haz láser. Además, el efecto de la apertura numérica es evidente: para fibras de aperturas numéricas más altas, los períodos de las LPGs tenderán también a reducirse de forma considerable.

En la Figura 3.3.13 se muestra el espectro en transmisión de una LPG grabada en fibra PS980, con $\Lambda_{LPG} = 450,9 \mu\text{m}$. Esta red fue fabricada para tener un acoplo óptimo en la zona de 1550 nm al modo $LP_{0,6}$ de la cubierta. A longitudes de onda más cortas se observan acoplos de menor intensidad correspondientes a modos de menor orden. En el caso de las LPGs, los modos se enumeran de forma creciente conforme aumenta la longitud de onda; esto es, de forma inversa a como se hace en las redes de Bragg. Este cambio de orden se debe a que la dirección de la onda que se acopla al modo de la cubierta es copropagante en el caso de las LPGs. Debido a que los índices efectivos $n_{eff,l}$ son cada vez menores al aumentar el orden del modo, la ecuación (3.3.3) predice que las resonancias estarán a longitudes de onda cada vez mayores.

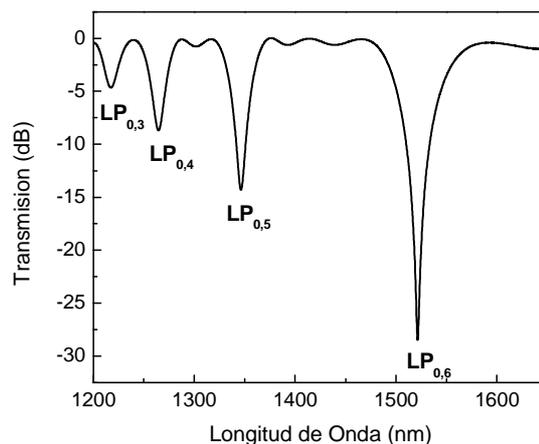


Figura 3.3.13. Espectro de una LPG en fibra PS980 diseñada para un acoplo óptimo al modo $LP_{0,6}$ en la zona de 1550 nm. Se muestran además acoplos de menor intensidad a otros modos de más bajo orden

Nótese también en la Figura 3.3.13 que el ancho de banda de las resonancias se estrecha conforme reducimos el orden del modo. Esto se debe a que la dependencia cuadrática del ancho de banda respecto a la longitud de onda de resonancia λ_{LPG} tiene mayor peso a la hora de determinar el ancho de banda (ecuación 3.3.5) que la diferencia entre los índices efectivos.

Continuaremos nuestro análisis estudiando el ancho de banda para los distintos modos, ante una longitud de la LPG constante, y con una longitud de onda de resonancia a 1550 nm. En la Tabla 3.3.6 se muestran los anchos de banda a 3 dB calculados a partir de la

ecuación (3.3.5), con una longitud de red fija de 100 mm para los tres tipos de fibra diseñadas para operar en 1550 nm.

Tabla 3.3.6. Ancho de banda a 3 dB para una LPG centrada a 1550 nm y con longitud fija de 100 mm, para distintos modos en fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125)

Orden del Modo	Ancho de Banda a 3 dB (nm)		
	PS1250/1500 (N.A.=0,13)	SM1500(6.4/125) (N.A.=0,19)	SM1500(4.2/125) (N.A.=0,29)
LP _{0,1}			
LP _{0,2}	7,305	3,003	1,367
LP _{0,3}	6,784	2,722	1,351
LP _{0,4}	6,178	2,516	1,324
LP _{0,5}	5,456	2,327	1,291
LP _{0,6}	4,730	2,140	1,249
LP _{0,7}	4,095	1,954	1,201
LP _{0,8}	3,536	1,784	1,150
LP _{0,9}	3,052	1,624	1,096
LP _{0,10}	2,651	1,480	1,041
LP _{0,11}	2,312	1,349	0,985
LP _{0,12}	2,027	1,230	0,930
LP _{0,13}	1,788	1,125	0,877
LP _{0,14}	1,586	1,030	0,826
LP _{0,15}	1,415	0,945	0,777
LP _{0,16}	1,270	0,870	0,731
LP _{0,17}	1,144	0,801	0,687
LP _{0,18}	1,036	0,741	0,646
LP _{0,19}	0,942	--	0,608
LP _{0,20}	0,860	--	0,572
LP _{0,21}	--	--	0,538
LP _{0,22}	--	--	0,508
LP _{0,23}	--	--	0,479
LP _{0,24}	--	--	0,452
LP _{0,25}	--	--	0,427
LP _{0,26}	--	--	0,404
LP _{0,27}	--	--	0,383
LP _{0,28}	--	--	0,363
LP _{0,29}	--	--	0,345
LP _{0,30}	--	--	0,327

Existe una discrepancia entre los valores del ancho de banda para el modo $LP_{0,18}$ de la Tabla 3.3.6 respecto al de la Tabla 3.3.2 se debe al factor ζ de solapamiento de campos. Representamos de forma gráfica la información proporcionada en la Tabla 3.3.6 en la Figura 3.3.14 para los primeros 17 modos de las tres fibras:

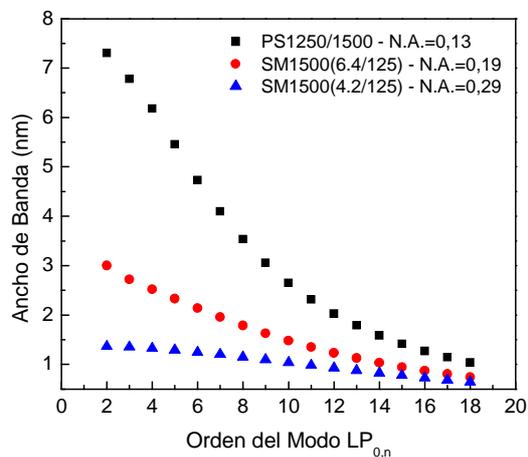


Figura 3.3.14. Anchos de banda para acoplo a 1550 nm en distintos modos de la cubierta, usando una longitud de red constante para fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125)

En los casos en que se pretendió obtener redes de período largo con anchos de banda muy estrechos (cercanos a 1 nm en la zona de 1550 nm), fue necesario hacer uso de las fibras ópticas con apertura numérica alta. En particular, la SM1500(4.2/125) fue la que dio los mejores resultados debido a su gran apertura numérica. Además, como bien lo muestra la Figura 3.3.14, mientras más alto sea el modo en una fibra determinada, más estrecho será el espectro de la red; ésto debido a que la diferencia entre índices efectivos se hace cada vez mayor.

En la Figura 3.3.15 se muestra una representación del acoplo normalizado de los modos de la cubierta de las tres fibras que se han analizado, obtenido de los espectros de la Figura 3.3.11.

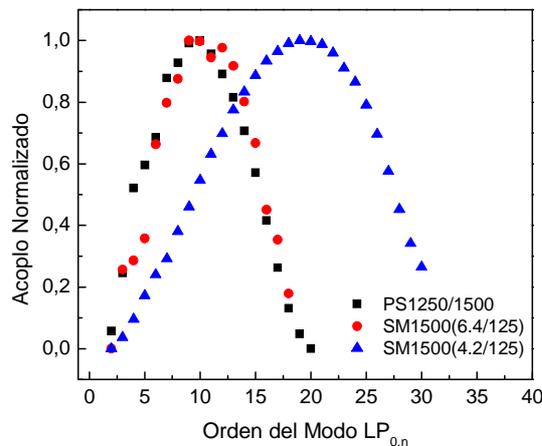


Figura 3.3.15 Acoplamiento normalizado de los modos de la cubierta para las fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) en la zona de 1550 nm

Obsérvese en la Figura 3.3.15 que conforme aumenta la apertura numérica de la fibra, los modos de la cubierta con mayor acoplamiento se van desplazando hacia órdenes más altos. En el caso de la Fibra PS1250/1500 y SM1500(6.4/125), los modos de mayor acoplamiento son del orden 8-10, mientras que en el caso de la SM1500(4.2/125), éstos se ven desplazados hasta órdenes cercanos al 18. Un mayor acoplamiento a modos de orden alto hacen a ésta última fibra la candidata ideal para fabricar redes de ancho espectral reducido. Por otro lado, en la referencia [14], se determina que para la fibra PS1250/1500 no es posible un acoplamiento en 1550 nm a modos de orden mayor a los de máximo acoplamiento, gracias a un comportamiento modal similar al ilustrado en la Figura 3.3.3-b. Debido al punto de retorno por dispersión, los modos útiles para fabricar LPGs de reducido ancho de banda a 1550 nm son los modos de orden menor a 10 para la PS1250/1500, menor a 12 para la SM1500(6.4/125) y menor a 20 para la SM1500(4.2/125) [16].

En la Figura 3.3.16 se muestran los espectros de las LPGs espectralmente más estrechas que fueron posibles de fabricar para las fibras PS1250/1500, SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125), todas dentro de la banda C de telecomunicaciones. Se acopló la energía del modo fundamental al modo $LP_{0,8}$ en el caso de la fibra PS1250/1500, al $LP_{0,9}$ para la SM1500(6.4/125), y al $LP_{0,18}$ en la SM1500(4.2/125). Dentro de cada recuadro se muestran además las periodicidades y las longitudes de las redes en cada caso.

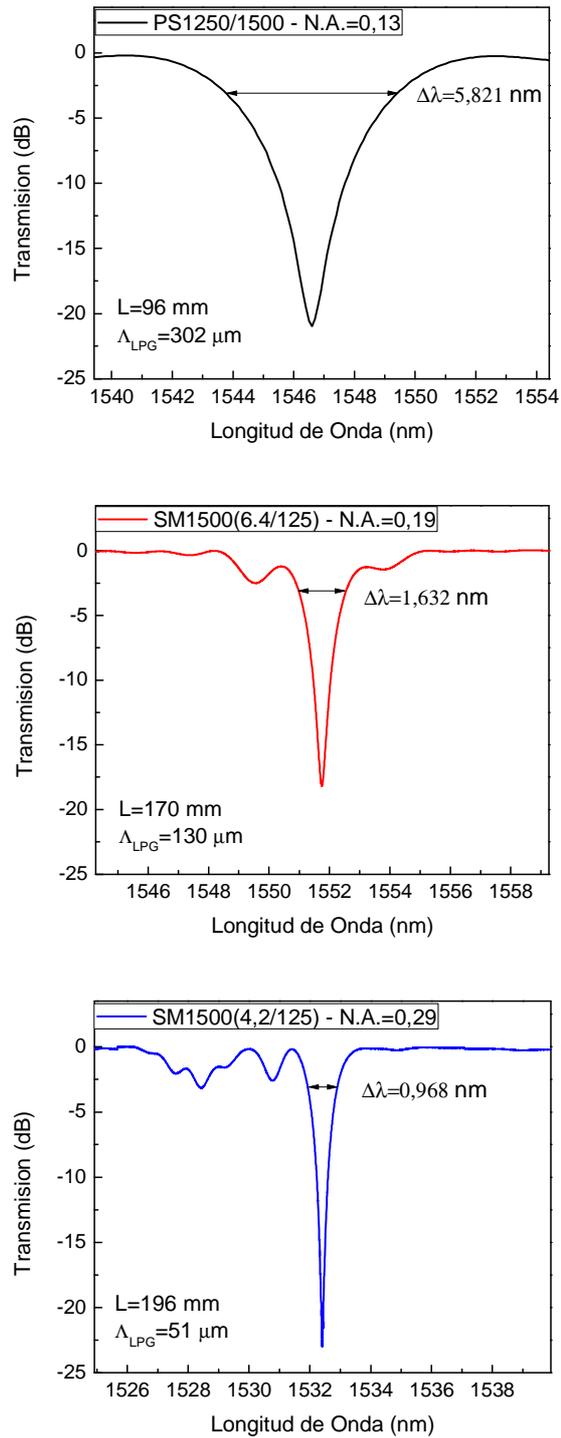


Figura 3.3.16. Redes de período largo de ancho de banda estrecho construidas en la zona de 1550 nm. Las irregularidades en los espectros de las LPGs en las fibras de apertura numérica alta se deben a la mayor sensibilidad a las condiciones de fabricación.

Para fabricar las LPGs espectralmente estrechas acoplado a modos altos en las fibras SM1500(6.4/125) y la SM1500(4.2/125), se tuvo que utilizar el método de punto a punto mostrado en la Figura 3.3.4, eligiendo velocidades de grabado relativamente altas para no incrementar demasiado la constante de acoplo y consecuentemente lograr conseguir redes de mayor longitud. Las no uniformidades alrededor de la resonancia (Figura 3.3.16) son producto de problemas de alineación del haz UV al ser la longitud de barrido inusualmente grande, a variaciones de temperatura en el laboratorio y a las no uniformidades en la fibra [17].

Se tuvo que realizar además una ligera modificación en el montaje de grabación de redes, ya que los períodos eran más pequeños que el spot del haz focalizado ($75\ \mu\text{m}$), por lo que se tuvo que sujetar una rendija de $25\ \mu\text{m}$ mediante una pieza metálica que estuviera atornillada a la plataforma que desplazaba el haz. Esto se ilustra en la Figura 3.3.17.

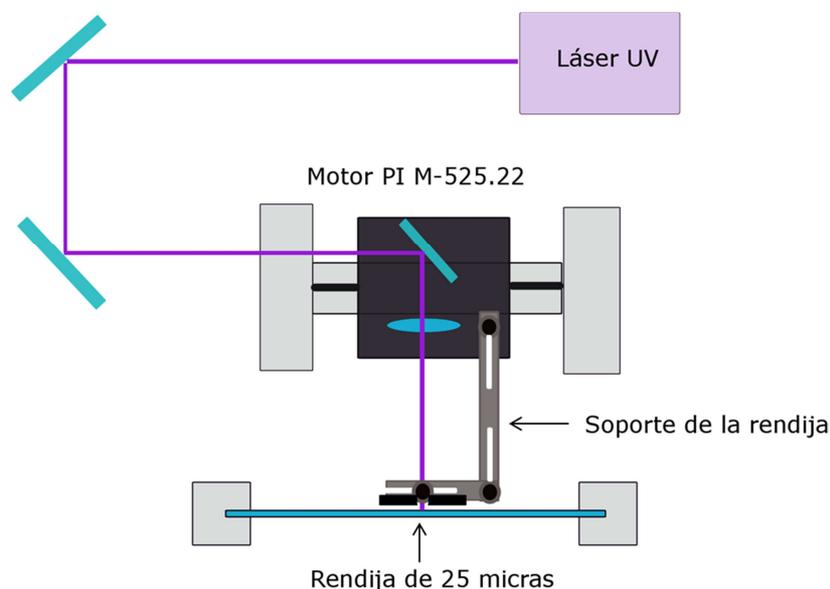


Figura 3.3.17. Modificación del esquema de grabación de punto a punto para LPGs espectralmente estrechas. Se usa un soporte metálico atornillado a la plataforma móvil para que la rendija limite el spot del haz láser conforme éste se desplaza

En la Figura 3.3.8 se mostraron dos espectros de LPGs estrechas que precisamente fueron fabricadas con ésta modificación. En particular, el espectro en 3.3.8-b muestra la LPG de mejores características que fue posible construir, con un ancho de banda de $1,08\ \text{nm}$ a 3 dB, y fabricada sobre fibra SM1500(4.2/125). El período de la red es $\Lambda_{LPG}=51\ \mu\text{m}$ y su longitud $L=197\ \text{mm}$. El acoplo corresponde al modo $LP_{0,18}$ de la cubierta, como anteriormente lo mencionamos.

Un detalle de vital importancia a la hora de grabar una LPG estrecha es tener en cuenta la polarización de la fuente que se usa para monitorizarla. Debido a que las fibras

ópticas siempre tienen un cierto grado de asimetría en su núcleo, existen dos ejes de polarización con índices efectivos distintos, o lo que es lo mismo, la fibra posee birrefringencia. Por lo tanto, hay que asegurarse de que la fuente esté polarizada y que se controle la polarización de entrada a la red, tal y como lo muestra la Figura 3.3.18:

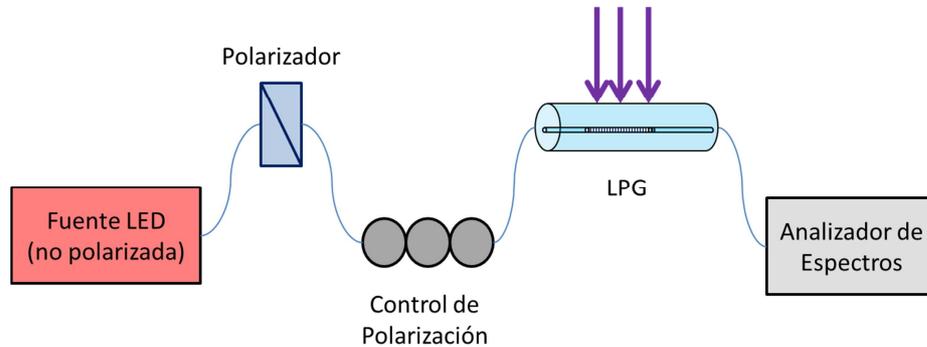


Figura 3.3.18 Montaje experimental para grabar LPGs de ancho de banda estrecho. La polarización se debe ajustar para introducir la luz a un único eje de la fibra

Como decíamos, debido a la birrefringencia residual de la fibra, existirán dos polarizaciones con índices efectivos ligeramente distintos, por lo que la longitud de onda de sus resonancias será también diferente. Si a la hora de grabar la LPG no se es cuidadoso y se usa luz que posea componentes de ambas polarizaciones, se verán dos resonancias al mismo tiempo, pero la evolución de ambas no se observará de forma correcta en el OSA. Ambas resonancias se diferencian solamente en su posición en longitud de onda, ya que el ancho de banda y el acoplo es muy semejante.

A modo de ejemplo, en la Figura 3.3.19 se muestran las dos polarizaciones de una LPG grabada en fibra SM1500(4.2/125) con período de $51,3 \mu\text{m}$ y $1,31 \text{ nm}$ de ancho de banda acoplando al modo $\text{LP}_{0,18}$ de la cubierta. La diferencia de longitud de onda entre ambas resonancias es aproximadamente 1 nm , que es del mismo orden que el ancho de banda, por lo que recalamos lo importante que resulta el manejo de la polarización en este tipo de fibras.

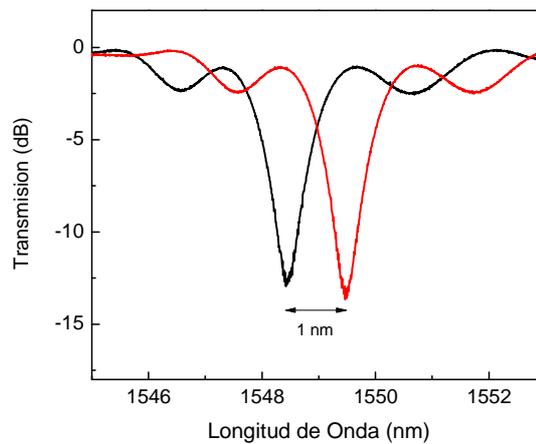


Figura 3.3.19. Efecto de la birrefringencia de la fibra óptica en una LPG en fibra SM1500(4.2/125). Se observan dos resonancias distintas, una para cada eje propio.

Las aplicaciones de estas redes en experimentos concretos necesitan de un conocimiento de su estabilidad térmica y su respuesta ante tensiones mecánicas para tenerlas completamente caracterizadas. Por otro lado, el que dichas redes posean un estrecho ancho de banda permite que puedan ser empleadas como sensores de magnitudes físicas compatibles con WDM (Wavelength Division Multiplexing). En la siguiente sección se muestran los resultados de algunas de las pruebas hechas con LPGs espectralmente estrechas ante variaciones en temperatura, tensión mecánica e índice de refracción externo.

3.4 Respuesta de LPGs de Ancho de Banda Estrecho ante Temperatura, Tensión Axial e Índice de Refracción

Como es bien conocido, las redes de difracción pueden actuar como sensores de variables físicas. En particular, la sensibilidad de la redes de período largo (LPGs) ante variables de su entorno dependerá de su periodicidad, del modo de la cubierta con el cual se está trabajando y de los materiales utilizados para fabricar la fibra [11].

Los sensores basados en redes de período largo ofrecen ciertas ventajas sobre aquellos que son basados en redes de Bragg. La primera es que dependiendo de la fibra óptica y del modo de la cubierta utilizado, los sensores a partir de LPGs pueden ofrecer sensibilidades de temperatura o de tensión axial mucho mayores [18].

Otra de las áreas en donde los sensores basados en LPGs superan a los de FBGs es en la medición de índice de refracción. Como discutíamos anteriormente, los índices efectivos de los modos de la cubierta dependen del índice de refracción del entorno de la fibra, por lo que necesariamente un cambio en el índice externo de la LPG repercutirá no

sólo en la longitud de onda de las resonancias para cada modo de la cubierta, sino que además modificará su acoplo.

En este trabajo se estudió la respuesta de uno de los modos de la cubierta para las fibras SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125), que son las que dieron mejores resultados a la hora de fabricar LPGs espectralmente estrechas en la banda de 1530 nm – 1560 nm. Iniciaremos con la respuesta ante temperatura.

3.4.1 Respuesta ante Temperatura

El cambio de la longitud de onda de resonancia de una red de período largo ante la temperatura está gobernada por la siguiente ecuación [11]:

$$\frac{d\lambda_{LPG}}{dT} = \frac{d\lambda_{LPG}}{d(\delta n_{eff})} \left[\frac{dn_{eff,c}}{dT} - \frac{dn_{eff,l}}{dT} \right] + \Lambda_{LPG} \frac{d\lambda_{LPG}}{d\Lambda_{LPG}} \cdot \alpha \quad (3.4.1)$$

Siendo $\delta n_{eff} = n_{eff,c} - n_{eff,l}$ la diferencia de índices efectivos entre el modo fundamental y el modo de la cubierta en cuestión, y α es el coeficiente de expansión térmica de la sílice.

Observamos que la ecuación (3.4.1) posee dos términos. El primero depende de la composición de la fibra y de su guiado, de manera que el efecto termo-óptico es el responsable de modificar los índices efectivos tanto del núcleo como de la cubierta. El segundo término depende del cambio de la longitud de la red con la temperatura, y del cambio de la longitud de onda de resonancia ante un cambio en la longitud de la red debido a α . Un ejemplo de la variación de la longitud de onda de resonancia ante cambios en la periodicidad se mostró en la Figura 3.3.10.

Normalmente, para periodicidades altas ($\Lambda_{LPG} > 100 \mu\text{m}$) el efecto dominante es el de la temperatura en los índices efectivos, mientras que para periodicidades pequeñas ($\Lambda_{LPG} < 100 \mu\text{m}$), es el término de la variación de la periodicidad el que tiene un mayor peso [11]. Esto quiere decir que conforme se utilicen modos más altos (menor periodicidad), el efecto termo-óptico en la composición de los materiales que forman la fibra se hace menos notorio.

Resulta muy interesante el hecho de que tanto el término que depende del material como el de la periodicidad pueden ser positivos o negativos (ecuación 3.4.1). Si repasamos la Figura 3.3.3, existen modos (por ejemplo los modos 18 al 21) donde la razón de cambio $d\lambda_{LPG}/d\Lambda_{LPG}$ cambia de signo para distintas regiones del espectro. Esto indica que eligiendo un modo con un $d\lambda_{LPG}/d\Lambda_{LPG}$ del signo adecuado, y bajo un cierto diseño de los parámetros constructivos de la fibra, es perfectamente posible fabricar LPGs en donde los

dos términos de la ecuación (3.4.1) se anulen entre sí, y se obtenga una resonancia insensible a la temperatura [11]. De forma inversa, el diseño puede hacerse para que ambas contribuciones se refuercen y se obtenga una resonancia de gran sensibilidad.

Para los experimentos de temperatura, se utilizaron LPGs en dos tipos de fibra de alta apertura numérica. En la Tabla 3.4.1 se muestran sus características, y los espectros de ambas redes se muestran en la Figura 3.4.1.

