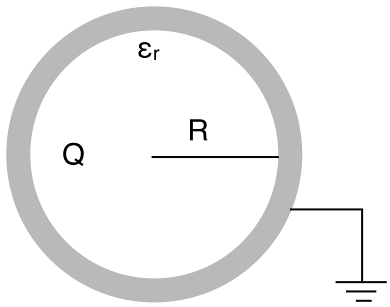
SECONDO APPELLO — 05.07.2017
FISICA GENERALE T-2, Prof. G. Vannini
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e dell'Automazione

ESERCIZIO 1

In una sfera di raggio R di materiale dielettrico lineare e omogeneo (costante dielettrica relativa ε_r) è uniformemente distribuita una carica elettrica Q. La superficie esterna della sfera è ricoperta da un sottile strato metallico collegato a terra.

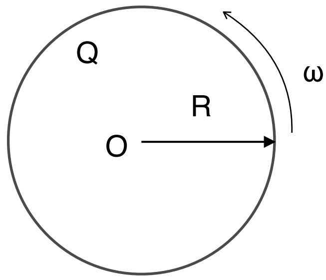
Calcolare:

1. il campo elettrico e il potenziale in funzione della distanza dal centro della sfera;
2. la densità di cariche superficiali indotte nel metallo;
3. le densità di carica di polarizzazione nella sfera e sulla sua superficie.



ESERCIZIO 2

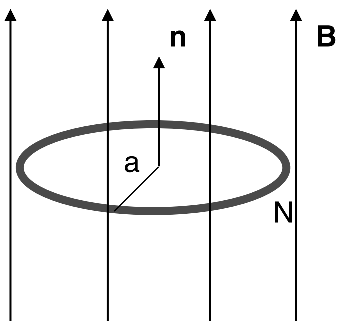
Su un disco di raggio R è deposta una carica Q con densità superficiale uniforme. Il disco viene posto in rotazione con velocità angolare ω. Si calcoli il campo magnetico prodotto nel suo centro.



ESERCIZIO 3

Una bobina, composta da N spire circolari di raggio a, si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico **B** uniforme e costante. La bobina è inizialmente disposta con l'asse parallelo alla direzione del campo. Sapendo che la resistenza della bobina è pari a R, si determini la carica complessiva che attraversa la bobina a fronte di una rotazione della stessa di:

1. 90°;
2. 180°.



SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. Calcoliamo prima il vettore D, che dipende solo dalle cariche libere. Data la simmetria del problema, il vettore D è radiale e assume lo stesso valore sulle superfici sferiche Σ di raggio r arbitrario, concentriche alla sfera dielettrica. Applichiamo il teorema di Gauss.
Per 0 < r < R si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_f(r),$$ dove Q_f è la carica libera interna alla superficie sferica Σ.

Poiché la carica elettrica Q è distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica di raggio R, si ha che la densità volumetrica della carica libera è data da:

$$\rho_f = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Da queste due relazioni si ottiene:

$$4\pi r^2 D = \rho_f \frac{4}{3}\pi r^3$$

Quindi:

$$\mathbf{D} = \frac{Qr}{4\pi R^3}\mathbf{u_r}$$

All'interno dello strato metallico che circonda la sfera dielettrica il vettore **D** è nullo (come pure il campo elettrico). Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ, di raggio r, contenuta nello strato metallico, si ottiene:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 0 = Q_f,$$ dove Q_f