Tabla 3.4.1. Características de LPGs utilizadas para pruebas de temperatura

Fibra	Modo	Λ_{LPG} (μm)	λ_{LPG} (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	L (mm)
SM1500(4.2/125)	LP _{0,18}	51	1545,93	2,48	53,7
SM1500(6.4/125)	LP _{0,9}	130	1551,76	1,61	169,8

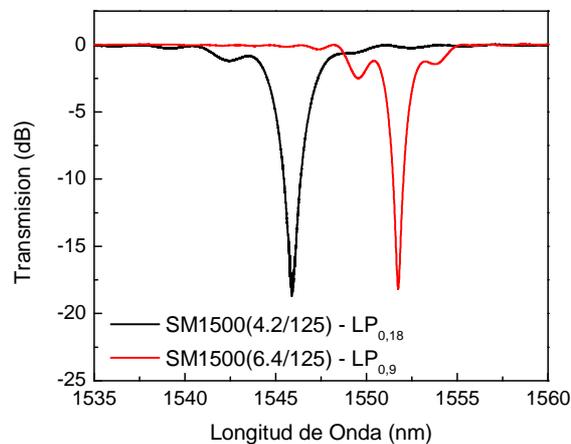


Figura 3.4.1. Redes de período largo en fibras SM1500(4.2/125) y SM1500(6.4/125) en la zona de 1550 nm grabadas para pruebas de temperatura

Para realizar los experimentos, se introdujeron las fibras en un horno de marca WTC Binder a 80°C durante aproximadamente 12 horas. Las fibras estaban montadas sobre una placa aluminio y sujetadas solamente por un extremo para evitar la influencia de la expansión térmica de la placa. Además, se colocó un termómetro de alcohol a la par de la LPG para medir la temperatura lo más cerca posible de ésta. Para monitorizar la red, se utilizó un LED a 1550 nm con un polarizador como fuente de luz, y un analizador de espectros a la salida de la LPG.

Se realizaron mediciones cada 10°C de forma descendente hasta llegar a un mínimo de -20°C. En la Figura 3.4.2 se muestran los espectros obtenidos (en pasos de 20°C) de la calibración en temperatura para las fibras de apertura numérica alta. Observamos en ambas gráficas que el espectro se desplaza hacia longitudes de onda más largas al aumentar la temperatura, y una modificación del acoplo debido a la variación de la longitud de la LPG

con la temperatura. En el caso de la SM1500(6.4/125), el efecto de un acoplo reducido también es debido a un inadecuado ajuste de la polarización de la fuente.

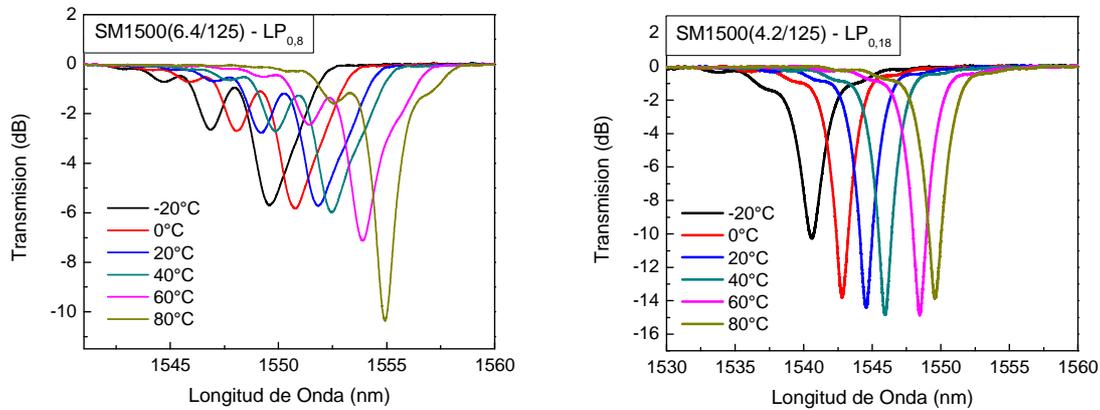


Figura 3.4.2. Espectros de dos redes de período largo en fibras SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) sometidas a distintas temperaturas. La longitud de onda de resonancia se desplaza a mayores valores para temperaturas más altas para éstos modos en particular

Se realizó un ajuste lineal para la variación de la longitud de onda de resonancia respecto al cambio en la temperatura. La pendiente del ajuste es de 91,2 pm/°C para el modo LP_{0,18} de la fibra SM1500 (4.2/125), y de 50,64 pm/°C para el LP_{0,9} de la SM1500(6.4/125). Éstos valores se encuentran dentro del rango encontrado en la bibliografía de 30 pm/°C y 100 pm/°C [11]. Ambos valores experimentales son mayores a los que típicamente se pueden obtener con sensores a partir de FBGs. En la Figura 3.4.3 se muestra la que sería una respuesta de una red de Bragg a 1550 nm ante cambios de temperatura junto a los ajustes de los datos obtenidos con las dos LPGs estudiadas. La pendiente de la respuesta de la FBG es de 13 pm/°C.

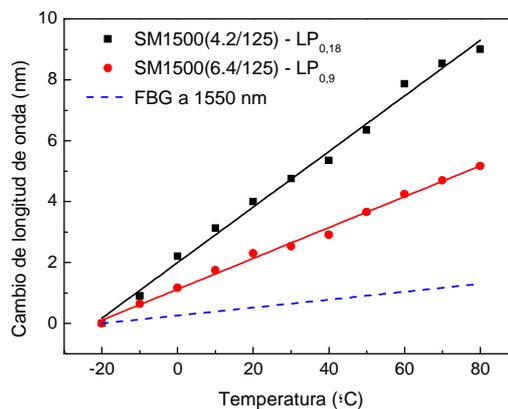


Figura 3.4.3. Cambio de longitud de onda ante temperatura de LPGs en fibras SM1500(4.2/125) acoplado al modo LP_{0,18} y SM1500(6.4/125) acoplado al modo LP_{0,9}, junto con la respuesta típica de una red de Bragg a modo de comparación

3.4.2 Respuesta ante Tensión Mecánica Axial

Así como la red varía al cambiar la temperatura, al aplicar tensión mecánica a una red de período largo, cambia su longitud de onda de resonancia. El cambio viene dado por:

$$\frac{d\lambda_{LPG}}{d\varepsilon} = \frac{d\lambda_{LPG}}{d(\delta n_{eff})} \left[\frac{dn_{eff,c}}{d\varepsilon} - \frac{dn_{eff,l}}{d\varepsilon} \right] + \Lambda_{LPG} \frac{d\lambda_{LPG}}{d\Lambda_{LPG}} \quad (3.4.2)$$

Donde nuevamente $\delta n_{eff} = n_{eff,c} - n_{eff,l}$ es la diferencia de índices efectivos, y ε es el estiramiento relativo de la fibra. Como observamos, la ecuación (3.4.2) posee también dos términos; el primero depende nuevamente de los materiales y del guiado de la fibra; en éste término tienen relevancia los coeficientes elasto-ópticos. El segundo término depende de la razón de cambio $d\lambda_{LPG} / d\Lambda_{LPG}$, es considerablemente distinta para cada modo.

De forma muy similar al caso de respuesta a temperatura, ambos términos de la ecuación (3.4.2) pueden ser positivos o negativos, de forma que es posible diseñar la LPG para permitir que ambas contribuciones se cancelen entre sí, y la red de período largo sea insensible ante estiramiento mecánico.

Para realizar las pruebas de tensión mecánica, se colocó la LPG totalmente estirada en un soporte con un extremo móvil acoplado a un tornillo micrométrico. La LPG se fijó al montaje utilizando pegamento de cianoacrilato (Loctite). Para observar los cambios en la longitud de onda de resonancia, se usó el equipamiento usual de un LED con su respectivo polarizador y un Analizador de Espectros.

Los resultados de las pruebas de tensión mecánica se hicieron para LPGs grabadas en los dos mismos tipos de fibra utilizados en la sección anterior, y acoplado a los mismos modos. No se utilizaron las mismas muestras debido a que en muchas ocasiones las redes se rompieron en la prueba de tensión, impidiendo reutilizarlas en las de temperatura. Las características de ambas se muestran en la Tabla 3.4.2 y en la Figura 3.4.4 se muestran sus espectros.

Tabla 3.4.2. Características de LPGs utilizadas para pruebas de tensión mecánica axial

Fibra	Modo	Λ_{LPG} (μm)	λ_{LPG} (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	L (mm)
SM1500(4.2/125)	LP _{0,18}	51	1535,17	1,02	134,8
SM1500(6.4/125)	LP _{0,9}	130	1552,01	1,43	169,1

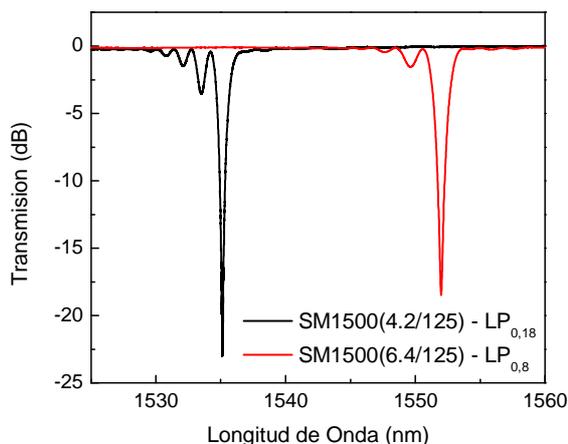


Figura 3.4.4. Redes de período largo en fibras SM1500(4.2/125) y SM1500(6.4/125) en la zona de 1550 nm grabadas para pruebas de tensión mecánica axial

Se representa en la Figura 3.4.5 el desplazamiento en longitud de onda de las resonancias de ambas LPGs ante tensión axial. Se observa también una importante reducción del acoplo en la red fabricada en la fibra SM1500(6.4/125) debido a un inadecuado control de la polarización de la fuente.

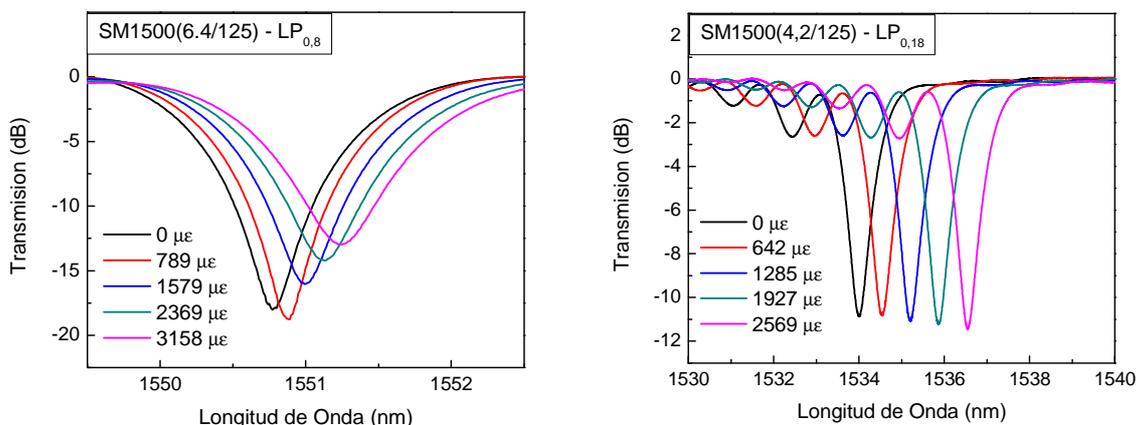


Figura 3.4.5. Desplazamiento de la longitud de onda de resonancia de LPGs en fibras SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) ante tensión mecánica axial.

Al someter las redes a tensión mecánica, el desplazamiento en longitud de onda es lineal, tal y como se esperaba. Las pendientes de los ajustes son de $1,01 \text{ pm}/\mu\epsilon$ ($\text{pm}/\text{microstrain}$) para el modo usado en la SM1500(4.2/125) y de $0,15 \text{ pm}/\mu\epsilon$ para el de la LPG en fibra SM1500(6.4/125), lo cual se encuentra de nuevo dentro del rango típico de respuesta de este tipo de dispositivos [14]. Como en el caso de la temperatura, se añade la respuesta lineal típica de una FBG en este caso a 1550 nm , de $0,48 \text{ pm}/\mu\epsilon$ [11], que viene a ser una respuesta intermedia entre las de las LPGs estudiadas. Ésto se muestra en la Figura 3.4.6.

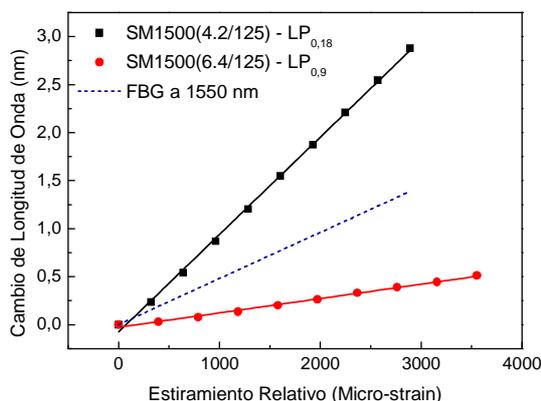


Figura 3.4.6. Cambio de longitud de onda ante tensión mecánica axial de LPGs en fibras SM1500(4.2/125) acoplado al modo LP_{0,18} y SM1500(6.4/125) acoplado al modo LP_{0,9}. Se adjunta la respuesta típica de una FBG a 1550 nm

Algo que resulta importante mencionar, es que en los sensores basados en redes de difracción existe una sensibilidad cruzada ante la temperatura y la tensión mecánica. Las LPGs ofrecen la posibilidad de elegir un modo de la cubierta tal que la sensibilidad sea casi nula ya sea para la temperatura o para la tensión, permitiendo así aislar el mesurando que se desea monitorizar [19].

3.4.3 Respuesta ante Índice de Refracción Externo

La última variable física a estudiar es la variación del índice de refracción externo de la LPG. Como discutíamos antes, las propiedades de los modos de la cubierta dependen directamente del índice de refracción de su entorno. Por éste motivo, las redes de período largo son intrínsecamente sensibles a cualquier cambio de índice que pueda haber a su alrededor. La ecuación que determina el cambio de longitud de onda de resonancia de una LPG debido al índice externo está dada por [20]:

$$\frac{d\lambda_{LPG}}{dn_0} = \frac{d\lambda_{LPG}}{dn_{eff,l}} \frac{dn_{eff,l}}{dn_0} \quad (3.4.3)$$

Donde n_0 es el índice del material externo a la fibra. Existen configuraciones en las que se puede utilizar redes de Bragg para medir índices de refracción, pero éstos métodos usualmente implican la reducción del diámetro de la cubierta mediante baños químicos o pulido de la fibra para tener acceso al campo evanescente del modo fundamental, haciendo que el dispositivo se vuelva mecánicamente frágil [21]. Una ventaja clave que poseen los sensores basados en LPGs sobre los de redes de Bragg es que éste tipo de modificaciones a la fibra no son necesarias.

La sensibilidad al índice externo se manifiesta como un desplazamiento de la longitud de onda de resonancia y de la variación de su acoplo. Estos cambios son más abruptos conforme el índice externo n_0 se acerca al de la sílice de la cubierta n_2 . En el momento en que ambos índices son iguales, se obtiene una situación similar a la de considerar una cubierta infinita, y los modos guiados por la cubierta dejan de existir, por lo que la resonancia desaparece.

En la Figura 3.4.7, obtenida de la referencia [20], se muestra el cambio en longitud de onda de la resonancia de 4 modos de la cubierta para una LPG grabada en fibra SMF-28 de $\Lambda_{LPG} = 320 \mu\text{m}$ y con resonancias en la zona de 1200 nm – 1500 nm. Conforme se aumenta el orden del modo de la cubierta, el desplazamiento es mayor, por lo que para mayor sensibilidad se debe usar un modo alto:

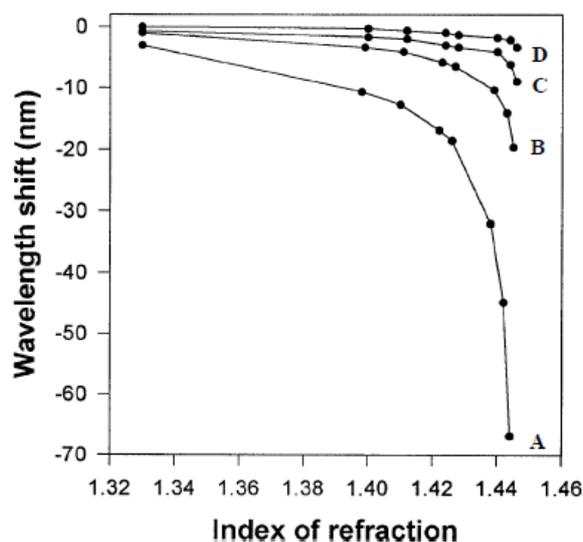


Figura 3.4.7. Variación de la longitud de onda de resonancia de distintos modos de la cubierta ante el índice de refracción externo. El modo de más alto orden es el A, y el de más bajo el D. Fuente: referencia [20]

Para las pruebas efectuadas en el laboratorio, se usaron dos redes de período largo similares a las utilizadas en las pruebas de temperatura y tensión mecánica. Sus características se resumen en la Tabla 3.4.3, y los espectros en la Figura 3.4.8:

Tabla 3.4.3. Características de LPGs utilizadas para pruebas de índice de refracción externo

Fibra	Modo	Λ_{LPG} (μm)	λ_{LPG} (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	L (mm)
SM1500(4.2/125)	LP _{0,18}	51	1532,55	1,57	136,9
SM1500(6.4/125)	LP _{0,9}	130,9	1570,17	1,86	141,1

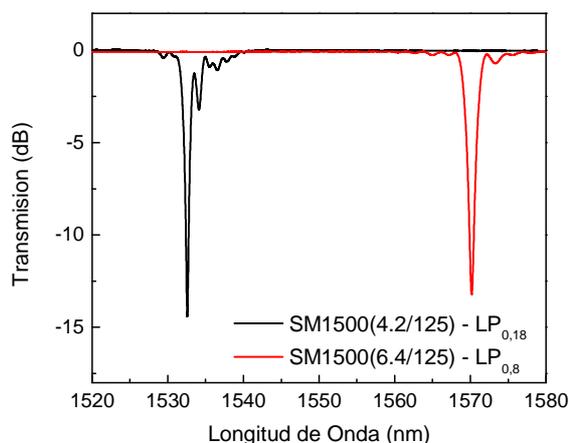


Figura 3.4.8. Redes de período largo en fibras SM1500(4.2/125) y SM1500(6.4/125) en la zona de 1550 nm grabadas para pruebas de índice de refracción externo

Para realizar las mediciones del cambio de longitud de onda ante distintos índices, se colocaron las redes de período largo totalmente estiradas y fijas a una placa metálica, y se aplicó sobre toda la superficie de la LPG líquidos de índice de refracción graduado (Cargille Laboratories), los cuales partían desde un $n_0 = 1,43$, con incrementos de $\Delta n_0 = 1 \times 10^{-3}$. Según el fabricante, los índices fueron obtenidos para una longitud de onda de 589,3 nm y a una temperatura de 25°C; por lo tanto, los índices se deben ajustar para las zonas en donde se encontraban centradas las LPGs; ésto es, 1530 nm para la SM1500(4.2/125) y 1570 nm para la SM1500(6.4/125). La modificación se realiza mediante las ecuaciones de Cauchy que se proporcionan en las hojas de especificaciones. Los valores corregidos se muestran en la Tabla 3.4.5:

Tabla 3.4.5. Corrección de los índices de refracción de los líquidos utilizados según las curvas del fabricante para el infrarrojo cercano

Índice de refracción a $\lambda=589,3$ nm	Índice de refracción a $\lambda=1530$ nm SM1500(4.2/125)	Índice de refracción a $\lambda=1570$ nm SM1500(6.4/125)
1,430	1,420	1,420
1,432	1,422	1,422
1,434	1,424	1,424
1,436	1,426	1,426
1,438	1,428	1,428
1,440	1,430	1,430
1,442	1,432	1,432
1,444	1,434	1,434
1,446	1,436	1,436
1,448	1,438	1,438

Posteriormente se monitorizó la LPG utilizando como fuente dos LEDs: uno centrado a 1550 nm y otro a 1440 nm, previendo el hecho de que los desplazamientos en longitud de onda son significativos. Después de tomar las medidas con el Analizador de Espectros, se procedía a limpiar la fibra y la base metálica con acetona y repetir con otro líquido de distinto índice. Los espectros obtenidos se muestran en la Figura 3.4.9 para ambas LPGs.

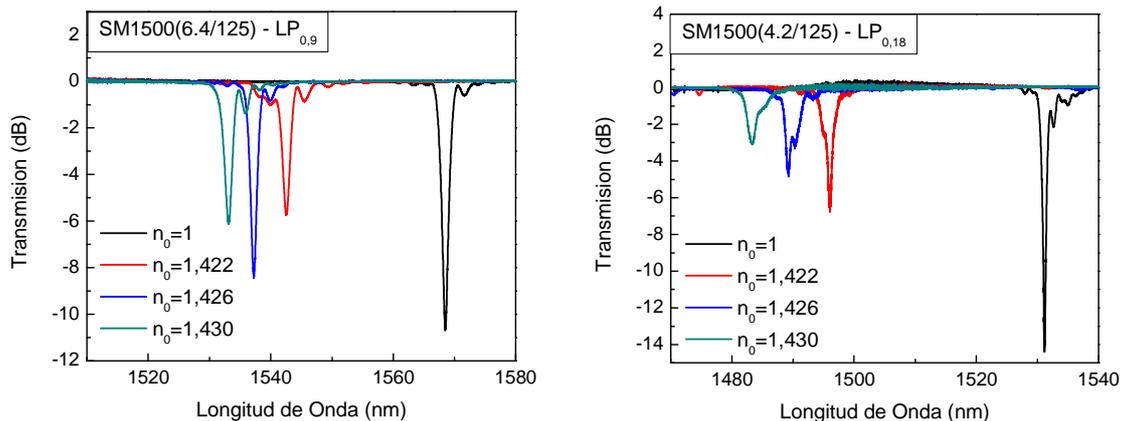


Figura 3.4.9. Desplazamiento de la longitud de onda de resonancia de LPGs en fibras SM1500(6.4/125) y SM1500(4.2/125) ante cambios de índice de refracción externos. Los índices de refracción fueron corregidos según las curvas proporcionadas por el fabricante

En la Figura 3.4.10 se muestra un ajuste cuadrático para la SM1500(6.4/125) y un ajuste lineal para la SM1500(4.2/125) de los desplazamientos en longitud de onda que se midieron al aplicar distintos líquidos a ambas redes con respecto al índice externo en aire $n_0 = 1$.

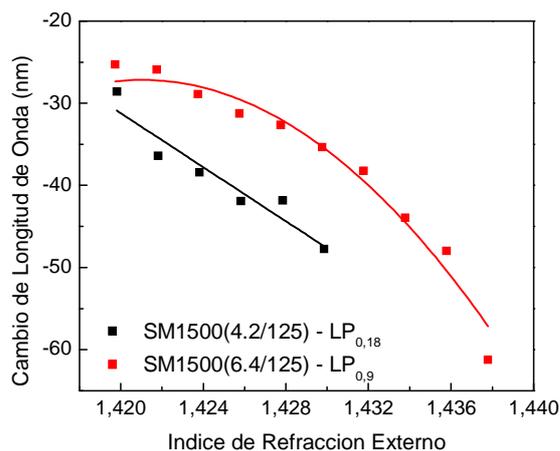


Figura 3.4.10 Desplazamiento de la resonancia de las LPGs ante cambios en el índice de refracción externo para fibras SM1500(4.2/125) y SM1500(6.4/125)

Obsérvese en la Figura 3.4.10 que para ambos casos, el desplazamiento es negativo tal y cómo se esperaba, ya que al incrementar el índice externo a la LPG, el índice efectivo del modo de la cubierta $n_{eff,l}$ también se verá incrementado (ver la ecuación 3.3.8). El efecto neto es que la diferencia de índices efectivos $\delta n_{eff} = n_{eff,c} - n_{eff,l}$ se reduce, produciendo un acoplo a una longitud de onda más corta según la ecuación (3.3.3).

Nótese que la cantidad de puntos tomados para ambas LPGs es distinto. Ésto se debió a que para índices de refracción mayores a 1,430 en la SM1500(4.2/125) la resonancia desaparecía por completo debido a la disminución de la constante de acoplo ocasionada por la expansión espacial de los campos al aumentar el índice externo. Lo mismo sucedió para la SM1500(6.4/125) al llegar al valor de 1,438, indicando esto que se había llegado a un valor muy cercano al de la sílice de la cubierta en cada una de las fibras.

El hecho de que los puntos tengan una distribución tan irregular probablemente se deba a que dada la longitud de la red, haya podido haber irregularidades a la hora de distribuir el líquido a lo largo de toda su extensión. Otro problema es que gracias a que el modo utilizado en la fibra SM1500(4.2/125) era más sensible a la temperatura y a la tensión, éstas variables pudieron haber inducido un error considerable en las mediciones.

Como se mencionaba anteriormente, las fibras utilizadas poseen birrefringencia residual, provocando en ocasiones dificultades para llegar a un correcto ajuste de la polarización. Esto es especialmente notorio para el caso del modo $LP_{0,18}$ de la fibra SM1500(4.2/125), donde se observa en la Figura 3.4.9 un pronunciado decremento del acoplo. En el montaje experimental, el polarizador únicamente cubría el rango de 1500 nm - 1600 nm, por lo que cualquier intento de ajustar la polarización a longitudes de onda más cortas resultaba imposible.

A partir de estos experimentos podemos poner en evidencia la propiedad inherente de las redes de período largo de interactuar con su medio, lo cual las hace candidatas ideales para toda una gama de aplicaciones en sensores. Por ejemplo, se han llevado a cabo experimentos de LPGs como sensores de concentración de cloruro de calcio y glicol de etileno en disoluciones [22], para detección de hidrocarburos [23], o incluso como biosensores en aplicaciones de detección de cadenas de ADN [24,25].

En el trabajo conjunto de la referencia [25], una red grabada en fibra SM1500(4.2/125) acoplado a los modos $LP_{0,17}$ y $LP_{0,18}$ de la cubierta fue usada como biosensor. Esta red tenía un ancho de banda de 0,86 nm para el modo $LP_{0,17}$ centrado en 1408 nm, mientras que para el modo $LP_{0,18}$ tenía un ancho de 1,5 nm, centrado en 1534 nm.

La superficie de la LPG recibió un tratamiento químico (llamado silanización) para que fuera capaz de capturar las cadenas de ADN. En el experimento, al ser expuesta a una solución con las cadenas adecuadas, se registró una variación de 0,32 nm para el modo $LP_{0,17}$ y de 0,5 nm para el $LP_{0,18}$ en sus resonancias respectivas.

A pesar del interés en aplicaciones de sensores, el objetivo principal de poder diseñar y construir redes de período largo de ancho de banda estrecho fue el de utilizarlas como operadores de cálculo fraccional. Como se mencionó en el desarrollo teórico, para poder implementar un derivador de pulsos, es necesario que el ancho de banda de éstos sea del mismo orden que el del dispositivo que los procesará.

Podemos concluir a partir de este capítulo que si se desea fabricar LPGs para procesamiento de pulsos de estrecho ancho de banda, conviene trabajar en longitudes de onda cortas (aunque esto no siempre puede elegirse), con redes largas y modos de la cubierta de orden alto. Además, el utilizar fibras con apertura numérica alta ofrece también un estrechamiento de las LPGs fabricadas.

En el desarrollo experimental del siguiente capítulo, se utilizarán láseres de pocos nanómetros de ancho de banda como fuentes de pulsos ópticos a procesar, por lo que las técnicas de diseño y fabricación de LPGs estudiadas en este apartado serán imprescindibles.

Bibliografía - Capítulo 3

- [1] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, Academic Press, 1999.
- [2] A. Martinez, M. Dubov, I. Khrushchev y I. Bennion, «Direct writing of fibre Bragg gratings by femtosecond laser,» *Electronics Letters*, vol. 40, nº 19, pp. 1-2, 2004.
- [3] D. D. Davis, T. K. Gaylord, E. N. Glytsis, S. G. Kosinski, S. C. Mettler y A. M. Vengsarkar, «Long-period fibre grating fabrication with focused CO₂ laser pulses,» *Electronics Letters*, vol. 34, nº 3, pp. 302-303, 1998.
- [4] S. Savin, M. J. Dignonnet, G. S. Kino y H. J. Shaw, «Tunable mechanically induced long-period fiber gratings,» *Optics Letters*, vol. 25, nº 10, pp. 710-712, 2000.
- [5] D. L. Williams, B. J. Ainslie, J. R. Armitage, R. Kashyap y R. Campbell, «Enhanced UV photosensitivity in boron codoped germanosilicate fibers,» *Electronics Letters*, vol. 29, nº 1, pp. 45-47, 1993.
- [6] P. J. Lemaire, R. M. Atkins, V. Mizrahi y W. A. Reed, «High pressure H₂ loading as a technique for achieving ultrahigh UV photosensitivity and thermal sensitivity in GeO₂ doped optical fibers,» *Electronics Letters*, vol. 29, nº 13, pp. 1191-1193, 1993.
- [7] J. Canning, M. Aslund y P.-F. Hu, «Ultraviolet-induced absorption losses in hydrogen-loaded optical fibers and in presensitized optical fibers,» *Optics Letters*, vol. 25, nº 22, pp. 1621-1623, 2000.
- [8] B. O. Guan, H. Y. Tam, S. L. Ho, S. Y. Liu y X. Y. Dong, «Growth of long-period gratings in H₂-loaded fiber after 193-nm UV inscription,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 12, nº 6, pp. 642-644, 2000.
- [9] L. Dong, J. L. Cruz, L. Reekie, M. G. Xu y D. N. Payne, «Enhanced photosensitivity in tin-codoped germanosilicate optical fibers,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 7, nº 9, pp. 1048-1050, 1995.
- [10] A. M. Vengsarkar, P. J. Lemaire, J. B. Judkins, V. Bhatia, T. Erdogan y J. E. Sipe, «Long-period fiber gratings as band-rejection filters,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 14, nº 1, pp. 58-65, 1996.
- [11] S. W. James y R. P. Tatam, «Optical fibre long-period grating sensors; characteristics and application,» *Measurement Science and Technology*, nº 14, pp. R49-R61, 2003.
- [12] S. Ramachandran, Z. Wang y M. Yan, «Bandwidth control of long-period grating-based mode converters in few-mode fibers,» *Optics Letters*, vol. 27, nº 9, pp. 698-700, 2002.
- [13] Y. G. Han, B. H. Lee, W. T. Han, U. C. Paek y Y. Chung, «Resonance peak shift and dual peak separation of long-period fiber gratings for sensing applications,» *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 13, nº 7, pp. 699-701, 2001.
- [14] D. Sáez-Rodríguez, «Reconfiguración de modos en fibras ópticas mediante redes de Bragg y de período

- largo. Aplicaciones a láseres en fibra,» *Tesis Doctoral, Universidad de Valencia*, pp. 57-64, 2012.
- [15] J. A. Buck, *Fundamentals of fiber optics*, John Wiley and Sons, 2004.
- [16] L. Poveda-Wong, J. L. Cruz, M. Delgado-Pinar, X. Roselló-Mechó, A. Díez y M. V. Andrés, «Fabrication of long period fiber gratings of subnanometric bandwidth,» *En redacción*.
- [17] E. P. Alcusa-Sáez, A. Díez, M. González-Herráez y M. V. Andrés, «Improved time-resolved acousto-optic technique for optical fiber analysis of axial non-uniformities by using edge interrogation,» *Optics Express*, vol. 23, nº 6, pp. 7345-7350, 2015.
- [18] V. Bhatia y A. M. Vengsarkar, «Optical fiber long-period grating sensors,» *Optics Letters*, vol. 21, nº 9, pp. 692-694, 1996.
- [19] V. Bhatia, D. K. Campbell, D. Sherr, T. G. D'Alberto, N. A. Zabaronic, G. A. Ten Eyck, K. A. Murphy y R. O. Claus, «Temperature-insensitive and strain-insensitive long-period grating sensors for smart structures,» *Optical Engineering*, vol. 36, nº 7, pp. 1872-1876, 1997.
- [20] V. Bhatia, «Applications of long-period gratings to single and multi-parameter sensing,» *Optics Express*, vol. 4, nº 11, pp. 457-466, 1999.
- [21] G. Metlz, W. W. Morey, S. J. Hewlett y J. D. Love, «Wavelength shifts in fiber Bragg gratings due to changes in the cladding properties,» de *Congreso "Photosensitivity and quadratic nonlinearity in glass waveguides"*, Portland, Estados Unidos, 1995.
- [22] R. Falciai, A. G. Mignani y A. Vannini, «Long period gratings as solution concentration sensors,» *Sensors and Actuators B*, nº 74, pp. 74-77, 2001.
- [23] R. Falate, R. C. Kamikawachi, M. Muller, H. J. Kalinowski y J. L. Fabris, «Fiber optic sensors for hydrocarbon detection,» *Sensors and Actuators B*, nº 105, pp. 430-436, 2005.
- [24] X. Chen, C. Liu, M. D. Hughes, D. A. Nagel, A. V. Hine y L. Zhang, «EDC-mediated oligonucleotide immobilization on a long period grating optical biosensor,» *Biosensors and Bioelectronics*, vol. 6, nº 2, pp. 1-6, 2015.
- [25] M. Delgado-Pinar, Q. Shi, L. Poveda-Wong, E. Delgado-Pinar, B. Xu, J. Zhao, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «DNA-hybridization fiber-optic biosensor using a narrow bandwidth long period grating,» *Por Publicar*, 2017.

Capítulo 4 – Derivación Fraccional: Implementación Experimental Usando Redes de Período Largo

Las redes difracción en fibra óptica, debido a sus características espectrales, pueden operar matemáticamente sobre la envolvente temporal (compleja) de una señal de luz, directamente en el dominio óptico. El interés en dichos operadores es que permiten procesar señales ultrarrápidas, sin tener que realizar conversiones al dominio electrónico, que necesariamente involucran sistemas de alto coste, pérdidas y además mayores tiempos de procesamiento [1-3]. Por lo tanto, son bloques básicos e imprescindibles para futuros sistemas de comunicaciones ópticas que manejen tasas de procesamiento de datos superiores a las que actualmente impone la electrónica convencional.

Un dispositivo fotónico capaz de realizar operaciones de cálculo como la derivación o la integración sobre la envolvente temporal compleja de un pulso de luz, posee una enorme cantidad de posibles aplicaciones no sólo en telecomunicaciones, sino también en conformado de pulsos de forma arbitraria mediante funciones de Hermite-Gauss (obtenidas mediante derivadas sucesivas de pulsos gaussianos) [4,5], detección de solitones oscuros mediante dispositivos integradores [6], e incluso solución de ecuaciones diferenciales totalmente en el dominio óptico [7]. Ésta última aplicación permitiría implementar, por ejemplo, aplicaciones de control automático en sistemas que requieran tiempos de respuesta inalcanzables para esquemas de control basados en circuitos electrónicos digitales.

Teniendo esto en mente, pretendemos mostrar de forma experimental cómo el concepto de derivada fraccional, que es una generalización del operador derivada de orden entero, puede ser aplicado para resolver problemas físicos [8]. Actualmente el cálculo fraccional ha encontrado aplicaciones para modelar viscosidad en mecánica de fluidos [9], en control de trayectorias de robots [10] y en óptica con la aplicación de la transformada de Fourier fraccional [11], por mencionar solo algunos de los muchos ejemplos que se pueden encontrar en la literatura [12].

En el presente capítulo se demostrará experimentalmente la posibilidad de utilizar las redes de período largo (*Long Period Gratings* o LPGs) como derivadores fraccionales de orden $\frac{1}{2}$. Las señales a procesar serán pulsos ópticos de picosegundos mediante dos configuraciones distintas de derivación fraccional: LPG uniforme e interferómetro modal con dos LPGs concatenadas y grabadas en una misma fibra óptica [13,14]. Finalmente, demostraremos la utilidad de la derivación fraccional fotónica en la reconstrucción del perfil de fase de un pulso de luz láser [15].

4.1 Medida de Función de Transferencia de una LPG por Modulación a Radiofrecuencia

Una red de período largo uniforme, bajo las condiciones adecuadas de ancho de banda y longitud de onda, funciona como un dispositivo derivador de orden entero si se encuentra en acoplo máximo [16,17], mientras que si se utiliza un régimen de acoplo tal que $|\kappa|L < \pi/2$, el resultado es un dispositivo todo óptico que se comporta como un derivador de orden fraccional menor a la unidad [18].

La capacidad de una red de período largo para generar la derivada fraccional de un pulso óptico se puede estudiar al comparar su respuesta en frecuencia con respecto a la de un derivador ideal. Como se discutió en el marco teórico, un derivador posee dos características espectrales: en amplitud, suprime la frecuencia óptica de la portadora de la señal, y en fase, introduce una discontinuidad de $q\pi$, donde q es el orden de derivación.

En este apartado se explica un método de medición de esta función de transferencia con el fin de corroborar que una LPG cumple con los criterios de amplitud y fase que se buscan en un dispositivo derivador. El método se basa en la modulación en amplitud de una señal óptica de onda continua mediante una señal de radiofrecuencia, y se denomina *Modulation Phase Shifting* (MPS).

Originalmente éste método fue aplicado para estudiar la dispersión en fibras ópticas. Consiste en la modulación en amplitud de una señal óptica de onda continua con el fin de obtener el retardo de grupo del dispositivo en un cierto rango de longitudes de onda. Posteriormente, el cálculo de la razón de cambio del retardo de grupo con respecto a la longitud de onda, permite obtener el parámetro de dispersión D del dispositivo estudiado [19,20].

4.1.1 Principio de Funcionamiento

Una de las primeras tareas realizadas en el laboratorio fue comprobar el funcionamiento de una red de período largo como derivador fraccional. Para eso, es necesario medir de alguna manera su respuesta en frecuencia, tanto en amplitud como en fase. Se recurrió entonces al método MPS, que consiste en enviarle a la LPG una señal óptica de frecuencia ω_0 modulada en amplitud por una señal de radiofrecuencia Ω_{RF} y luego calcular la función de transferencia mediante un analizador de redes.

Dicha modulación en amplitud se logra mediante un modulador electroóptico (EOM); éstos son dispositivos que modulan la amplitud de una señal óptica al aplicar un voltaje externo. El esquema del modulador se muestra en la Figura 4.1.1.

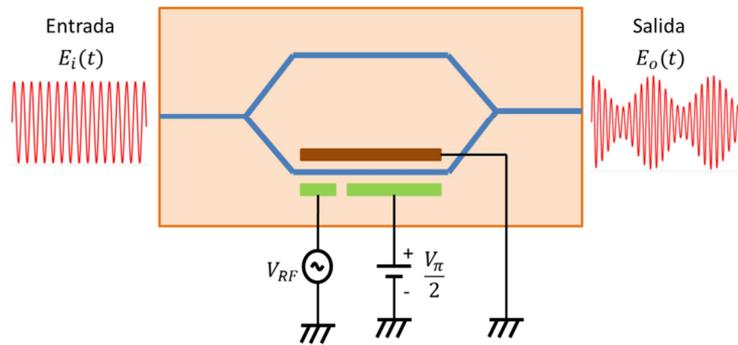


Figura 4.1.1. Modulador electr3ptico. La modulaci3n se consigue al aplicar un voltaje DC y un voltaje sinusoidal de alta frecuencia a uno de los brazos de un interfer3metro.

El modulador consiste en un interfer3metro Mach-Zehnder fabricado en una gu3a de ondas de un material con alto coeficiente electro-3ptico (t3picamente niobato de litio, LiNbO_3). El interfer3metro hace uso del efecto Kerr, que consiste en la modificaci3n del 3ndice de refracci3n de un material ante un campo el3ctrico aplicado.

Al introducir un voltaje en uno de los brazos y modificar el 3ndice de refracci3n, se introduce un desfase con respecto a la luz que viaja por el otro brazo. As3, a la salida del dispositivo se produce una interferencia constructiva o destructiva en funci3n del voltaje que se est3 aplicando. Si llamamos $V(t)$ al voltaje aplicado total, i.e., $V_{\pi}/2 + V_{RF}$, y a los campos el3ctricos de la se3al 3ptica de entrada $E_i(t)$ y de salida $E_o(t)$, la intensidad a la salida del dispositivo es la siguiente [21]:

$$|E_o(t)|^2 = |E_i(t)|^2 \cos^2 \left[\frac{\pi V(t)}{2 V_{\pi}} \right] \quad (4.1.1)$$

La constante V_{π} viene a ser la tensi3n necesaria para que la salida del modulador cambie de uno a cero. Para modular la se3al 3ptica con una se3al de radiofrecuencia, se debe entonces aplicar una tensi3n DC de la mitad del valor de V_{π} , ya que as3 nos aseguramos de estar trabajando en la zona lineal de respuesta del dispositivo. Esto se ilustra en la Figura 4.1.2

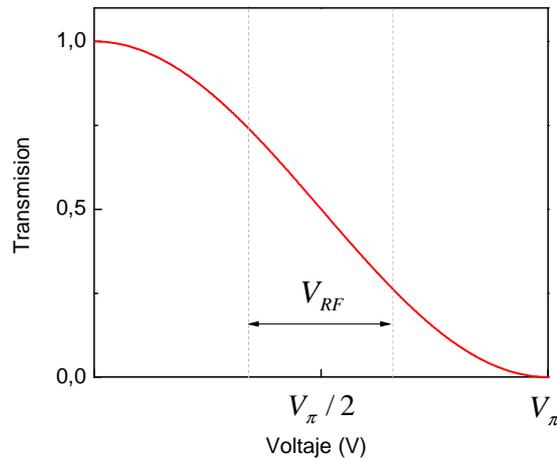


Figura 4.1.2. Respuesta de un modulador electroóptico ante un voltaje aplicado. Se aplica un voltaje de radiofrecuencia alrededor de un voltaje de $V_\pi/2$ para una máxima modulación.

Otro detalle importante a tomar en cuenta es que el modulador electroóptico posee una cierta dependencia de la polarización, por lo que se debe ajustar correctamente la polarización de la señal de entrada hasta conseguir una modulación óptima.

El interés en obtener una señal óptica modulada radica en el hecho de que nos será útil para determinar la respuesta de fase del dispositivo en cuestión. Si aplicamos una modulación de amplitud de frecuencia Ω_{RF} a una señal óptica de frecuencia ω_0 obtenemos:

$$(1 + \cos \Omega_{RF} t) e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 - \Omega_{RF})t} + e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 + \Omega_{RF})t} \quad (4.1.2)$$

Si usamos la transformada de Fourier en la ecuación (4.1.2), obtenemos lo que se muestra en la Figura 4.1.3; una doble banda de frecuencias alrededor de la frecuencia óptica.

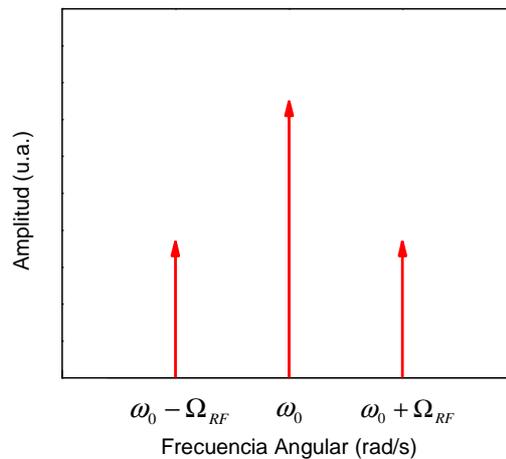


Figura 4.1.3. Modulación a doble banda. La modulación en intensidad de una señal monocromática produce dos bandas laterales en su espectro.

Debido a que la frecuencia de modulación es muy inferior a la frecuencia óptica principal, la diferencia entre ω_0 y cualquiera de las bandas laterales de la Figura 4.1.3 se puede considerar como un diferencial de frecuencias $d\omega$. El ancho entre ambas bandas laterales es entonces $2d\omega$. Nuestro objetivo será entonces barrer todo el ancho de banda del dispositivo que queremos analizar mediante estos diferenciales de frecuencia. Lo hacemos variando la frecuencia óptica (con un láser sintonizable) y manteniendo la anchura de estos diferenciales al fijar la frecuencia de modulación Ω_{RF} . Esto se observa en la Figura 4.1.4, donde ilustramos el barrido de la señal óptica modulada en todo el ancho de banda de una LPG con máximo acoplo:

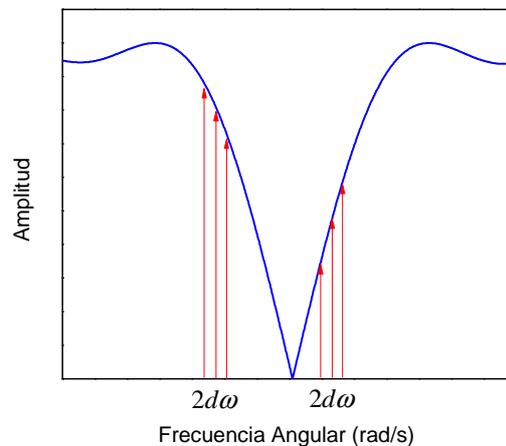


Figura 4.1.4. Barrido de la señal modulada a lo largo del ancho de banda de una LPG. Se muestra la respuesta la respuesta en amplitud.

Recordemos que para conocer la función de transferencia del dispositivo, debemos determinar tanto la respuesta en amplitud como la respuesta en fase. La respuesta en amplitud es fácilmente determinada, ya que se observa simplemente como una variación en la intensidad de la señal a la salida del dispositivo. Este mismo procedimiento se puede realizar incluso sin necesidad de modular la señal óptica. El motivo por el cual se debe utilizar una doble banda es para poder medir el retardo de grupo de la red $\tau_g(\omega)$. El barrido de la señal modulada a lo largo de la respuesta en fase de la LPG se muestra en la Figura 4.1.5.

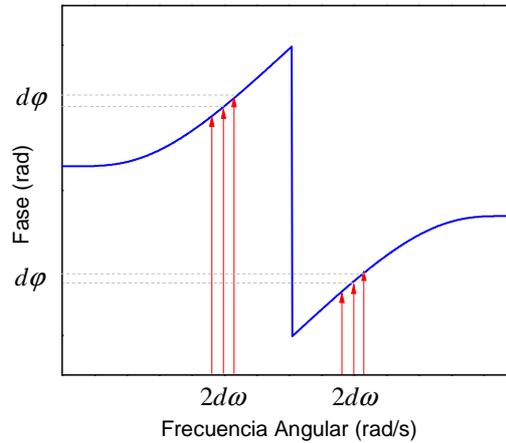


Figura 4.1.5. Barrido de la señal modulada a lo largo del ancho de banda de una LPG. Se muestra la respuesta en fase.

Obsérvese en la Figura 4.1.5 que en cada diferencial de frecuencias evaluado, a cada componente espectral le corresponde una fase distinta. Por lo tanto, a la salida del dispositivo habrá un desfase $d\phi$ entre ellas. Mediante un Analizador de Redes, es posible encontrar el desfase entre la frecuencia óptica ω_0 y la frecuencia $\omega_0 + \Omega_{RF}$ (ver la Figura 4.1.3) que forma la banda derecha.

El conocer estos diferenciales de fase a lo largo de todo el ancho de banda del dispositivo nos permite calcular el retardo de grupo, que es básicamente el tiempo de tránsito que una delgada banda espectral $d\omega$ tarda en viajar por el mismo:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (4.1.3)$$

A partir de la ecuación (4.1.3), y mediante una sencilla integración numérica, podemos entonces encontrar la respuesta de fase que nos hacía falta para encontrar la función de transferencia completa:

$$\phi(\omega) = -\int_{\omega} \tau_g(\omega') d\omega' \quad (4.1.4)$$

4.1.2 Montaje Experimental y Función de Transferencia de una LPG

Como comentábamos antes, el analizador de redes será fundamental en este montaje, ya que es un instrumento que permite medir el desfase de una señal de radiofrecuencia generada por él mismo con respecto a la que le llega por un segundo canal. De esta forma, podemos conocer la respuesta en frecuencia de una LPG.

El experimento descrito en esta sección se realizó con una red de período largo en fibra óptica fotosensible (PS1250/1500, Fibercore) en la zona de 1550 nm con un ancho de banda a -3 dB de 2,87 nm, y un acoplo de 16,5 dB al modo $LP_{0,9}$. En la Figura 4.1.6 se muestra el espectro de ésta LPG.

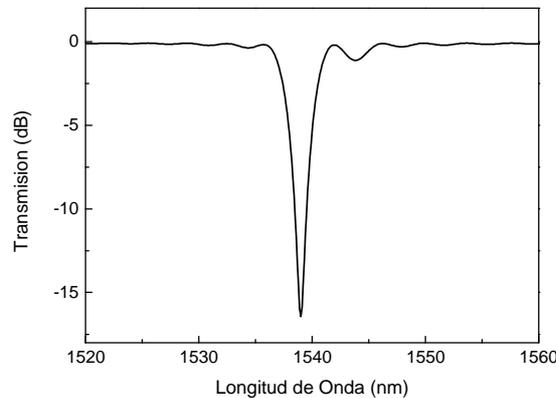


Figura 4.1.6. Red de período largo en fibra PS1250/1500, utilizada para medir su función de transferencia por medio del método de modulación a doble banda.

El montaje consistió en un láser sintonizable (1500 nm – 1570 nm), modelo Photonetics Tunics-BT, el cual efectuó un barrido a través de las longitudes de onda que abarcaban la resonancia de la LPG. La salida del láser, luego de pasar por un controlador de polarización, es llevada a un modulador electroóptico (JDS Uniphase 100-13001 Alpha 1). Éste último fue alimentado por una fuente de tensión DC y por una señal de radiofrecuencia que serviría de moduladora. La tensión DC que proporcionaba mayor modulación ($V_{\pi}/2$) se determinó experimentalmente como 3,48 V.

La señal de RF fue generada por el analizador de redes marca Agilent Technologies, de modelo E8364B 10 MHz - 50 GHz PNA Series. Debido a que el analizador de redes no es un instrumento óptico, es necesario convertir la señal de salida de la LPG a una señal eléctrica. Por este motivo la señal modulada, luego de pasar a través de la LPG, estuvo monitorizada por un fotodiodo rápido de la compañía U2T, modelo XPDV2120R, el cual fue conectado a la segunda terminal del analizador de redes. El diagrama se muestra en la figura 4.1.7.

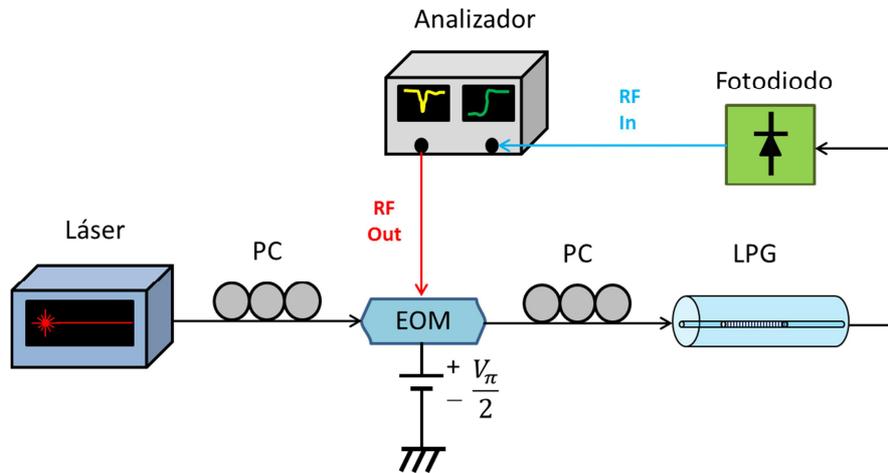


Figura 4.1.7. Montaje para medición de la función de transferencia de una LPG por medio del método de modulación a doble banda. En rojo se muestra la salida de la señal de referencia suministrada por el analizador de redes (RF Out), y en celeste la que éste recibe luego de atravesar la LPG (RF In). Los controladores de polarización se denotan como PC.

Se hicieron las pruebas para dos señales de radiofrecuencia distintas: a 500 MHz y 1 GHz. El barrido en longitudes de onda ópticas en todos los casos se hizo de los 1525 nm a los 1535 nm, ya que la LPG utilizada tiene su longitud de onda de acoplo cercana a los 1531 nm. Los barridos del láser se hicieron en pasos de 2 pm.

Si bien es cierto que el analizador de redes puede operar a frecuencias de hasta 50 GHz, mientras mayor sea la frecuencia de modulación, los diferenciales de frecuencia $d\omega$ se hacen más anchos, por lo que los puntos de muestreo estarían más espaciados y se pierde resolución. Por otro lado, si se trabaja a frecuencias demasiado bajas, la relación señal-ruido en la fase de radiofrecuencia tiende a empeorar, por lo que se debe llegar a un compromiso entre ruido y precisión a la hora de elegir la frecuencia de la moduladora.

Para tener un mejor resultado, se efectuaron medidas de referencia con un trozo de fibra PS1250/1500 del mismo tamaño que aquél que contenía la LPG, ya que de lo contrario, se estaría sumando el retardo de grupo de todos los componentes ópticos adicionales. Una vez obtenida la referencia, simplemente se resta de la medida con la LPG.

En la Figura 4.1.8 se muestra la respuesta en intensidad de la LPG para las dos diferentes frecuencias de modulación. Por conveniencia, se muestra en el eje de las abscisas la frecuencia en THz en vez de la longitud de onda, ya que es ésta la unidad requerida para realizar la integración con la que se obtiene el retardo de grupo. El rango de frecuencias considerado va de 195,44 THz (1535 nm) hasta 196,72 THz (1525 nm).

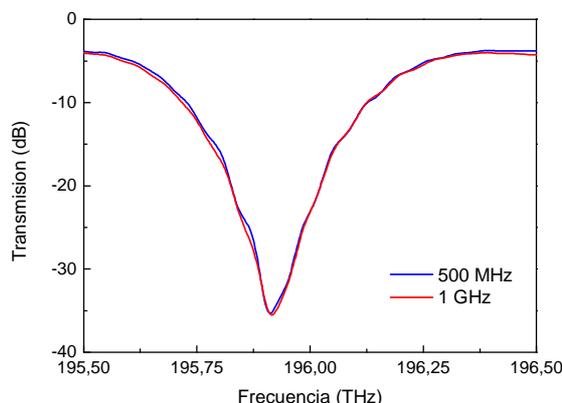


Figura 4.1.8. Respuesta en intensidad de la LPG para frecuencias de modulación de 500 MHz y 1 GHz.

Es necesario aclarar que el acoplo en decibeles eléctricos es en realidad el doble del acoplo que se da ópticamente, ya que la señal que mide el analizador de redes ha pasado por una conversión previa por medio del fotodiodo rápido a la salida de la LPG. Por lo tanto, 2 dB eléctricos equivalen a 1 dB óptico, y el acoplo de la LPG sería en realidad de unos 17,5 dB. La frecuencia óptica de mayor acoplo corresponde a 195,95 THz, o 1531 nm.

Las gráficas de fase de la LPG se muestran en la Figura 4.1.9. Para obtenerlas se hicieron barridos desde 1525 nm hasta 1535 nm con incrementos de longitud de onda de 2 pm. Nótese que el cambio de fase a la longitud de onda de acoplo es inferior al grado, por lo que la medida se presta a errores por ruido. Se muestra la diferencia de fase medida con el Analizador de Redes para frecuencias de modulación de 500 MHz y 1 GHz.

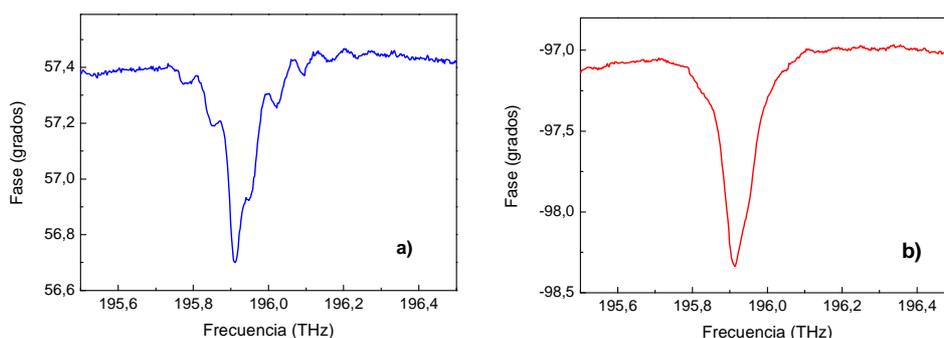


Figura 4.1.9. Diferencia de fase introducida por la LPG para frecuencias de modulación de a) 500 MHz y b) 1 GHz.

Se observa una evidente discontinuidad de fase en la función de transferencia, la cual es una característica necesaria para que el dispositivo pueda funcionar como un derivador fraccional. En este caso particular, el cambio es de $0,7^\circ$ para la frecuencia de 500 MHz mientras que para 1 GHz es de aproximadamente $1,34^\circ$. Comparando la Figura 4.1.9-b con la 4.1.9-a, además de la clara disminución en el ruido, gracias a que el instrumento

opera de mejor manera a frecuencias de modulación más altas, se observa que la discontinuidad de fase es aproximadamente la mitad que para 500 MHz.

Este comportamiento es predecible a partir de la ecuación (4.1.3), ya que si se denota el cambio de fase medido por el analizador como $d\phi$, y la frecuencia de modulación como Ω_{RF} , al aumentar la frecuencia de modulación al doble, necesariamente el cambio de fase también deberá ser el doble para mantener constante la proporción $d\phi/d\omega$, ya que el diferencial de frecuencia aumenta su anchura.

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \approx \frac{\phi(\omega_0 + \Omega_{RF}) - \phi(\omega_0)}{(\omega_0 + \Omega_{RF}) - \omega_0} = \frac{d\phi(\omega)}{\Omega_{RF}} \quad (4.1.5)$$

Una vez obtenidos los saltos de fase que introduce la LPG, y debido a que éstos están medidos en grados, es posible calcular el retardo de grupo mediante la siguiente fórmula:

$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \approx -\frac{d\phi(\omega)}{360 \cdot f_{RF}} \quad (4.1.6)$$

Donde f_{RF} es la frecuencia de modulación expresada en Hz. Los retardos de grupo para 500 MHz y 1 GHz calculados mediante la ecuación (4.1.6) se muestran en la Figura 4.1.10.

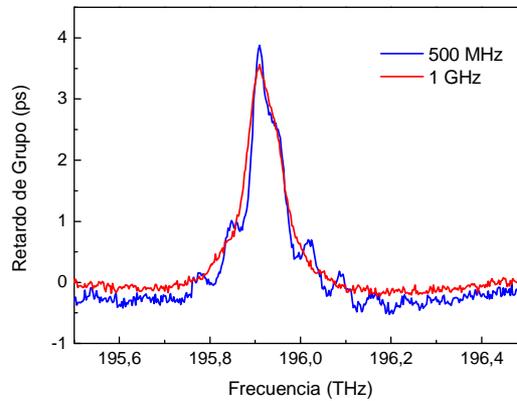


Figura 4.1.10. Retardo de grupo de la LPG para frecuencias de modulación a 500 MHz y 1 GHz.

Se puede observar que existe concordancia entre las dos medidas, lo cual asegura su fiabilidad. Al realizar una integración en la frecuencia a las gráficas de la Figura 4.1.10, se obtiene finalmente la fase introducida por la LPG en cada uno de los casos. El resultado se muestra en la Figura 4.1.11.

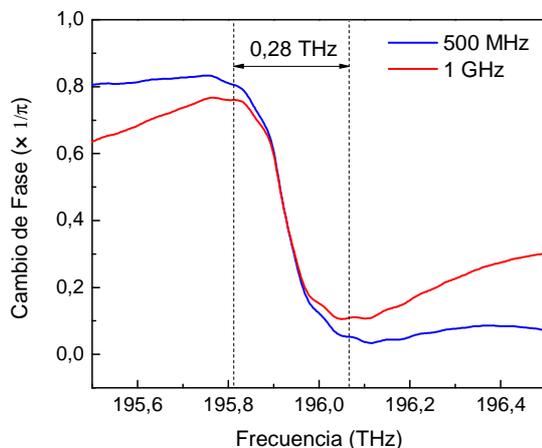


Figura 4.1.11. Salto de fase normalizado a π producido por la LPG para frecuencias de modulación de 500 MHz y 1 GHz.

Como era de esperar, se observa el salto de fase centrado justamente a la frecuencia de máximo acoplo de la LPG. Si se presta atención a la Figura 4.1.11, entre el mínimo y el máximo de fase hay un intervalo de aproximadamente 0,28 THz, que corresponde en longitud de onda a un intervalo de 2,18 nm. El ancho de banda de la LPG medido con el analizador espectral óptico es de 2,87 nm, por lo que comprobamos que el salto de fase se da en un intervalo de longitudes de onda similar.

El salto de fase en la Figura 4.1.11 se encuentra normalizado en unidades de π . Por lo tanto, para la curva de 1 GHz, el salto es de $0,64\pi$, y para la curva de 500 MHz resulta de $0,7\pi$. Si bien ambos valores deberían ser el mismo, la discrepancia se deba muy posiblemente al ruido presente en las medidas, sobre todo en la de 500 MHz.

Podemos concluir entonces que la LPG bajo prueba funciona como un derivador de un orden entre 0,6 y 0,7, para señales ópticas que tengan un ancho de banda cercano a los 2 nm y centradas en 1531 nm, ya que de esta forma se asegura que el salto de fase cubra todo el espectro de la fuente y produzca la derivación fraccional.

Lamentablemente, en el momento en que fue caracterizada esta red de difracción, no disponíamos de ninguna fuente de pulsos ópticos en la longitud de onda adecuada para poder procesarlos. Se realizó un intento con el láser sintonizable Tunics-BT modulado por un generador de pulsos de centenas de picosegundos, sin embargo, el ancho de banda resultante no era lo suficiente amplio para abarcar todo el salto de fase proporcionado por la LPG. Como consecuencia, no se observaron cambios apreciables en el perfil temporal del pulso.

Se optó entonces por otra estrategia: utilizar un láser de picosegundos a otra longitud de onda pero con un mayor ancho de banda, y diseñar una LPG de similar anchura

espectral centrada en la longitud de onda del láser. Posteriormente, valiéndose de un método de reconstrucción de frecuencia instantánea, se comparó el perfil de fase del pulso antes y después de haber pasado por la LPG para verificar el proceso de derivación.

En la siguiente sección se exponen los principios de funcionamiento y la implementación del método de reconstrucción de frecuencia instantánea mencionado, el cual se basa en la propagación del pulso por un medio dispersivo. Este método nos ayudará entonces a validar los resultados obtenidos en los experimentos posteriores.

4.2. Reconstrucción del Perfil de Frecuencia Instantánea de un Pulso Óptico Mediante un Medio Dispersivo

Actualmente, la investigación en técnicas de manipulación y detección de la fase de pulsos ópticos tiene una gran relevancia científica. El conocimiento exacto del campo eléctrico en pulsos de femtosegundos puede, por ejemplo, permitir estudiar procesos químicos a nivel atómico o molecular [22,23], caracterización de medios no lineales o en aplicaciones de telecomunicaciones [24].

Si bien ha habido grandes avances en ésta área con técnicas de caracterización de pulsos ultracortos como SPIDER (*Spectral Phase Interferometry for Direct Electric-field Reconstruction*) [25] o FROG (*Frequency Resolved Optical Gating*) [26], estos métodos fueron concebidos para pulsos de femtosegundos de altas intensidades de pico, ya que ambos dependen de procesos no lineales. Los pulsos de picosegundos y nanosegundos, que son los que pueden ser encontrados de forma más común en comunicaciones ópticas, aún necesitan de técnicas no recursivas que permitan la extracción de su perfil de fase.

Con respecto a las comunicaciones por fibra óptica, es oportuno mencionar que con la creciente demanda de envío y recepción de datos, es necesario migrar a tecnologías de comunicaciones que vayan más allá de la simple modulación en amplitud. Esto es, que hagan uso de esquemas de modulación de fase de la portadora, o *Phase-Shift Keying* (PSK) [21]. De esta forma, es posible optimizar el limitado ancho de banda disponible para las telecomunicaciones por fibra óptica, con lo que las técnicas para recuperar la fase en este campo adquieren especial relevancia.

Se expondrá entonces un método relativamente sencillo para obtener el perfil de frecuencia instantánea de un pulso óptico mediante la transformada de Fresnel [27]. El método aquí descrito posee la ventaja de que no es recursivo, y se realiza totalmente en fibra. Debido a que la frecuencia instantánea es la razón de cambio de la fase del pulso respecto al tiempo, a partir de la fase medida con esta técnica será fácil comprobar si se ha producido una derivación fraccional para las dos configuraciones de derivador que se analizarán en esta tesis.

4.2.1 Principio de Funcionamiento e Interpretación de la Transformada de Fresnel

Comenzaremos este apartado con la descripción matemática de un pulso óptico. Recordando la ecuación (2.2.3), un pulso $f(t)$ centrado a la frecuencia óptica ω_0 se puede escribir como:

$$f(t) = |e(t)| \exp j(\varphi(t) + \omega_0 t) = |e(t)| \exp j\Theta(t) \quad (4.2.1)$$

donde $e(t) = |e(t)| \exp(j\varphi(t))$ corresponde a la envolvente compleja del mismo. En un osciloscopio, lo que se puede detectar es sólo la intensidad o amplitud al cuadrado de $e(t)$. En este caso, cualquier información sobre la fase se pierde. Pretendemos en este apartado describir un método para recuperar ésta información de fase $\Theta(t)$ del pulso.

La idea básica consiste en obtener el perfil de intensidad de la señal antes y después de pasar por un medio dispersivo. Dicho medio deberá tener una longitud tal que el campo propagado se encuentre en el régimen de campo cercano (zona de Fresnel), ya que en esta zona el perfil de intensidad conserva aún información sobre la fase del pulso original. Posteriormente, se obtiene la fase mediante un método numérico. Llamaremos al perfil de intensidad del pulso original como $|f(t)|^2$ y al pulso dispersado como $|f_\alpha(t)|^2$. Esquemáticamente, las mediciones que se deben hacer en el laboratorio se muestran en la Figura 4.2.1

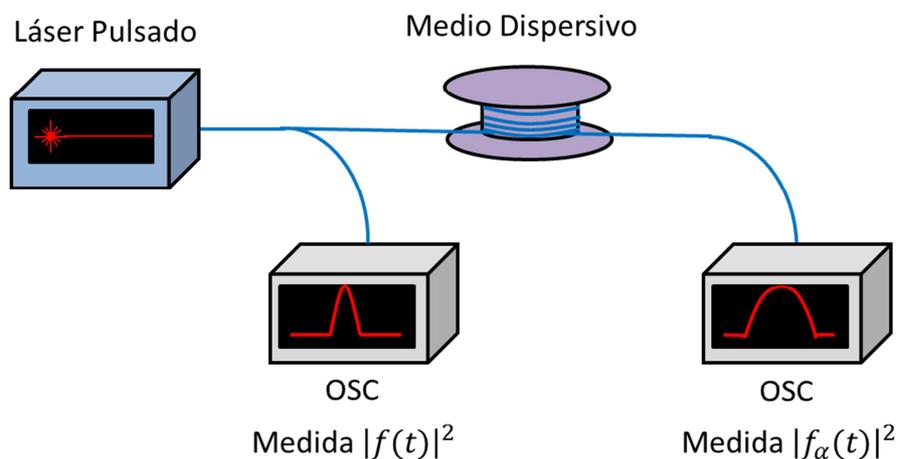


Figura 4.2.1 Medición de perfiles de intensidad del pulso óptico antes y después de atravesar un medio dispersivo utilizando un osciloscopio (OSC) con un canal óptico.

Como mencionábamos antes, el método aquí descrito se basa en la transformada de Fresnel. Para comprender la interpretación física de esta transformada, primero deberemos remitirnos a la expansión en series de Taylor de la constante de propagación en un medio. Trabajando en banda base, tenemos que alrededor de una frecuencia central (en este caso la del láser), la constante de propagación es:

$$\beta(\Omega) = \beta(0) + \frac{d\beta(0)}{d\Omega}\Omega + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta(0)}{d\Omega^2}\Omega^2 + \dots \quad (4.2.2)$$

En la ecuación (4.2.2), la derivada de segundo orden es la responsable de la dispersión de la velocidad de grupo. Para un medio de longitud L , el coeficiente de dispersión de primer orden, al cual convenientemente le llamaremos α , se define como:

$$\alpha = L \frac{d^2\beta(0)}{d\Omega^2} \quad (4.2.3)$$

Para poder aplicar éste método, es de primordial importancia conocer la segunda derivada de la constante de propagación en la región del espectro donde estará la señal a analizar. En nuestro caso, el medio dispersivo será una fibra óptica, por lo que ésta información estará dada por el parámetro de dispersión D [ps/nm km], que viene a ser el equivalente en longitud de onda de $d^2\beta(0)/d\Omega^2$ [ps²/km]. Siendo la relación entre ambos:

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d^2\beta(0)}{d\Omega^2} \quad (4.2.4)$$

Ahora, para un rango de frecuencias limitado, un medio dispersivo puede ser modelado mediante una función de transferencia que tenga un retardo de grupo lineal. Recordemos que el retardo de grupo (ecuación 4.1.3) es la razón de cambio de la respuesta de fase con la frecuencia, por lo que si ésta es lineal, la fase introducida por el medio dispersivo es cuadrática.

Al ser una fibra óptica un medio dispersivo con muy bajas pérdidas de señal por transmisión (típicamente $\leq 0,2$ dB/Km), podemos modelarla mediante una función de transferencia sin pérdidas $S(\Omega)$ que sólo introduzca una fase cuadrática.

$$S(\Omega) = \exp\left[\frac{j\alpha}{2}\Omega^2\right] \quad (4.2.5)$$

Calculando la transformada inversa de Fourier de la ecuación (4.2.5) obtenemos la respuesta impulsiva $s(t)$ de la fibra.

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j\alpha}} \exp\left[\frac{-j}{2\alpha}t^2\right] \quad (4.2.6)$$

Teniendo en mente la ecuación (4.2.6) vayamos ahora a la definición de la transformada de Fresnel. Para una señal unidimensional $f(t)$ como la que representa a nuestro pulso óptico, su transformada de Fresnel de orden α se define como:

$$f_{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left[\frac{-j}{2\alpha}(t-\tau)^2\right] d\tau \quad (4.2.7)$$

Obsérvese que la ecuación (4.2.7) es sencillamente una convolución entre la señal original y la respuesta impulsiva del medio dispersivo $s(t)$. Dicho de otra forma: la transformada de Fresnel viene a ser la señal luego de que se ha propagado a través de un medio dispersivo con coeficiente de dispersión lineal α .

Mediante manipulaciones algebraicas, es posible demostrar que la fase de la señal original $\Theta(t)$ se puede obtener haciendo uso del perfil de intensidad de la transformada de Fresnel $|f_{\alpha}(t)|^2$ y del pulso original $|f(t)|^2$ [27]:

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \int_{-\infty}^t \left[\frac{1}{|f(t')|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial |f_{\alpha}(\tau)|^2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} u(t' - \tau) d\tau \right] dt' \quad (4.2.8)$$

Donde Θ_0 corresponde a una constante de fase arbitraria y $u(t)$ es la función escalón unitario. Nótese que en la ecuación (4.2.8), se incluye la derivada de la intensidad de la transformada de Fresnel con respecto al parámetro α cuando éste es muy pequeño, o lo que es lo mismo, cuando se está en condición de campo cercano. Si bien el parámetro de dispersión lineal se puede hacer pequeño reduciendo la longitud del medio dispersivo, llega un punto en donde la señal dispersada es casi indistinguible de la señal original, por lo que tampoco conviene reducirlo demasiado. El criterio para elegir la longitud de forma que nos aseguremos de estar en la condición de campo cercano es [27]:

$$L \ll \frac{\Delta t^2}{2\pi} \left(\frac{d^2 \beta(0)}{d\Omega^2} \right)^{-1} \quad (4.2.9)$$

Donde Δt es el ancho temporal a mitad de altura en intensidad del pulso. Si α es pequeño, y con el fin de simplificar la ecuación (4.2.8), podemos realizar una aproximación de la derivada parcial de la transformada de Fresnel por una diferencia finita, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial |f_{\alpha}(t)|^2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} \approx \frac{|f_{\alpha}(t)|^2 - |f(t)|^2}{\alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} \quad (4.2.10)$$

Un detalle importante es que tanto el perfil de intensidad del pulso original como el de la transformada de Fresnel deben tener la misma área: esto es, deben portar la misma energía, debido a que la transformada de Fresnel es un caso especial de la Transformada Lineal Canónica o LCT, la cual posee la propiedad de conservar la energía de la señal [28]. Para eso, numéricamente se deben normalizar las áreas de ambos pulsos. Además, para

aplicar el método de recuperación de fase con éxito, es necesario que ambas señales estén sincronizadas; esto se logra mediante la colocación de ambos máximos de intensidad en el mismo sitio de la escala de tiempo. Ambas operaciones se hacen de forma numérica luego de que se han adquiridos las trazas en el laboratorio.

Luego, con respecto al análisis numérico, resulta mucho más sencillo encontrar primero la derivada de la ecuación (4.2.8) y obtener así la frecuencia angular instantánea del pulso (en rad/s). Posteriormente se obtiene la fase mediante una integración. La frecuencia angular instantánea es:

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{1}{|f(t)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial |f_{\alpha}(\tau)|^2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} u(t-\tau) d\tau \quad (4.2.11)$$

Nótese que la ecuación (4.2.11) es una convolución con una función escalón. De menos infinito hasta un tiempo inicial T_0 donde comienza la escala de tiempo de los datos adquiridos, la integral es cero, así como es cero para cualquier valor posterior a t . Por lo tanto, la ecuación (4.2.11), haciendo uso también de la aproximación de la derivada de la intensidad del pulso dispersado de la ecuación (4.2.10), queda:

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{1}{|f(t)|^2} \int_{T_0}^t \frac{|f_{\alpha}(\tau)|^2 - |f(\tau)|^2}{\alpha} d\tau \quad (4.2.12)$$

La ecuación (4.2.12) es la que se implementará en el procesado de datos para obtener la frecuencia angular instantánea del pulso óptico.

4.2.2 Montaje Experimental y Reconstrucción de Fase de un Pulso Láser de picosegundos

El láser utilizado en todos los experimentos tanto de recuperación de fase como de derivación fraccional es un láser de fibra óptica dopada con iterbio. Emite pulsos en régimen *mode-locked*, con una anchura temporal a media intensidad de aproximadamente 24 ps y a una frecuencia de 23,15 MHz. Está centrado a 1039 nm y su ancho de banda a 3 dB es de 0,45 nm. Las características temporales y espectrales de este láser pulsado se representan en la Figura 4.2.2.

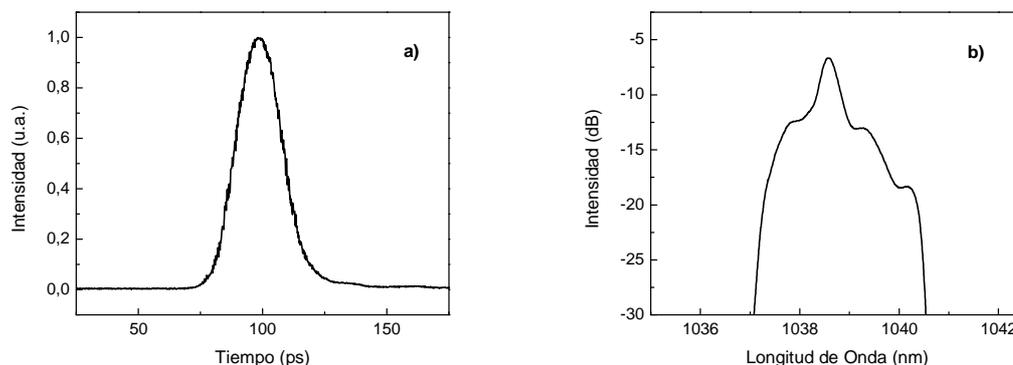


Figura 4.2.2. Pulsos de picosegundos emitidos por el láser de fibra óptica utilizado para los experimentos. Se muestra su perfil de intensidad en el recuadro a) y su espectro en el recuadro b).

Todos los espectros fueron adquiridos con un analizador espectral óptico Yokogawa AQ6370C (600 nm – 1700 nm) con resolución de 20 pm. El osciloscopio utilizado es un Agilent Infiniium DCA-J 86100C, que cuenta con tres canales eléctricos y uno óptico. El canal óptico posee una capacidad de hasta 63 GHz, y posee un fotodiodo capaz de procesar señales de hasta 50 GHz de ancho de banda.

En la Figura 4.2.3 se muestran los perfiles de intensidad del pulso antes y luego de ser dispersado por 44 m de fibra óptica (SM980 de Fibercore, apertura numérica 0,15 y monomodo a partir de 930 nm), la cual posee $-44 \text{ ps}/(\text{nm} \times \text{Km})$ de dispersión a 1039 nm de longitud de onda [29]. Conociendo el parámetro de dispersión D y la longitud de la fibra, se puede calcular el orden de la transformada de Fresnel (ecuación 4.2.3) para la posterior reconstrucción de fase. Ambos pulsos deben ser numéricamente alineados en sus máximos y normalizados por área, como lo requiere el método aquí descrito.

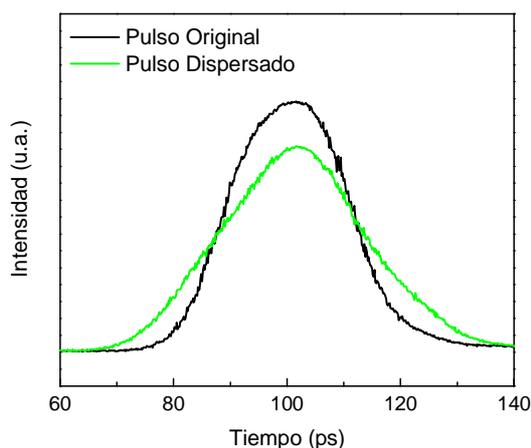


Figura 4.2.3. Pulso a la salida del láser y dispersado por 44 m de fibra óptica SM980 de apertura numérica baja.

La intensidad del pulso original tiene un ancho a mitad de altura de 24,6 ps, mientras que el propagado tiene un ancho a mitad de altura de 32,9 ps. Mediante un ajuste,

se determinó que la forma de la envolvente podía ser aproximada mediante un perfil de tipo secante hiperbólica. La envolvente compleja de esta función se puede escribir de la siguiente manera [22]:

$$e(t) = \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T_0}\right) \exp\left(\frac{-jCt^2}{2T_0^2}\right) \quad (4.2.13)$$

El perfil de intensidad obtenido experimentalmente, se puede ajustar a la ecuación (4.2.13) usando el valor $T_0 = 13$ ps, como se muestra en la Figura 4.2.4.

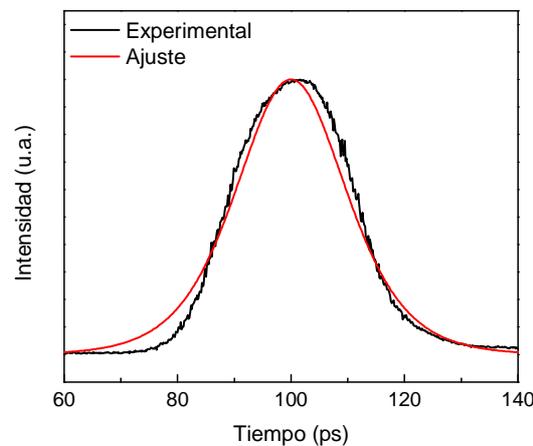


Figura 4.2.4 Ajuste del perfil de intensidad experimental mediante una envolvente de tipo secante hiperbólica.

Luego de aplicar el método aquí descrito, se pudo recuperar el perfil de frecuencia instantánea y de fase del pulso láser; ambos se muestran en la Figura 4.2.5. Observamos que la frecuencia instantánea no es uniforme en el intervalo temporal que dura el pulso, sino que ésta se incrementa. Esto quiere decir que el pulso tiene un “up-chirp”, y por ende un factor de chirp C de signo negativo. El valor del parámetro de chirp fue estimado como $C = -30$ al hacer un ajuste lineal en la zona central del pulso. Posteriormente se reconstruye la fase mediante una integración numérica de los datos experimentales de frecuencia instantánea y se obtiene el perfil parabólico de la Figura 4.2.5-b. Se muestra también la fase teórica de un pulso con un chirp de -30 (ver ecuación 4.2.13), y se observa que se ajusta bien a la fase reconstruida en la parte más energética del pulso.

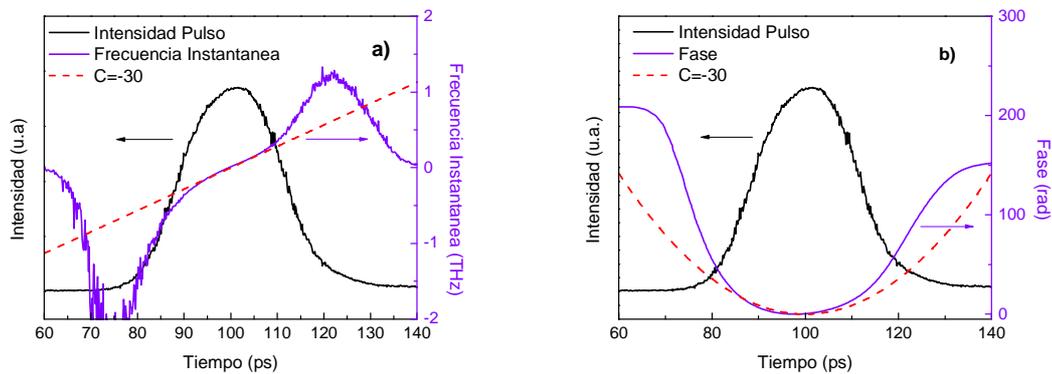


Figura 4.2.5. Perfiles de intensidad del pulso láser junto con sus perfiles de a) frecuencia instantánea y b) fase obtenidos mediante el método de transformada de Fresnel. Obsérvese que la frecuencia aumenta a lo largo del pulso, por lo que resulta un up-chirp y un perfil de fase cuadrático.

Como una forma de corroborar si el valor del chirp era el adecuado, se realizó una simulación de la propagación de un pulso de perfil secante hiperbólica con chirp de -30 por una fibra, con la respuesta impulso $s(t)$ dada por la ecuación (4.2.6), y con los mismos parámetros de dispersión y longitud antes mencionados.

La simulación y los valores experimentales del pulso dispersado se muestran en la Figura 4.2.6.

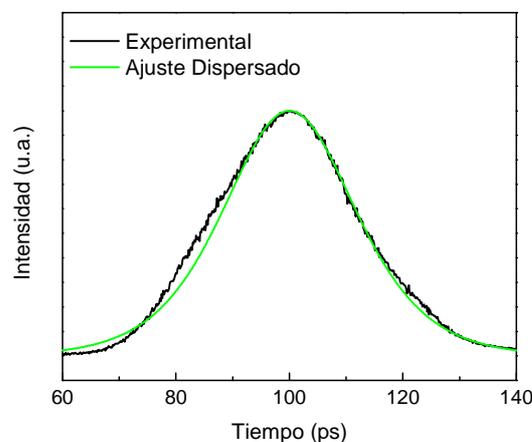


Figura 4.2.6. Perfil de intensidad del pulso láser dispersado por 44 m de fibra SMF980, y un ajuste teórico para un perfil con chirp de tipo secante hiperbólica con un parámetro de chirp de -30 .

De esta manera, podemos concluir que hemos reconstruido con éxito el perfil de frecuencia instantánea del pulso. Es importante destacar la simplicidad de éste método en comparación a otros algoritmos clásicos de recuperación de fase como el Gerchberg-Saxton [30], u otros de búsqueda de gradientes [31] que son inherentemente iterativos, lo cual implica un mayor tiempo de cálculo. A partir del método aquí utilizado estaremos en la

capacidad de estudiar la fase introducida por la función de transferencia de una red de período largo y verificar su comportamiento como un derivador de orden fraccional.

4.3 Derivación Fraccional de Orden 1/2 Mediante una Red de Período Largo Uniforme

Existen actualmente varias maneras en las que se puede sintetizar la derivada de orden entero de una señal óptica. En todos los casos, el comportamiento del dispositivo debe emular el de un derivador ideal, que en el dominio de la frecuencia, y para el orden 1 (derivación ordinaria) es de la forma $H(\omega) = -j\omega$. La mayor parte de las propuestas experimentales de derivadores de orden entero en fibra óptica se puede clasificar en configuraciones con redes de Bragg o con redes de período largo [32]. Sin embargo, en ninguna de estas configuraciones se ha explorado la posibilidad de modificar el diseño para incluir derivadas de orden fraccional.

Los operadores de cálculo fraccional han atraído interés en el área de procesamiento de señales debido a su capacidad de realizar tareas que normalmente no son accesibles a derivadores de orden entero, como por ejemplo la estimación de la magnitud del chirp en un pulso óptico [33], o la posibilidad de encriptar señales mediante transformada fraccional de Fourier [34].

En ésta sección demostraremos de forma experimental cómo una red de período largo uniforme bajo las condiciones correctas de acoplo y ancho de banda puede producir la derivada fraccional de un pulso óptico [13,18]. Si bien existen otras maneras de realizar derivaciones de orden fraccional de forma toda óptica, como por ejemplo con una red de Bragg asimétrica con salto de fase o con micro resonadores de silicio [32,35], se eligió la opción de la LPG no sólo por su simplicidad de fabricación y compatibilidad con los sistemas de fibra óptica, sino también porque se tiene la flexibilidad de contar con muchos modos de la cubierta que se pueden elegir para ajustar el ancho de banda del dispositivo y su longitud de onda de acoplamiento.

4.3.1 Características de Fabricación del Derivador Fraccional

Para funcionar como derivador (sea este fraccional o entero), una LPG debe ser diseñada para que su resonancia coincida con la longitud de onda central del láser, además de poseer un ancho de banda similar. Se utilizó entonces fibra fotosensible dopada con boro (PS980 de Fibercore) para fabricar una red que cumpliera tres parámetros de diseño: una longitud de onda lo más cercana posible a la del láser, un acoplo máximo de 15 dB, y un

ancho espectral lo más reducido posible. El espectro de la red (con sus dos polarizaciones) se muestra en la Figura 4.3.1.

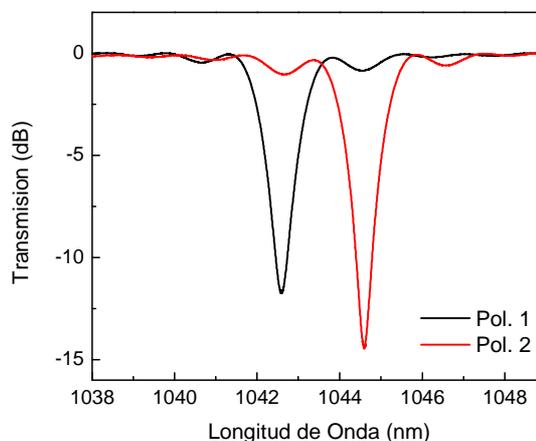


Figura 4.3.1. Espectro de transmisión de una LPG en fibra PS980 para ser utilizada como derivador fraccional, donde Pol. 1 y 2, indican los dos estados posibles de polarización.

La periodicidad de la red era de 187,6 μm , lo cual significa un acoplamiento al modo $\text{LP}_{0,8}$ de la cubierta para ésta longitud de onda (Tabla 3.3.1). Las resonancias de ambas polarizaciones están en 1042,59 nm y 1044,58 nm.. Además, se observó de forma empírica que las resonancias de las redes de período largo en fibra PS980 se desplazaban entre 2 nm y 3 nm hacia longitudes de onda más cortas debido a la reducción de la modulación de índice Δn con el paso del tiempo, por lo que se diseñó la LPG para que en el momento de su grabación su resonancia estuviera más allá de 1040 nm, y así compensar el desplazamiento en longitud de onda al estabilizarse la red. El decaimiento del cambio de índice ha sido estudiado en varios trabajos, y se debe principalmente a efectos térmicos [36-38].

Respecto al acoplamiento, se eligió 15 dB como valor máximo debido a que éste es el valor que debe tener una LPG que funcione como derivador de orden 1/2. El orden fraccional q viene dado por [13]:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_{\text{max}}}\right)^2} \quad (4.3.1)$$

Para una longitud de la LPG de $L=0,866L_{\text{max}}$ se obtiene entonces un derivador de orden 0,5. Esto significa necesariamente que se busca una red de período largo sub-acoplada. Sustituyendo éste valor en la ecuación de transmisión de una LPG, el resultado es una resonancia de aproximadamente 15 dB de acoplamiento.

A la hora de la fabricación, se utilizó una focalización cilíndrica y una velocidad de grabado de un orden de magnitud mayor al que normalmente se utiliza para LPGs de ancho

espectral de decenas de nm. Ésto se hizo con el objetivo de reducir lo máximo posible la constante de acoplamiento y poder conseguir una mayor longitud, y como consecuencia un ancho de banda reducido.

El ancho de banda conseguido de la red es de 1,14 nm para ambas polarizaciones a -3 dB. Éste ancho espectral coincide aproximadamente con el del láser para un nivel de 6 dB por debajo del máximo, con lo que nos aseguramos de que el salto de fase cubra la parte más energética del pulso.

4.3.2 Montaje Experimental Para Derivación Fraccional de un Pulso y Reconstrucción de su Perfil de Fase

El montaje experimental se muestra en la Figura 4.3.2.

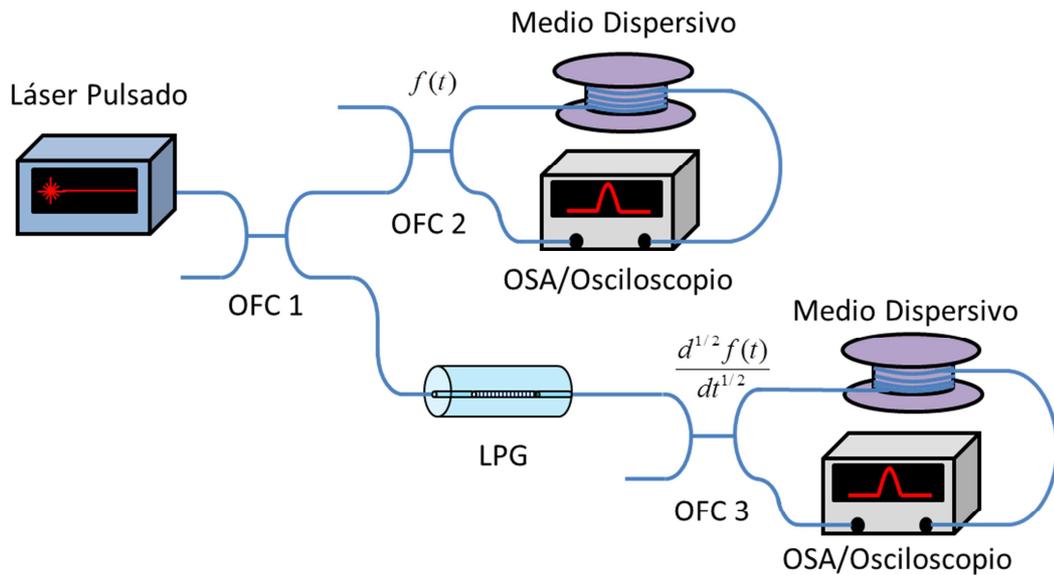


Figura 4.3.2. Montaje experimental para derivación fraccional de pulsos láser mediante una LPG uniforme y su posterior reconstrucción de fase mediante el método de transformada de Fresnel. Todos los acopladores ópticos (OFC) son de tipo 50:50.

Como observamos en el montaje de la Figura 4.3.2, la señal del láser se divide por medio de un acoplador 50:50, que desvía parte de la luz hacia una etapa en donde se registran la intensidad del mismo y de su transformada de Fresnel con el objetivo de reconstruir la fase del pulso original. El resto de la luz va hacia la LPG que se encargará de derivarlo fraccionalmente. A la salida de la red, el pulso ya derivado será dispersado y registrado para aplicar el mismo método de reconstrucción de fase y poder comparar los perfiles de frecuencia instantánea y de fase del pulso original y del pulso derivado.

Es necesario añadir que los pulsos láser estaban polarizados, por lo que antes de la LPG se colocó un controlador de polarización (no mostrado en la figura 4.3.2) para poder elegir cualquiera de las dos polarizaciones de la misma (ver Figura 4.3.1). Además, para proporcionar la señal eléctrica de referencia al osciloscopio, a la salida del láser se había añadido un acoplador 90:10. Así, el 10% de la señal iba hacia un fotodetector Thorlabs de InGaAs, modelo DET01CFC, que se encargaba de proporcionar la señal de 23,15 MHz de referencia al osciloscopio para el disparo del mismo.

Otro detalle que vale la pena mencionar es que la LPG se colocó previamente sobre una base con un tornillo micrométrico, y se había adherido a ésta mediante pegamento de cianoacrilato con el fin de poder sintonizar las resonancias de forma fina mediante estiramiento mecánico, ya que es crucial que la resonancia de la LPG coincida con la portadora del pulso.

De hecho, uno de los mayores retos a la hora de realizar el experimento fue el sintonizar la resonancia de la red, ya que como mostramos en el capítulo anterior, las LPGs son inherentemente sensibles a perturbaciones físicas en su entorno. Por ese motivo, los cambios de temperatura e incluso pequeñas corrientes de aire en el laboratorio provocaban desplazamientos indeseables en la longitud de onda. Por ello, construimos una envoltura que cubría tanto la LPG como la base mecánica en la que estaba montada, para aislarla de influencias externas.

En la Figura 4.3.3-a se muestra el espectro del láser antes y después de pasar por la LPG una vez que se había sintonizado para suprimir la portadora del pulso (1038,56 nm). En la Figura 4.3.3-b se muestran los perfiles temporales correspondientes a ambos espectros obtenidos con el osciloscopio. El lóbulo izquierdo tiene un ancho a mitad de altura de 12,9 ps, mientras que el derecho posee 15,1 ps, y una separación entre ambos de 22,4 ps. La anchura total del pulso derivado es de 36,9 ps en comparación al pulso original que posee un FWHM de 24,6 ps.

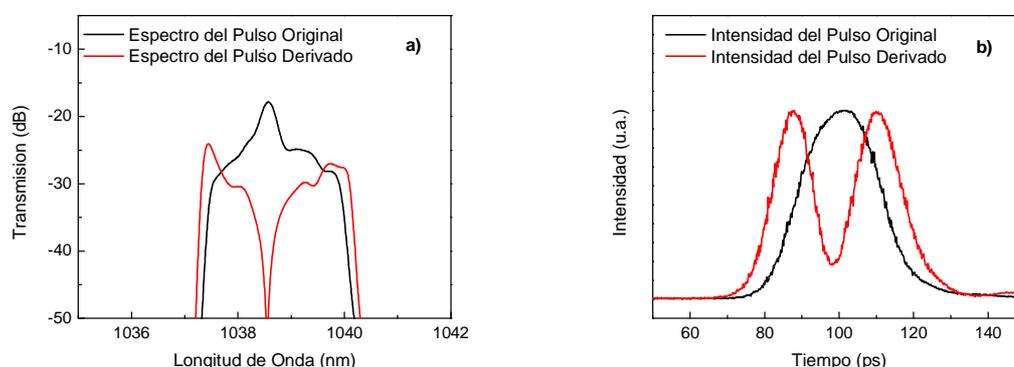


Figura 4.3.3. Derivación fraccional por LPG en a) dominio espectral b) dominio temporal. La separación del espectro en dos lóbulos con distinta fase produce una separación temporal del pulso original.

Una vez estabilizado el espectro tanto de la LPG como del láser, se procedió a realizar las capturas de los pulsos dispersados de la señal original y de su transformada de Fresnel. El pulso original y su transformada son los mismos que fueron expuestos en la Figura 4.2.3 de la sección anterior, utilizando 44 m de Fibra SM980 de apertura numérica baja. Los perfiles de intensidad capturados para el pulso y su derivada se muestran en la Figura 4.3.4-b.

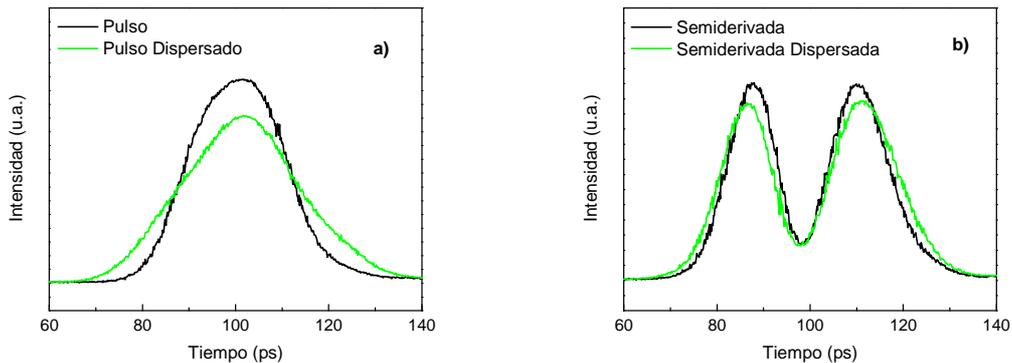


Figura 4.3.4 Perfiles de intensidad obtenidos por dispersión en fibra SM980 para recuperación de fase de a) el pulso láser original y b) el pulso luego de ser filtrado por la LPG.

Luego de realizar el procedimiento numérico de recuperación del perfil de frecuencia instantánea tanto en el pulso original como en el de su derivada, se obtienen los perfiles mostrados en la Figura 4.3.5. Se observa claramente un pico en la frecuencia instantánea recuperada experimentalmente del pulso derivado, siendo esto una señal inequívoca de derivación. Recordemos que la fase es la integral de la frecuencia instantánea en el tiempo, por lo que un pico en la frecuencia significará un escalón en la fase. Esto es, a un escalón de Heaviside en fase, le correspondería una delta de Dirac en frecuencia; ya que el segundo es la derivada del primero. Esto último evidentemente no es posible medirlo con la suficiente precisión, ya que el ancho de banda requerido sería infinito. Por ésta razón, en el perfil de frecuencia instantánea medido se observa un pico con una transición suave, que denota justamente este salto de fase.

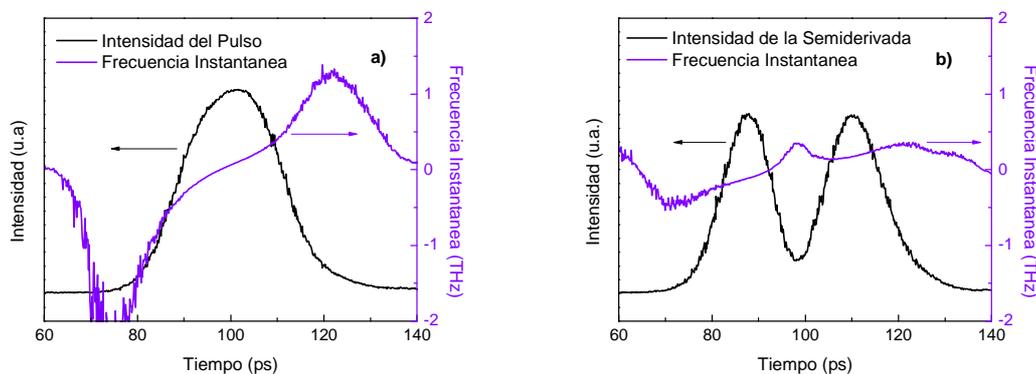


Figura 4.3.5. Perfiles de intensidad y frecuencia instantánea reconstruidos para a) el pulso láser original y b) la semiderivada del pulso. La protuberancia en el perfil de frecuencia instantánea en el recuadro b) confirma el proceso de derivación fraccional.

Al reconstruir, por integración numérica de los perfiles de frecuencia instantánea de la figura 4.3.5, y comparar las fases de cada uno de los pulsos, se observa claramente un salto de fase a mitad del pulso derivado, como lo muestra la Figura 4.3.6.

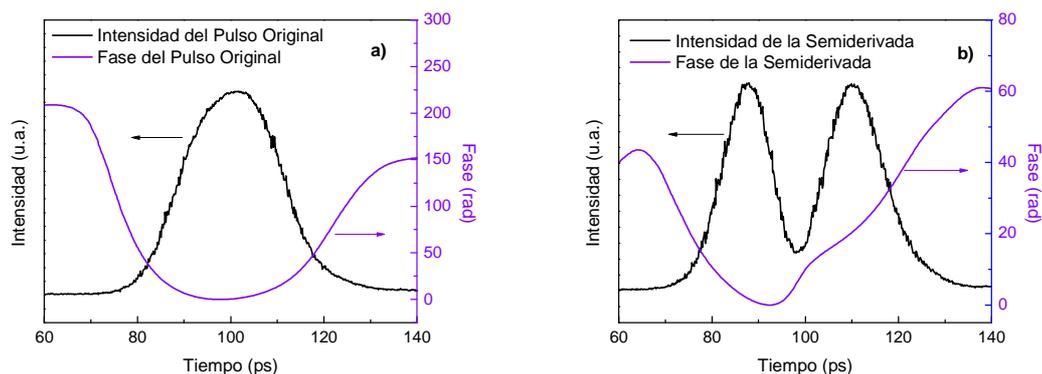


Figura 4.3.6. Perfiles de intensidad y fase de a) el pulso láser original y b) el pulso láser derivado fraccionalmente. Se observa una discontinuidad en el perfil cuadrático de fase luego de que el pulso es derivado por la LPG.

Debido al perfil cuadrático del pulso, es difícil saber exactamente en donde comienza y termina el salto de fase, por lo que la mejor opción para corroborar el orden fraccional del derivador es mediante una simulación. Para realizarlo, se sintetizó un pulso con amplitud igual a la raíz cuadrada del perfil de intensidad del pulso obtenido experimentalmente, y una fase cuadrática con chirp de -30 y ancho temporal $T_0 = 13$ ps. Éste pulso se procesó entonces utilizando un derivador ideal de orden $0,5$. En la Figura 4.3.7 se muestra el resultado de ésta simulación junto con la traza del pulso derivado obtenida en el laboratorio.

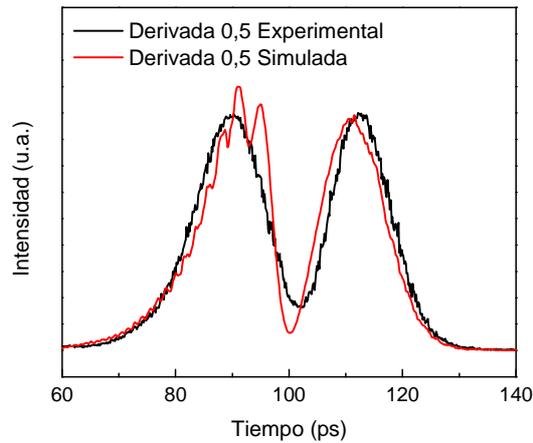


Figura 4.3.7. Perfil de intensidad de la derivada fraccional obtenida experimentalmente y de una simulación de derivada 0,5 ideal.

Una de las diferencias más notorias respecto a la traza experimental en la Figura 4.3.7 es el rizado que se produce en el lóbulo izquierdo de la derivada. Esto es resultado del alto nivel de chirp en el pulso, y no fue posible detectarlo en el laboratorio debido a que las oscilaciones son demasiado rápidas para el limitado ancho de banda del osciloscopio. El insuficiente ancho de banda también permite explicar la caída hasta cero del nivel de intensidad en la simulación, mientras que en la traza experimental no hay suficiente resolución temporal para visualizarlo.

Además de la derivada de orden 0,5, se simularon sus análogos de orden fraccional 0,2 y 0,8 como una manera adicional de corroborar el orden fraccional del derivador. Nuevamente se utilizó el pulso compuesto a partir de la intensidad del pulso original obtenido en el laboratorio y la fase cuadrática con parámetro de chirp de -30 . Mostramos ambas derivadas fraccionales junto con la derivada 0,5 obtenida experimentalmente en la Figura 4.3.8.

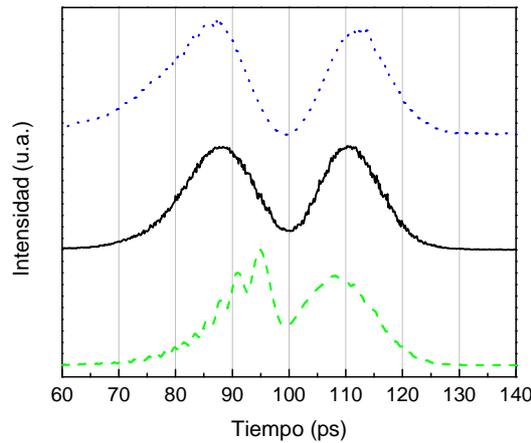


Figura 4.3.8. Derivadas fraccionales simuladas de orden 0,2 (línea verde discontinua) y 0,8 (línea azul punteada) del pulso sintetizado, junto con la derivada de orden 0,5 experimental (línea negra continua). El intervalo temporal entre lóbulos aumenta con el orden fraccional.

Una de las cosas que se observa en la Figura 4.3.8. es el aumento de la separación entre los lóbulos del pulso derivado conforme aumenta el orden fraccional. Para la derivada de orden 0,2 la separación es de 13 ps, para el orden 0,5 es de 21 ps y para la derivada de orden 0,8 es de 26 ps. Se observa además un ligero ensanchamiento de cada uno de los lóbulos al aumentar el orden fraccional. Finalmente, el mínimo de intensidad también se ve afectado, ya que al aumentar el orden de derivación, éste se va acercando cada vez más a cero.

Por otra parte, si fijamos el orden de derivación en 0,5 e intentamos variar el chirp del pulso, se obtienen las trazas mostradas en la Figura 4.3.9.

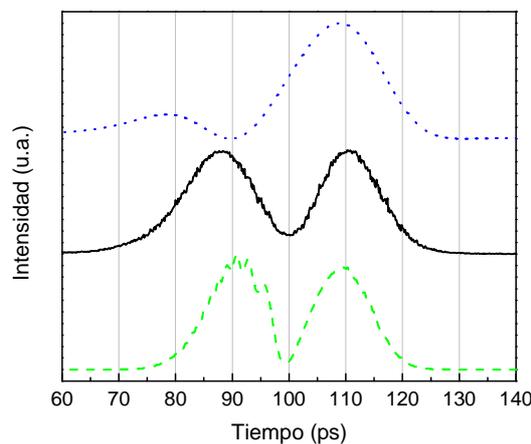


Figura 4.3.9. Derivación de orden 0,5 ante pulsos con distinto chirp: $C = 0$ (línea azul punteada), $C = -30$ (línea negra continua) y $C = -60$ (línea verde discontinua). La traza con un chirp de -30 corresponde a la obtenida experimentalmente.

En la Figura 4.3.9, podemos observar que claramente los perfiles temporales cambian de forma y de duración al aumentar la magnitud del chirp. Si el pulso no tiene chirp, su duración es de unos 46 ps, para el caso de $C = -30$ el ancho es de 35 ps y finalmente para el caso de $C = -60$ el ancho se reduce a 25 ps. Ésto es, la duración del pulso semiderivado se reduce conforme aumenta la magnitud del chirp. Como se mencionó en el marco teórico en base a simulaciones, el perfil de la semiderivada cambia con la magnitud del chirp, más no así con su signo. Para determinar el signo es necesario recurrir directamente a métodos de reconstrucción de fase.

Resulta muy interesante notar que este cambio drástico del perfil temporal de la semiderivada con la presencia de chirp, es algo que sería imposible de observar si el derivador fuese de orden entero [33], ya que la introducción de chirp en una derivada de orden entero no modifica el perfil de intensidad de la señal. Ésta entonces es una ventaja exclusiva de un derivador de orden fraccional en potenciales aplicaciones para detección y corrección de chirp en un láser.

En la siguiente sección se presentará un esquema de derivación fraccional alternativo mediante un interferómetro, que ofrece la ventaja de tener un ancho de banda más fácilmente ajustable en comparación a la LPG uniforme.

4.4 Derivación Fraccional de Orden 1/2 Mediante un Interferómetro Modal Mach-Zehnder

A la hora de procesar señales ópticas mediante derivadores fraccionales, es fundamental utilizar un dispositivo con el ancho de banda adecuado. Esto se debe principalmente a que en el plano puramente experimental, y a diferencia de los derivadores enteros, los derivadores fraccionales no presentan una transición discontinua de fase. Por el contrario su transición de fase siempre es suave y en un dado ancho de banda [32]. Por lo que, si pretendemos usar un dispositivo de este tipo, deberemos tener la precaución de que el ancho de banda del pulso a derivar, sea mucho mayor que el ancho de banda de esta transición suave de fase.

Por otro lado, tampoco debemos olvidarnos que también existe un ancho de banda máximo, que en el caso de las LPGs está determinado por la zona espectral de transmitancia unitaria. Debido a todo esto, una LPG es especialmente apropiada para procesar pulsos desde 1 THz de ancho de banda, mientras que los dispositivos basados en redes de Bragg usualmente son apropiados para señales de un estrecho ancho de banda; típicamente no más de 20 GHz. Intentar obtener un mayor ancho de banda implicaría obtener redes de Bragg demasiado cortas como para que sea asequible en el laboratorio

[32]. Por este motivo, señales con un ancho de banda en el orden del centenar de GHz resultan difíciles de procesar usando por sí solas FBGs o LPGs.

Si bien es cierto que en el capítulo 2 se mostraron LPGs con anchos de banda sub-nanométrico que corresponderían a anchos de banda de 125 GHz, al pensar en una aplicación como derivador fraccional en un entorno real existen dos limitaciones fundamentales para estas LPGs. La primera es el tamaño: mientras mayor sea la dimensión física del dispositivo, más difícil es de implementar en un sistema de telecomunicaciones, especialmente porque tanto las LPGs como las fibras son muy susceptibles a pérdidas de radiación por curvatura [39], la cual sería inevitable en casos de contar con un espacio limitado para la aplicación que se necesite. En segundo lugar, el acoplo a modos altos implica no solo una mayor dificultad de fabricación, sino que además el diámetro modal crece con el orden del modo, por lo que éste se vuelve más vulnerable a perturbaciones del medio.

En la bibliografía se puede encontrar referencias a derivadores de orden entero por medio de interferómetros. En [40] se propone un interferómetro de Michelson en espacio libre para obtener derivadas de orden entero, mientras que en [41] se propone un interferómetro Mach-Zehnder con dos LPGs iguales que es capaz de producir la derivada de orden 1 de un pulso gaussiano de 17 ps.

Mostraremos a continuación cómo el interferómetro modal puede extender su funcionalidad para obtener derivadas fraccionales al variar las longitudes de las LPGs [14]. Tal y como se discutía en el marco teórico, éste dispositivo posee la ventaja de que su ancho de banda se puede elegir mediante una adecuada elección de la distancia entre ambas LPGs y las longitudes de cada una de ellas (ecuación 2.6.6).

4.4.1 Parámetros Constructivos del Interferómetro Modal

Las LPGs se fabricaron nuevamente en fibra fotosensible PS980, con una periodicidad de 189,7 μm , lo cual significa de nuevo un acoplo del modo fundamental al modo $\text{LP}_{0,8}$ de la cubierta. Como se mencionaba en el desarrollo teórico, la primera LPG debe tener coeficiente de transmisión $\chi_1 = 0,5$ (o 3 dB), por lo que se interrumpió el proceso a los pocos períodos; en este caso 28, lo cual da una longitud de 5,3 mm. Esta LPG estaba centrada en 1046,52 nm.

Para obtener la longitud de la segunda LPG, se recurre a la ecuación (2.6.8) y se calcula el valor del acoplamiento χ_2 si se desea un orden de derivación de 0,5. El resultado es que la segunda LPG debe tener un acoplamiento de cubierta al núcleo de 0,67. Debido a que ambas LPGs son grabadas con la misma constante de acoplamiento, la longitud L_2 debe

ser ligeramente más corta que la primera; debe tener una longitud de 25 períodos, o 4,7 mm para que la función de transferencia se aproxime a la de un derivador fraccional. Para ajustar el ancho de banda, se eligió una distancia entre ambas redes de 60 mm, lo que produce un ancho de banda de unos 3 nm, que es el ancho de banda del láser a -10 dB.

En la Figura 4.4.1 se muestra en línea punteada la primera LPG que fue grabada con la ayuda de una fuente de banda ancha. Se observa que posee el acoplamiento necesario de 3 dB, y se encuentra centrada a una longitud de onda ligeramente por encima de la portadora del pulso láser que queremos derivar fraccionalmente. Posteriormente, se bloqueó y se desplazó el haz láser para grabar la segunda LPG a 60 mm de la primera (ver Figura 2.6.1) con una longitud menor para obtener un interferómetro que actúe como derivador fraccional. El espectro de la segunda LPG (aislada de la primer LPG) es imposible de medir ya que al iniciar la grabación ya había luz viajando por los modos $LP_{0,1}$ y $LP_{0,8}$ que comenzaba a interferir inmediatamente al iniciar la grabación de la segunda red.

La traza del interferómetro resultante se muestra también en la Figura 4.4.1. Recalamos que la resonancia central de éste interferómetro es la única que posee la atenuación de 15 dB y el salto de fase necesario para derivar fraccionalmente el pulso. Las resonancias adyacentes también poseen saltos de fase, mas no de la magnitud requerida. Debido a la birrefringencia de la fibra, el interferómetro poseía también dos estados de polarización. Las resonancias centrales en el momento de la grabación estaban ubicadas en 1042,17 nm y 1044,09 nm.

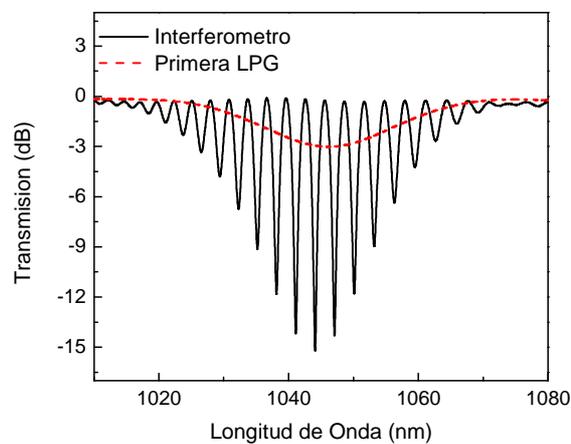


Figura 4.4.1 Medida experimental del espectro en transmisión de un interferómetro modal Mach-Zehnder diseñado para realizar una derivación fraccional de orden 0,5. Se muestra además el espectro en transmisión de la primera de las LPGs que fue grabada.

Como en el caso de la derivación por una LPG uniforme, se diseñó el interferómetro para que tuviera su resonancia central a una longitud de onda un poco más larga que la portadora del láser, para así compensar el desplazamiento espectral al estabilizarse el cambio de índice de las redes de período largo. Al igual que una LPG uniforme, éste

desplazamiento es de unos 2-3 nm para el acoplamiento $LP_{0,8}$ de la fibra óptica PS980. Después de un período de 24 horas, las resonancias centrales se encontraban en 1039,49 nm y 1041,42 nm, lo que significa un desplazamiento de $-2,68$ nm para el primer estado de polarización y de $-2,67$ nm para el segundo estado de polarización.

4.4.2 Montaje Experimental y Demostración de Derivación Fraccional

Debido a que necesitaremos medir el perfil de frecuencia instantánea del pulso y de su derivada utilizando el método de transformada de Fresnel, el montaje será el mismo que en el apartado anterior (Figura 4.3.2), con la salvedad de que en lugar de una LPG sencilla, se colocará el interferómetro Mach-Zehnder (MZI) fabricado a partir de dos LPGs de distinta longitud, tal y como lo muestra la Figura 4.4.2.

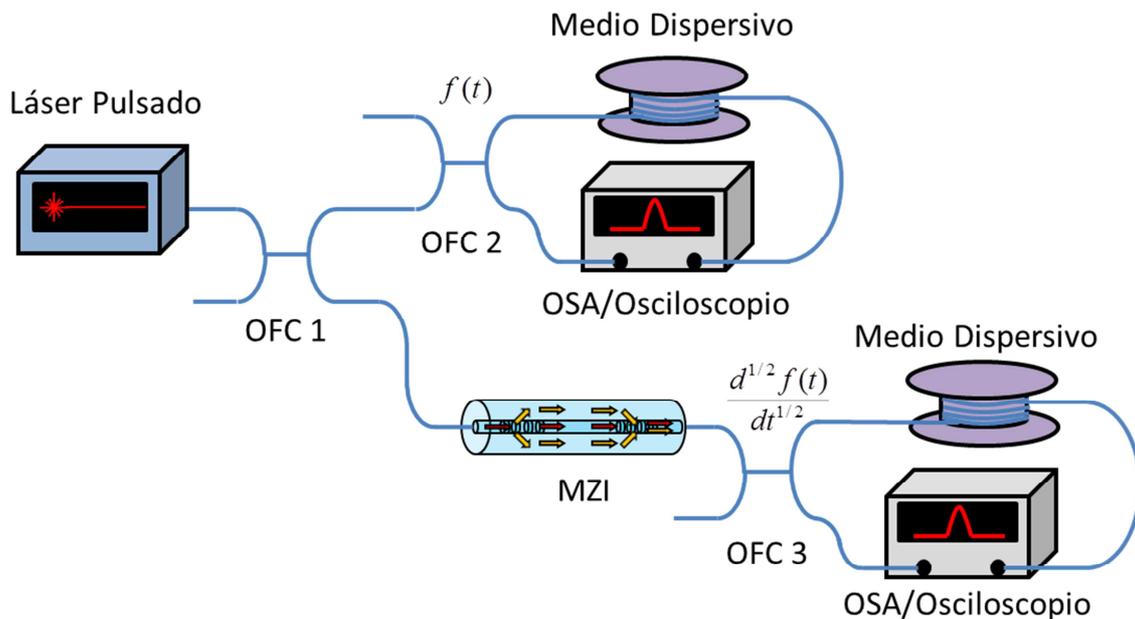


Figura 4.4.2. Montaje para derivación fraccional mediante un interferómetro modal Mach-Zehnder a partir de dos LPGs.

Al igual que en el experimento de semiderivación de la sección 4.3, se colocó el interferómetro en una base metálica con un extremo móvil acoplado a un tornillo micrométrico, y se adhirieron ambos extremos de la fibra óptica mediante pegamento, con el fin de sintonizar mediante estiramiento mecánico con precisión la resonancia central del dispositivo derivador con la longitud de onda central del pulso a derivar (1039,43 nm). En la Figura 4.4.3-a se muestra el espectro del pulso de entrada antes y después de que se sintonizara la resonancia central del interferómetro con la portadora, mientras que en la Figura 4.4.3-b se observan los perfiles de intensidad temporales correspondientes a estos espectros.

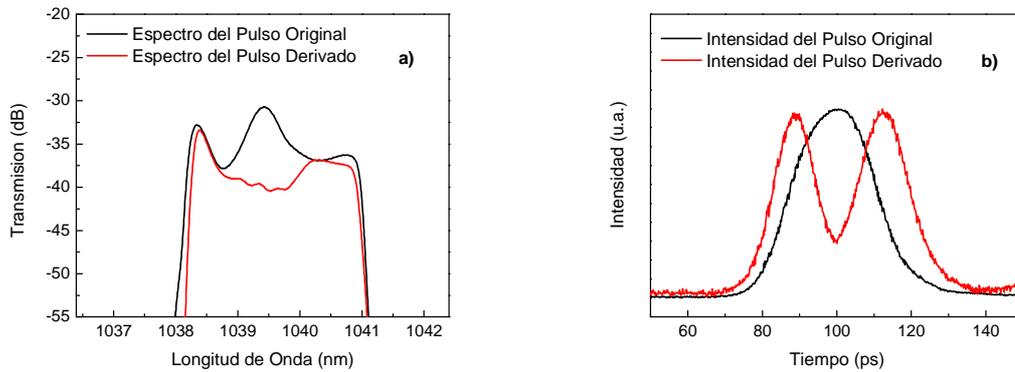


Figura 4.4.3. Derivación de orden fraccional por el interferómetro Mach-Zehnder. a) Espectro del láser y la supresión de su portadora por el derivador b) perfiles temporales del pulso antes y después de ser filtrado por el dispositivo.

En la Figura 4.4.3-a observamos una atenuación de la portadora del pulso óptico de aproximadamente 10 dB, que es menor al acoplamiento máximo observado previamente en la resonancia central del interferómetro. A pesar de eso, lo que es más relevante para obtener una derivación fraccional exitosa es la respuesta en fase del dispositivo en comparación a la respuesta en amplitud [18,32].

Respecto a los perfiles temporales, el FWHM del pulso antes de ser derivado es de 25,54 ps. Luego de ser derivado, posee un ancho total a media altura de 38,63 ps, con una separación entre lóbulos de 23,92 ps. El lóbulo derecho, con 16,1 ps es ligeramente más ancho que el izquierdo que posee 13,32 ps de duración; estos valores concuerdan con los valores obtenidos en la sección anterior.

Una vez más, se procedió a propagar tanto el pulso original como el pulso derivado por un carrete de 44 m de fibra óptica (Fibercore SM980), con un parámetro de dispersión $D = -44 \text{ ps}/(\text{nm} \times \text{Km})$ a 1038 nm. En la Figura 4.4.4 se muestran los perfiles de frecuencia instantánea del pulso antes y después de ser procesado por el interferómetro. Se observan el up-chirp del pulso original y el pico de frecuencia instantánea donde se produce el cambio de fase, entre los dos pulsos de la señal derivada.

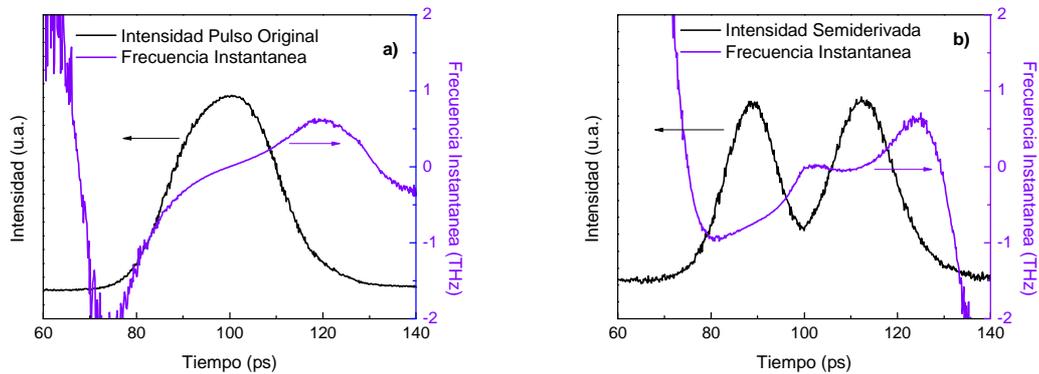


Figura 4.4.4. Perfiles de intensidad y de frecuencia instantánea de a) el pulso láser y b) su derivada fraccional mediante el interferómetro Mach-Zehnder.

Una integración numérica nos produce el perfil de fase de ambos pulsos, mostrados en la Figura 4.4.5.

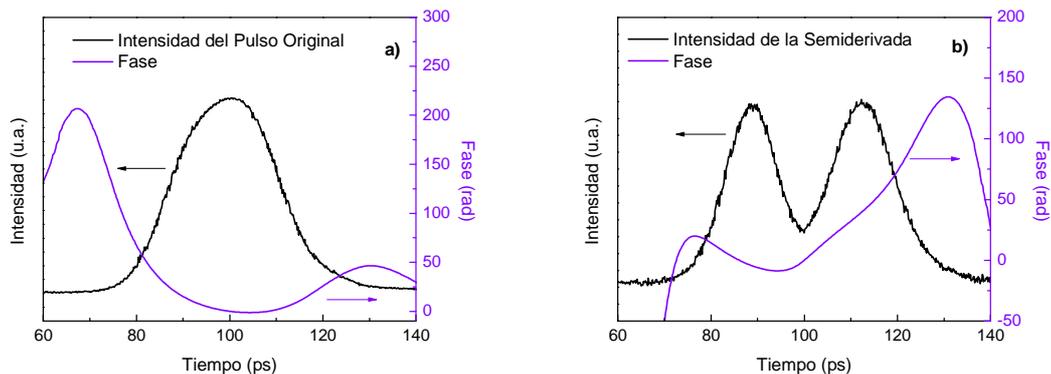


Figura 4.4.5. Perfiles de intensidad y de fase del pulso y su derivada por el MZI. a) El perfil cuadrático confirma un up-chirp del pulso láser. b) salto de fase en el pulso derivado como consecuencia de la derivación fraccional.

Como observamos en la Figura 4.4.5-b se tiene nuevamente el salto de fase característico de un proceso de derivación en el pulso a la salida del interferómetro Mach-Zehnder. Se procedió entonces a realizar una simulación para confirmar nuevamente el funcionamiento como un semiderivador al comparar el perfil derivado experimentalmente con la derivada fraccional ideal de un pulso sintetizado de la misma manera que en el apartado anterior: su amplitud es la raíz cuadrada del perfil de intensidad del pulso a la entrada del interferómetro, y su fase es de perfil cuadrático con un factor de chirp de -30 . La semiderivada experimental y la simulada se muestran en la Figura 4.4.6.

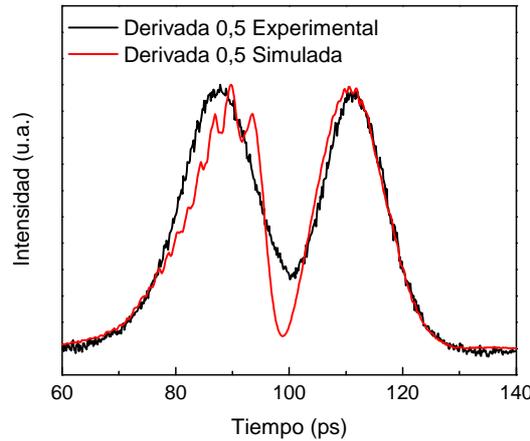


Figura 4.4.6. Perfil de intensidad de la semiderivada obtenida experimentalmente y la simulada con un pulso de perfil de fase cuadrático y chirp de -30 .

Como se esperaba, y al igual que en la configuración de red de período largo uniforme, el perfil simulado de derivada de orden 0,5 se ajusta al que se obtuvo experimentalmente, con lo que demostramos así un derivador con un ancho de banda que, con la elección adecuada de la longitud entre ambas LPGs, puede procesar señales del rango de los 20 GHz hasta 1 THz [14].

A modo de comentario final de la presente sección, presentaremos una posibilidad interesante que ofrece este dispositivo si tomamos en cuenta la opción de variar el índice de refracción externo n_0 . Uno de los primeros trabajos con interferómetros a partir de LPGs se presenta en [42], donde se sumerge el trozo de fibra entre las dos LPGs para sensar el índice de refracción de distintos líquidos.

Ahora, viendo el concepto de sensor de índice de refracción a la inversa, podemos aprovechar la modificación de las características espectrales del dispositivo mediante la aplicación de un índice de refracción externo de forma controlada. Por ejemplo, si utilizamos un líquido de índice igual al de la sílice de la cubierta en la segunda LPG, podemos sintonizar la longitud efectiva de la misma al controlar la longitud d_{liq} que el líquido cubre a la red. Ésta propuesta se ilustra en la Figura 4.4.7:

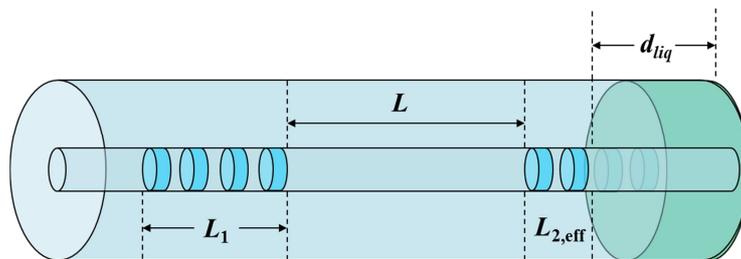


Figura 4.4.7 Propuesta de derivador Mach-Zehnder a partir de dos LPGs con orden fraccional variable. Mediante un control de la distancia que un líquido de alto índice cubre la segunda LPG, se varía su orden fraccional.

Esta modificación al interferómetro permitiría variar la longitud efectiva con la que el modo de la cubierta va a interactuar en la segunda LPG, por lo que lograríamos un derivador fraccional de orden q sintonizable. La energía restante que viaja en el modo de la cubierta más allá de la longitud $L_{2,\text{eff}}$ se vería convertida en modos de radiación debido a que el líquido externo a la LPG coincide con el de la sílice, perdiéndose así la condición de guiado.

4.5 Reconstrucción de Fase de un Pulso Óptico Mediante Derivación Fraccional

Para concluir éste capítulo, se presenta una aplicación concreta de la derivada fraccional en la reconstrucción de la fase de un pulso óptico; para ello haremos uso de la particular forma de la respuesta en amplitud de un semiderivador en uno de sus flancos. Posteriormente, se comparará este método con el que se ha venido utilizando en las secciones anteriores.

Ya en otros trabajos [43,44] del campo de la óptica se ha explorado la capacidad que tienen los derivadores de orden fraccional para convertir las variaciones de fase de una señal en variaciones de intensidad fácilmente medibles. En [45] se estudia la calidad señal-ruido de esta relación entre fase e intensidad para diferentes órdenes de derivación fraccional, y se concluye que un filtro de orden $q = 1/2$ es el que ofrece mejores resultados.

Existe un método de recuperación de fase basado en derivadores de orden 1 desplazados frecuencialmente [46,47], denominado PROUD (*Phase Reconstruction Using Optical Ultrafast Differentiation*). Sin embargo, éste método presenta la desventaja de que necesita del cálculo numérico de una derivada a partir de una traza experimental. Este procedimiento es entonces muy sensible al ruido en la señal, y limita su aplicabilidad a situaciones en donde se requiera medir fases de señales no repetitivas. Utilizando un derivador de orden $1/2$, el perfil de frecuencia instantánea se puede obtener de forma inmediata mediante la división de dos trazas experimentales, por lo que resulta un método más apropiado para medir señales de este tipo [15].

4.5.1 Obtención de la Información de Fase a Partir de la Derivada Fraccional Desplazada en Frecuencia

En los dos experimentos que hemos realizado hasta el momento para derivar un pulso se requiere que su portadora sea eliminada por la resonancia del derivador (sea LPG o MZI) y que el ancho de banda del derivador sea tal que el salto de fase se produzca en un ancho espectral menor al de la señal. Para este método de recuperación de fase usaremos otro enfoque: en vez de utilizar las propiedades de la parte central de la resonancia del filtro, aprovecharemos más bien la forma de su respuesta en amplitud en sus flancos; esto es, centraremos el espectro de la señal a un lado de la resonancia, como se muestra en la Figura 4.5.1. El resultado es entonces una derivada fraccional desplazada en frecuencia.

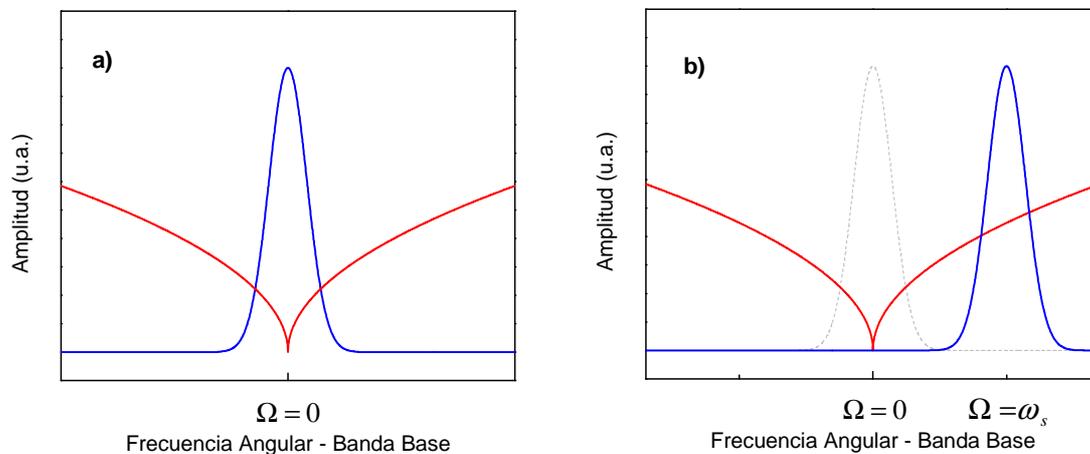


Figura 4.5.1. a) Espectro de un pulso óptico (línea azul) y un filtro actuando como derivador de orden 1/2 (línea roja) en banda base. b) Espectro del pulso desplazado frecuencialmente por un valor conocido ω_s respecto a la resonancia del filtro semiderivador.

Obsérvese en la Figura 4.5.1-b) que la amplitud del espectro $E(\Omega)$ del pulso se encuentra desplazado respecto a la resonancia del derivador una frecuencia ω_s que debe ser conocida. Además, gracias a que no estamos utilizando la parte central del filtro, la respuesta de fase no es de relevancia en este caso [48]. Aprovecharemos solamente la forma que tiene la respuesta en amplitud del derivador.

La idea básica consiste en que al centrar la portadora de un pulso en cualquiera de los dos flancos del derivador, la respuesta en forma de raíz cuadrática le dará un distinto peso a las frecuencias que componen al pulso, haciendo que el perfil de intensidad se vea modificado. Estas variaciones en intensidad serán directamente proporcionales a la derivada de la fase de la envolvente compleja, por lo que una posterior integración en el tiempo nos permitirá recuperar la fase del pulso.

A continuación se presenta el desarrollo matemático necesario para comprender de forma cuantitativa el porqué de esta relación entre la frecuencia instantánea y la intensidad

del pulso luego de ser procesado por uno de los flancos del derivador [49]. Necesitaremos la envolvente del pulso $e(t)$ con su amplitud y su fase, y recordar la propiedad de la transformada de Fourier de desplazamiento en frecuencia, ya que un pulso desplazado espectralmente una cantidad ω_s como el de la Figura 4.5.1-b), en el dominio temporal es:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{E(\Omega - \omega_s)\} = \exp(j\omega_s t)e(t) \quad (4.5.1)$$

Procederemos ahora a averiguar qué le sucede a la expresión en el tiempo de la ecuación (4.5.1) si le aplicamos una derivada fraccional de orden $1/2$ (que en el dominio espectral es equivalente a aplicar un filtro $(-j\omega)^{1/2}$). Partiremos de la ecuación (2.1.38), que es la regla de Leibniz para la diferintegral del producto de dos funciones cualesquiera $f(t)$ y $g(t)$:

$$\frac{d^q [f(t)g(t)]}{dt^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \frac{d^{q-k} f(t)}{dt^{q-k}} \frac{d^k g(t)}{dt^k} \quad (4.5.2)$$

Con el coeficiente binomial generalizado definido en la ecuación (2.1.39), tomaremos el caso en el que el orden de la diferintegral es $q = 1/2$, de forma que la ecuación (4.5.2) nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^{1/2} [f(t)g(t)]}{dt^{1/2}} = \frac{d^{1/2} f(t)}{dt^{1/2}} g(t) + \frac{1}{2} \frac{d^{-1/2} f(t)}{dt^{-1/2}} \frac{dg(t)}{dt} - \frac{1}{8} \frac{d^{-3/2} f(t)}{dt^{-3/2}} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (4.5.3)$$

Ahora, sustituimos la función $f(t)$ por la senoide compleja que desplaza el espectro del pulso, y $g(t)$ por la envolvente del pulso con su amplitud y fase:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(j\omega_s t) \\ g(t) &= e(t) = |e(t)| \exp(j\varphi(t)) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

De esta manera, recordando la ecuación (2.1.46) de la diferintegral de una función exponencial, tenemos que al desarrollar los primeros tres términos de la serie en la ecuación (4.5.3), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^{1/2} [\exp(j\omega_s t)e(t)]}{dt^{1/2}} &\approx \exp[j(\omega_s t + \varphi(t))] \left\{ \frac{\omega_s^{1/2}}{j^{-1/2}} |e(t)| + \frac{\omega_s^{-1/2}}{2j^{1/2}} \left(\frac{d|e(t)|}{dt} + j|e(t)| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_s^{-3/2}}{8j^{3/2}} \left[\frac{d^2 |e(t)|}{dt^2} + 2j \frac{d|e(t)|}{dt} \frac{d\varphi(t)}{dt} + j|e(t)| \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - |e(t)| \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Al tomar el módulo al cuadrado de la expresión (4.5.5), obtenemos un término directamente proporcional a la frecuencia angular instantánea del pulso óptico, que es precisamente lo que estábamos buscando:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{1/2}[\exp(j\omega_s t)e(t)]}{dt^{1/2}} \right|^2 &\approx |e(t)|^2 \omega_s + |e(t)|^2 \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ &+ \frac{1}{4\omega_s} \left[\left(\frac{d|e(t)|}{dt} \right)^2 + |e(t)| \frac{d^2|e(t)|}{dt^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Debido al factor ω_s^{-1} del tercer término de la ecuación (4.5.6), éste puede ser considerado despreciable. Despejamos entonces la razón de cambio de la fase de la envolvente y nos queda:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\left| \frac{d^{1/2}[\exp(j\omega_s t)e(t)]}{dt^{1/2}} \right|^2}{|e(t)|^2} - \omega_s \quad (4.5.7)$$

De esta forma, observamos que la intensidad de una derivada fraccional desplazada en frecuencia nos da información sobre la frecuencia angular instantánea del pulso. La ecuación (4.5.7) nos dice entonces que la razón de cambio temporal de la fase de la envolvente del pulso se puede obtener a partir de una sencilla proporción de dos perfiles de intensidad temporal: el de la derivada fraccional desplazada y el del pulso original. Además, hay que conocer el desplazamiento frecuencial ω_s de la derivada respecto al centro del filtro que la representa.

4.5.2 Montaje Experimental y Reconstrucción de Fase de un Pulso Óptico Mediante el Método de Derivada Fraccional

Para efectuar el experimento, se utilizó el montaje mostrado en la Figura 4.5.2.

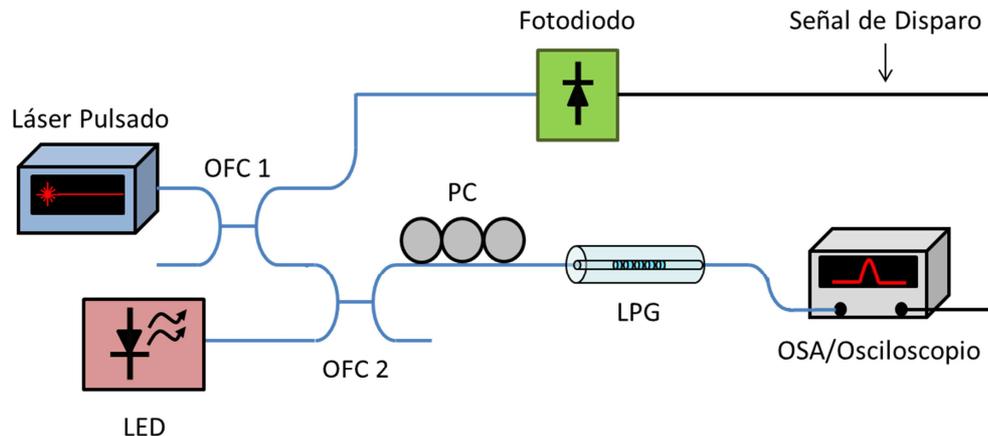


Figura 4.5.2. Montaje para recuperación de fase por semiderivada desplazada en frecuencia de un pulso láser.

Como en ocasiones anteriores, la fuente de pulsos ópticos es un láser de fibra dopada con iterbio con frecuencia central en 1038,5 nm. Un acoplador 90:10 (OFC 1) se utiliza a la salida para enviar parte de la señal a un fotodiodo que permitía darle una señal de referencia o disparo al osciloscopio. Se tiene además un diodo emisor de luz centrado en 1060 nm para monitorizar la posición espectral de la resonancia de la LPG utilizando un acoplador 50:50 (OFC 2), así como un controlador de polarización (PC) para elegir entre las dos resonancias de la red como consecuencia de la birrefringencia de la fibra. La LPG utilizada en este experimento es la misma que fue usada en el apartado 4.2 cuando se demostró la derivación de orden 1/2. Nuevamente, la red estaba acoplada a un montaje con un tornillo micrométrico para poder ajustar la longitud de onda de resonancia.

Ahora, según la ecuación (4.5.7), para recuperar la información de fase necesitamos dos perfiles de intensidad en el dominio del tiempo: el del pulso original sin ser procesado por la LPG, que llamaremos $I_1(t)$:

$$I_1(t) = |e(t)|^2 \tag{4.5.8}$$

y un segundo perfil de intensidad $I_2(t)$ que corresponde a la derivada fraccional desplazada en frecuencia, la cual se obtiene centrando la frecuencia central del láser en alguno de los flancos de la LPG:

$$I_2(t) = \left| \frac{d^{1/2} [\exp(j\omega_s t) e(t)]}{dt^{1/2}} \right|^2 \quad (4.5.9)$$

Además, tenemos que conocer la diferencia entre las frecuencias centrales del láser y de la resonancia de la LPG para obtener ω_s .

En la Figura 4.5.3 se muestra el espectro en transmisión (lineal) de la LPG representado en banda base, junto con las posiciones del espectro donde se centró el láser y se tomaron las capturas del pulso en el osciloscopio para tomar los perfiles de intensidad I_1 e I_2 . A modo de comparación se muestra también la respuesta en amplitud de un derivador fraccional ideal de orden 0,5. Para hacer este ajuste, es necesario considerar que la transmisión máxima del derivador ideal coincide con alguno de los máximos de la LPG, de forma que hay que agregar un factor de normalización.

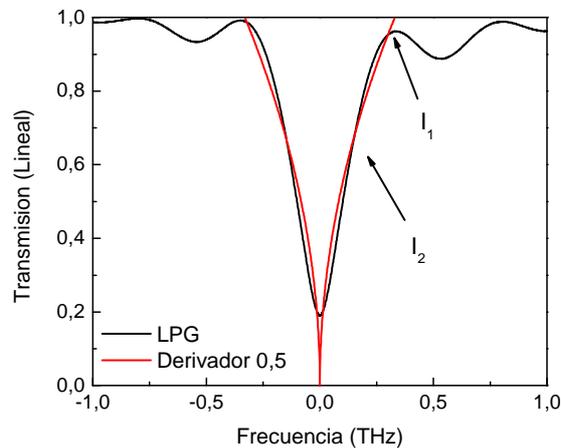


Figura 4.5.3. Posiciones espectrales en donde se realizaron las mediciones de los dos perfiles de intensidad. I_1 corresponde a un máximo de transmisión, mientras que I_2 se ubica en un flanco del derivador fraccional.

En la Figura 4.5.4. se muestran los espectros a la hora de hacer las mediciones de intensidad centrando el láser fuera de la LPG y en un flanco de ésta. El láser estaba centrado en 1036,04 nm, y la LPG se tensionó para que su resonancia se encontrara en 1039,43 nm para la medición de intensidad I_1 . Posteriormente, se relajó la tensión mecánica para poder centrarla en 1037,71 nm, de forma que el flanco de longitudes de onda más cortas (que corresponden a frecuencias mayores) procesara el espectro del pulso.

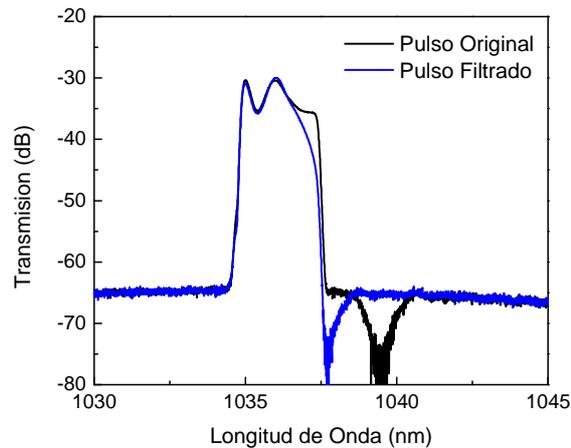


Figura 4.5.4. Espectros utilizados para medir los perfiles de intensidad necesarios para la recuperación de fase. Obsérvese que en este caso se utiliza el flanco de longitudes de onda cortas de la resonancia.

De esta manera, conociendo la longitud de onda central del láser y de la LPG a la hora de procesar el pulso, la diferencia de frecuencia angular ω_s se calculó como 2,936 THz. Los perfiles de intensidad correspondientes a I_1 e I_2 se muestran en la Figura 4.5.5.

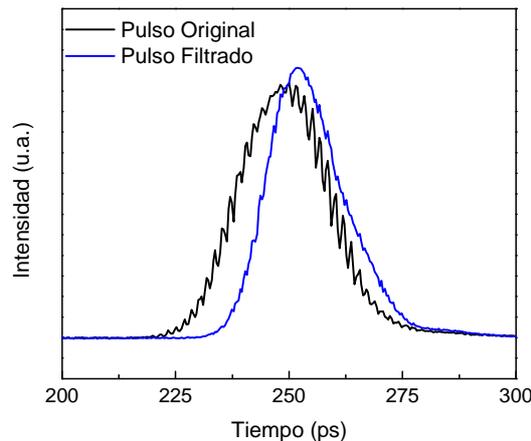


Figura 4.5.5. Perfiles de intensidad normalizados del pulso y su derivada fraccional desplazada en frecuencia. El desplazamiento temporal es efecto del filtro derivador.

Si tomamos de referencia el máximo de cada pulso, ambos están desplazados aproximadamente 6 ps. Como se menciona en [48], es de vital importancia que ambos pulsos estén sincronizados a la hora de llegar al osciloscopio, ya que el efecto de desplazamiento temporal debe ser producido únicamente por el derivador. Para ello, se debe asegurar que el tiempo de retardo respecto a la señal de trigger es el mismo en ambas mediciones.

Aplicando la ecuación (4.5.7) se obtiene el perfil de frecuencia instantánea del pulso, así como su fase después de una integración numérica. Ambas se muestran en la Figura 4.5.6.

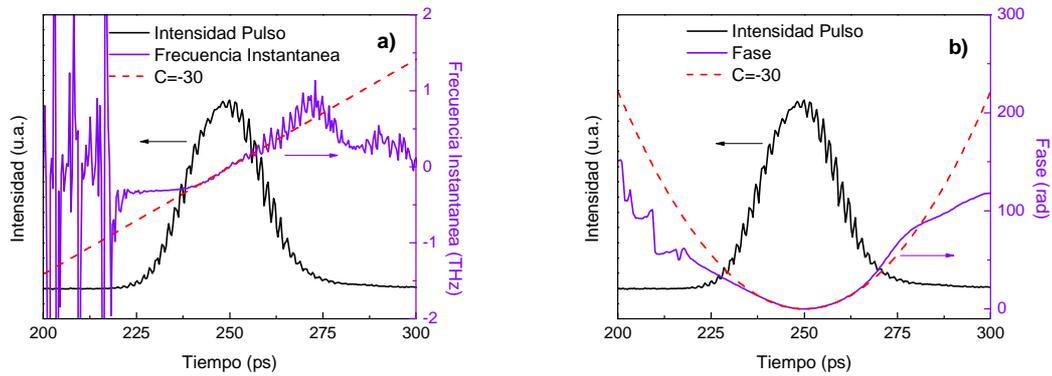


Figura 4.5.6. a) Perfil de frecuencia instantánea y b) perfil de fase reconstruidos a partir del método de semiderivación frecuentemente desplazada con los correspondientes ajustes de $C=-30$. En ambas gráficas se muestran además los perfiles de intensidad del pulso original.

Haciendo un ajuste con los puntos del centro del pulso, obtenemos de nuevo un up-chirp con $C=-30$. En la Figura 4.5.7 se muestran los perfiles de frecuencia instantánea y de fase reconstruidos con el método de transformada de Fresnel y de semiderivada, junto con un ajuste lineal para la frecuencia instantánea, y uno cuadrático para la fase con el parámetro de chirp igual a -30.

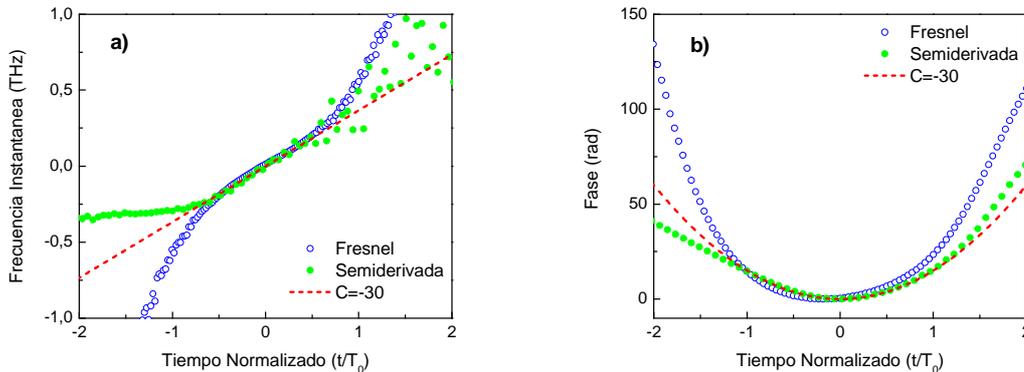


Figura 4.5.7. Comparación entre los dos métodos de reconstrucción de fase. a) Perfil de frecuencia instantánea junto con el perfil de un pulso teórico con chirp de -30. b) perfil de fase reconstruido para ambos métodos junto con el de un pulso de $C=-30$.

Como observamos en la Figura 4.5.7, ambos métodos se aproximan razonablemente bien al perfil de frecuencia instantánea y de fase de un pulso con el up-chirp descrito en su zona central.

De esta manera hemos demostrado la viabilidad de utilizar operadores de cálculo fraccional para procesamiento de señales en fibra óptica [15].

Bibliografía - Capítulo 4

- [1] M. A. Preciado y M. A. Muriel, «Design of an ultrafast all-optical differentiator based on a fiber Bragg grating in transmission,» *Optics Letters*, vol. 33, n° 21, pp. 2458-2460, 2008.
- [2] M. Li, D. Janner, J. Yao y V. Pruneri, «Arbitrary-order all-fiber temporal differentiator based on a fiber Bragg grating: design and experimental demonstration,» *Optics Express*, vol. 17, n° 22, pp. 19798-19807, 2009.
- [3] J. Xu, X. Zhang, J. Dong, D. Liu y D. Huang, «High-speed all-optical differentiator based on a semiconductor optical amplifier and an optical filter,» *Optics Letters*, vol. 32, n° 13, pp. 1872-1874, 2007.
- [4] G. Cariolaro, M. Fregolent, A. Tonello y C. De Angelis, «Generalized Hermite-Gaussian functions and pulse propagation in optical fiber systems,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 36, pp. 853-880, 2004.
- [5] M. Asghari y J. Azaña, «Proposal and analysis of a reconfigurable pulse shaping technique based on multi-arm optical differentiators,» *Optics Communications*, n° 281, pp. 4581-4588, 2008.
- [6] N. Q. Ngo, «Optical integrator for optical dark-soliton detection and pulse shaping,» *Applied Optics*, vol. 45, n° 26, pp. 6785-6791, 2006.
- [7] R. Slavík, Y. Park, N. Ayotte, S. Doucet, T. Ahn, S. LaRochelle y J. Azaña, «Photonic temporal integrator for all-optical computing,» *Optics Express*, vol. 16, n° 22, pp. 18202-18214, 2008.
- [8] K. Oldham y J. Spanier, *The fractional calculus*, Academic Press, 1973.
- [9] R. L. Bagley y P. J. Torvik, «On the fractional calculus model of viscoelastic behavior,» *Journal of Rheology*, vol. 30, n° 133, pp. 133-155, 1986.
- [10] M. F. Silva y J. A. Tenreiro, «Fractional order PD joint control of legged robots,» *Journal of Vibration and Control*, vol. 12, n° 12, pp. 1483-1501, 2006.
- [11] L. M. Bernardo y O. D. Soares, «Fractional Fourier transforms and imaging,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, n° 10, pp. 2622-2626, 1994.
- [12] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky y M. Alper-Kutay, *The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing*, Wiley, 2001.
- [13] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Long-period grating assisted fractional differentiation of highly chirped light pulses,» *Optics Communications*, n° 363, pp. 37-41, 2016.
- [14] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Experimental demonstration of fractional order differentiation using a long-period grating-based in-fiber modal interferometer,» *Optics Communications*, n° 380, pp. 35-40, 2016.

- [15] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Instantaneous frequency measurement by in-fiber 0.5th order fractional differentiation,» *Optics Communications*, n° 371, pp. 89-92, 2016.
- [16] M. Kulishov y J. Azaña, «Long-period fiber gratings as ultrafast optical differentiators,» *Optics Letters*, vol. 30, n° 20, pp. 2700-2702, 2005.
- [17] R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, R. Morandotti y J. Azaña, «Ultrafast all-optical differentiators,» *Optics Express*, vol. 14, n° 22, pp. 10699-10707, 2006.
- [18] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Design of an ultra-broadband all-optical fractional differentiator with a long-period fiber grating,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 571-576, 2011.
- [19] B. Costa, D. Mazzoni, M. Puleo y E. Vezzoni, «Phase shift technique for the measurement of chromatic dispersion in optical fibers using LED's,» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vols. %1 de %2MTT-30, n° 10, pp. 1497-1503, 1982.
- [20] C. Baker, Y. Lu y X. Bao, «Chromatic-dispersion measurement by modulation phase-shift method using a Kerr phase-interrogator,» *Optics Express*, vol. 22, n° 19, pp. 22314-22319, 2014.
- [21] K. P. Ho, Phase-modulated optical communication systems, Estados Unidos: Springer, 2005.
- [22] J. C. Diels y W. Rudolph, Ultrashort laser pulse phenomena, Academic Press, 2005.
- [23] A. V. Oppenheim y J. S. Lim, «The importance of phase in signals,» *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, n° 5, pp. 529-541, 1981.
- [24] I. A. Walmsley y C. Dorrer, «Characterization of ultrashort electromagnetic pulses,» *Advances in Optics and Photonics*, n° 1, pp. 308-437, 2009.
- [25] C. Iaconis y I. A. Walmsley, «Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses,» *Optics Letters*, vol. 23, n° 10, pp. 792-794, 1998.
- [26] D. J. Kane y R. Trebino, «Characterization of arbitrary femtosecond pulses using frequency-resolved optical gating,» *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, n° 2, pp. 571-579, 1993.
- [27] C. Cuadrado-Laborde, A. Carrascosa, P. Pérez-Millán, A. Díez, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Phase recovery by using optical fiber dispersion,» *Optics Letters*, vol. 39, n° 3, pp. 598-601, 2014.
- [28] J. J. Healy y J. T. Sheridan, «Fast linear canonical transforms,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 27, n° 1, pp. 21-30, 2010.
- [29] J. Abreu-Afonso, «Fibras microestructuradas y fuentes de luz basadas en efectos no lineales,» *Tesis Doctoral, Universidad de Valencia*, p. 43, 2014.
- [30] R. W. Gerchberg y W. O. Saxton, «A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures,» *Optik*, vol. 35, n° 2, pp. 237-246, 1972.

-
- [31] J. R. Fienup, «Phase retrieval algorithms: a comparison,» *Applied Optics*, vol. 21, n° 15, pp. 2758-2769, 1982.
- [32] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «In-fiber all-optical fractional differentiator,» *Optics Letters*, vol. 34, n° 6, pp. 833-835, 2009.
- [33] C. Cuadrado-Laborde, J. Lancis y M. V. Andrés, «Proposal of time-resolved chirp-measurement through all-optical in-fiber mathematical operators,» *Optical and Quantum Electronics*, n° 42, pp. 97-108, 2010.
- [34] C. Cuadrado-Laborde, R. Duchowicz, R. Torroba y E. E. Sicre, «Fractional Fourier transform dual random phase encoding of time-varying signals,» *Optics Communications*, n° 281, pp. 4321-4328, 2008.
- [35] B. Jin, J. Yuan, C. Yu, X. Sang, Q. Wu, F. Li, K. Wang, B. Yan, G. Farrell y P. K. Wai, «Tunable fractional-order photonic differentiator based on the inverse Raman scattering in a silicon microring resonator,» *Optics Express*, vol. 23, n° 9, pp. 11141-11151, 2015.
- [36] T. Erdogan, V. Mizrahi, P. J. Lemaire y D. Monroe, «Decay of ultraviolet-induced fiber Bragg gratings,» *Journal of Applied Physics*, vol. 76, n° 1, pp. 73-80, 1994.
- [37] D. L. Williams y R. P. Smith, «Accelerated lifetime tests on UV written intra-core gratings in boron germania codoped silica fibre,» *Electronics Letters*, vol. 31, n° 24, pp. 2120-2121, 1995.
- [38] S. R. Baker, H. N. Rourke, V. Baker y D. Goodchild, «Thermal decay of fiber Bragg gratings written in boron and germanium codoped silica fiber,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, n° 8, pp. 1470-1477, 1997.
- [39] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, Academic Press, 1999.
- [40] Y. Park, J. Azaña y R. Slavík, «Ultrafast all-optical first and higher-order differentiators based on interferometers,» *Optics Letters*, vol. 32, n° 6, pp. 710-712, 2007.
- [41] R. Slavík, Y. Park, D. Krcmarík y J. Azaña, «Stable all-fiber photonic temporal differentiator using a long-period fibergrating interferometer,» *Optics Communications*, n° 282, pp. 2339-2342, 2009.
- [42] E. M. Dianov, S. A. Vasiliev, A. S. Kurkov, O. I. Medvedkov y V. N. Protopopov, «In-fiber Mach-Zehnder interferometer based on a pair of long-period gratings,» de *22 Conferencia Europea en Comunicaciones Ópticas (ECOC)*, Oslo, 1996.
- [43] B. A. Horwitz, «Phase image differentiation with linear intensity output,» *Applied Optics*, vol. 17, n° 2, pp. 181-186, 1978.
- [44] J. Lancis, T. Szoplik, E. Tajahuerce, V. Climent y M. Fernández-Alonso, «Fractional derivative Fourier plane filter for phase-change visualization,» *Applied Optics*, vol. 36, n° 29, pp. 7461-7464, 1997.
- [45] E. Tajahuerce, T. Szoplik, J. Lancis, V. Climent y M. Fernandez, «Phase-object fractional differentiation using Fourier plane filters,» *Pure and Applied Optics*, n° 6, pp. 481-490, 1997.
- [46] F. Li, Y. Park y J. Azaña, «Complete temporal pulse characterization based on phase reconstruction

using optical ultrafast differentiation (PROUD),» *Optics Letters*, vol. 32, n° 22, pp. 3364-3366, 2007.

[47] F. Li, Y. Park y J. Azaña, «Linear characterization of optical pulses with durations ranging from the picosecond to the nanosecond regime using ultrafast photonic differentiation,» *Journal of Lightwave Technology*, vol. 27, n° 21, pp. 4623-4633, 2009.

[48] C. Cuadrado-Laborde, M. V. Andrés y J. Lancis, «Self-referenced phase reconstruction proposal of GHz bandwidth non-periodical optical pulses by in-fiber semi-differintegration,» *Optics Communications*, n° 284, pp. 5636-5640, 2011.

Capítulo 5 – Conclusiones

Durante la estancia con el Grupo de Fibras Ópticas de la Universidad de Valencia se tuvo la oportunidad de trabajar y aprender acerca del funcionamiento de fibras ópticas y otros dispositivos relacionados con la tecnología fotónica. El trabajo se enfocó principalmente en el diseño y la fabricación de redes de difracción, con especial énfasis en las redes de período largo de anchos de banda de pocos nanómetros.

El principal objetivo de obtener estas redes espectralmente estrechas fue caracterizarlas como derivadores de orden fraccional todo ópticos, y utilizar éstos derivadores en la solución de un problema físico concreto. Además, se realizaron pruebas de sensibilidad del espectro de éstas LPGs ante distintas variables físicas, con posibles aplicaciones en sensores.

A continuación se mencionan las principales conclusiones a las que hemos llegado a partir de esta tesis.

5.1 Conclusiones

Se describió la teoría de redes de difracción y de cálculo fraccional, con el objetivo de contar con las herramientas necesarias para simular el comportamiento espectral tanto de una LPG subacoplada como de un interferómetro Mach-Zehnder con dos LPGs asimétricas. Se verificó en las simulaciones que ambos dispositivos funcionan como derivadores de orden fraccional de un pulso de picosegundos si el ancho de banda del pulso es similar al del dispositivo analizado.

Mediante grabación de redes de Bragg, se obtuvieron de forma experimental los índices efectivos de los modos $LP_{0,n}$ de la cubierta para tres tipos de fibras ópticas. Mediante el acoplo a modos de orden superior, y el uso de bajas densidades de energía en el proceso de grabación, se obtuvieron redes de período largo espectralmente estrechas (~ 1 nm) para dos de las fibras utilizadas: la SM1500(6.4/125) y la SM1500(4.2/125), ambas de apertura numérica alta.

Varias de las redes espectralmente estrechas fabricadas fueron sometidas a pruebas de tensión mecánica axial, temperatura e índice de refracción. El estrecho ancho de banda de estas redes representa una ventaja en posibles aplicaciones de sensores, ya que poseen flancos de mayor pendiente alrededor de la resonancia, permitiendo esto una mejor

resolución. Además, un conocimiento de la sensibilidad ante estas variables permite estabilizar y sintonizar las redes para otro tipo de aplicaciones.

El estudio ante variables físicas se realizó sólo con un modo para cada una de las dos fibras de apertura numérica alta. Las mejores sensibilidades fueron obtenidas para el modo $LP_{0,18}$ de la fibra SM1500(4.2/125) en las tres pruebas. Los valores obtenidos fueron de 91,2 pm/°C para un rango de temperaturas de -20°C a 80°C, 1,01 pm/με en la de tensión mecánica para deformaciones de 0 με a 3000 με, y de -1645 nm/RIU en la prueba de índice de refracción para índices externos entre 1,420 a 1,430.

Respecto a los experimentos de cálculo fraccional, se caracterizó una red de período largo uniforme como derivador fraccional al medir su respuesta en fase mediante el esquema MPS (*Modulation Phase Shift*). Se determinó que el dispositivo presentaba el salto de fase característico de un derivador fraccional centrado en su frecuencia de resonancia. El salto de fase medido se daba en un intervalo de frecuencias que coincidía con el ancho de banda a 3 dB de la LPG.

Posteriormente, se logró obtener la derivada de orden 1/2 de un pulso láser de 24 ps mediante las dos configuraciones analizadas en la teoría: red de período largo uniforme y MZI asimétrico con dos LPGs en serie. La derivación fraccional fue confirmada al observar una discontinuidad en los perfiles de fase reconstruidos para los pulsos derivados, y el orden de derivación fue obtenido mediante un ajuste a los datos experimentales.

Para reconstruir la fase tanto de los pulsos derivados como de los pulsos obtenidos directamente del láser, se utilizó un método basado en la propagación por un medio dispersivo. Se determinó además que los pulsos presentaban un factor de chirp de -30, produciendo que los pulsos derivados fraccionalmente tuvieran un perfil de intensidad en forma de dos lóbulos simétricos.

Finalmente, se implementó de forma experimental un método de reconstrucción de fase de pulsos láser basado en derivación de orden 1/2, demostrando por primera vez la conveniencia de utilizar operadores de cálculo fraccional para resolver problemas en el campo de la fibra óptica. Este método se validó al comparar los resultados con el método antes descrito de obtención de fase a partir de un medio dispersivo.

Por otra parte, al comparar los dos métodos de reconstrucción de fase implementados, se puede decir que el más adecuado para reconstruir señales ultrarrápidas directamente en el laboratorio es el de derivación de orden fraccional, ya que requiere únicamente la comparación de dos trazas experimentales, sin necesidad de normalizaciones y de integraciones numéricas, como sí lo requiere el método alternativo mediante transformada de Fresnel.

5.2 Trabajo Futuro

La presente tesis deja varias líneas de investigación abiertas. La más obvia es la que concierne al integrador fotónico de orden fraccional. En la literatura se pueden encontrar múltiples referencias a integradores de orden entero, sin embargo, hasta donde el autor conoce, existe una única propuesta de un integrador de orden fraccional todo óptico [1]. Sería interesante lograr demostrar el funcionamiento de éste dispositivo (basado en una FBG apodizada) o bien proponer vías alternativas de obtener un integrador fraccional fotónico, preferiblemente compatible con fibra óptica.

Una vez caracterizados los elementos derivadores e integradores de orden fraccional todo ópticos, se estaría en la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales fraccionales en tiempo real. Una posible aplicación que involucra a ambos dispositivos es el control automático mediante lazos de control de tipo PID (*Proportional-Integral-Derivative*) fraccional. El contar con elementos derivadores e integradores de orden arbitrario flexibilizaría el diseño, teniendo la posibilidad de alcanzar perfiles de respuesta inaccesibles a controladores PID de orden entero. Las estrategias de control que sustituyen un elemento integrador de orden entero por uno fraccional aumentan la estabilidad y disminuyen el retardo para llegar a un punto de operación deseado [2]. De hecho, para aplicaciones industriales más inmediatas, ni siquiera es necesario contar con sistemas fotónicos: es posible implementar derivadores o integradores fraccionales mediante redes de resistencias y capacitores [3,4].

Aprovechando las propiedades de los modos de la cubierta, vale la pena estudiar también la posibilidad de variar el orden fraccional de un interferómetro Mach-Zehnder con dos LPGs tal y como se describe en la Figura 4.4.7; ésto es, variar la longitud efectiva de la segunda LPG del dispositivo mediante un líquido de índice externo mayor al de la cubierta y así sintonizar el orden de derivación.

También es posible vislumbrar algunas aplicaciones de sensores a partir de las LPGs espectralmente estrechas. Un estudio más detallado de los desplazamientos en longitud de onda de los acoplos a cada uno de los modos de la cubierta permitiría elegir el más sensible de todos ellos ante una variable física en particular. En conjunto con el estrecho ancho de banda, se podría alcanzar resoluciones similares o mejores a los sensores basados en fibra óptica actualmente disponibles.

En el campo de las telecomunicaciones, existe la posibilidad de utilizar las LPGs estrechas como selectores de canal en un esquema WDM. Mediante una posterior mejora del montaje de grabado de redes, sería posible llegar a fabricar LPGs con un ancho de banda de 100 GHz o 0,8 nm en la banda del erbio, que es precisamente el ancho de banda estándar que se utiliza actualmente para los canales de telecomunicaciones por fibra óptica [5]. Otra opción interesante para las LPGs estrechas es la supresión de una banda lateral de

una señal modulada para la generación de SSB (*Single-Side Band*) con el objetivo de ahorrar ancho de banda en un canal de información.

Respecto a las aplicaciones de conformado de pulsos ultrarrápidos, existe toda una gama de posibilidades si se cuenta con elementos integradores y derivadores. Por ejemplo, mediante un integrador es posible generar pulsos cuadrados a partir de pulsos gaussianos, los cuales son de gran interés en óptica no lineal. Por otro lado, la derivada de pulsos cuadrados permitiría producir trenes de pulsos temporalmente muy cortos, asumiendo que los tiempos de subida y bajada de los pulsos cuadrados sean suficientemente rápidos, y que se disponga de un dispositivo derivador con suficiente ancho de banda para procesar estos cambios bruscos de la señal de entrada.

Como comentario final, al autor le gustaría destacar el enorme potencial que ofrecen las herramientas de cálculo fraccional, que al igual que otras ramas de la matemática fueron vistas en sus inicios como meras curiosidades. Y ahora que tratamos el tema de las curiosidades, y dado el hecho que las diferintegrales se pueden definir para órdenes arbitrarios, es imposible no hacerse la pregunta: ¿Tiene significado físico o utilidad la siguiente expresión?

$$\frac{d^{\sqrt{-1}} f(x)}{dx^{\sqrt{-1}}} \quad (5.1.1)$$

Si bien existen investigaciones recientes acerca de propiedades matemáticas y posibles usos de las diferintegrales de orden complejo [6-8], este tema queda evidentemente fuera del alcance de esta tesis. Sin embargo, con algo de entusiasmo y un poco de suerte, tal vez podremos ver algunas respuestas a las cuestiones planteadas en este apartado en un futuro no muy lejano.

Bibliografía - Capítulo 5

- [1] C. Cuadrado-Laborde y M. V. Andrés, «Proposal and design of an in-fiber all-optical fractional integrator,» *Optics Communications*, n° 283, pp. 5012-5015, 2010.
- [2] M. S. Takyar y T. T. Georgiou, «The fractional integrator as a control design element,» de *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Estados Unidos, 2007.
- [3] I. Podlubny, I. Petras, B. M. Vinagre, P. O'Leary y L. Dorcak, «Analogue realizations of fractional-order controllers,» *Nonlinear Dynamics*, n° 29, pp. 281-296, 2002.
- [4] T. Tembulkar, S. Darade, S. R. Jadhav y S. Das, «Design of fractional order differentiator and integrator circuit using RC cross ladder network,» *International Journal of Emerging Engineering Research and Technology*, vol. 2, n° 7, pp. 127-135, 2014.
- [5] S. Kumar y M. J. Deen, *Fiber Optic Communications - Fundamentals and Applications*, Reino Unido: John Wiley and Sons, 2014.
- [6] A. A. Kilbas y S. A. Marzan, «Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions,» *Differential Equations*, vol. 41, n° 1, pp. 84-89, 2005.
- [7] R. Andriambololona, R. Tokiniaina y H. Rakotoson, «Definitions of complex order integrals and complex order derivatives using operator approach,» *International Journal of Latest Research and Technology*, vol. 1, n° 4, pp. 317-323, 2012.
- [8] J. A. Tenreiro-Machado, «Optimal controllers with complex order derivatives,» *Journal of Optimization Theory and Applications*, n° 156, pp. 2-12, 2013.

Publicaciones

Publicaciones en Revistas Científicas

- [1] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Long-period grating assisted fractional differentiation of highly chirped light pulses,» *Optics Communications*, nº 363, pp. 37-41, 2016.
- [2] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz, A. Díez y M. V. Andrés, «Instantaneous frequency measurement by in-fiber 0.5th order fractional differentiation,» *Optics Communications*, nº 371, pp. 89-92, 2016.
- [3] L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «Experimental demonstration of fractional order differentiation using a long-period grating-based in-fiber modal interferometer,» *Optics Communications*, nº 380, pp. 35-40, 2016.

Trabajos en Redacción

- [4] M. Delgado-Pinar, Q. Shi, L. Poveda-Wong, E. Delgado-Pinar, B. Xu, J. Zhao, J. L. Cruz y M. V. Andrés, «DNA-hybridization fiber-optic biosensor using a narrow bandwidth long period grating,» *En redacción*.
- [5] L. Poveda-Wong, J. L. Cruz, M. Delgado-Pinar, X. Roselló-Mechó, A. Díez y M. V. Andrés, «Fabrication of long period fiber gratings of subnanometric bandwidth,» *En redacción*.

Comunicaciones en Congresos

1. L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J.L. Cruz, A. Díez y M.V. Andrés. « Demostración de un derivador fraccional mediante redes de período largo en fibra óptica,» Póster, *IX Reunión Española de Optoelectrónica (OPTOEL 2015)*, Salamanca, España, 13 al 15 de julio del 2015. Contribución PO-SII-01.
2. L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J.L. Cruz, A. Díez y M.V. Andrés. « Optical fractional differentiator based on long period gratings,» Póster, *Iberic International OSA Network of Students (IONS 2015)*, Valencia, España, 24 al 26 de setiembre del 2015. Libro de Resúmenes pp. 67.
3. L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J.L. Cruz, A. Díez y M.V. Andrés. «Optical fractional differentiator based on long period gratings,» Póster, *Ultrafast Science and Technology Spain Meeting (USTS 2015)*, Madrid, España, 24 y 25 de noviembre del 2015.
4. L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J.L. Cruz, A. Díez y M.V. Andrés. « Demonstration of a fractional differentiator based on long period gratings in fiber optics,» Póster, *Primeras Jornadas Jóvenes del Instituto de Ciencias de los Materiales de la Unviersidad de Valencia*, Valencia, España, 23 de junio del 2016. Libro de Resúmenes pp. 16.
5. L. Poveda-Wong, A. Carrascosa, C. Cuadrado-Laborde, J.L. Cruz, A. Díez y M.V. Andrés. « Long period grating assisted 0.5th order fractional differentiation for instantaneous frequency measurement,» Póster, *Latin America Optics and Photonics Conference (LAOP 2016)*, Medellín, Colombia, 22 al 25 de agosto del 2016. Contribución LTu4A.34.
6. X. Roselló-Mechó, M. Delgado-Pinar, L. Poveda-Wong, J.L. Cruz y M.V. Andrés. «Measurement of thermal profiles in LPGs by using whispering gallery modes resonances,» Póster, *XII Latinoamerican Meeting on Optics, Lasers and Applications (RIO/OPTILAS 2016)*, Pucón, Chile, 21 al 25 de noviembre de 2016. Libro de Resúmenes pp. 309.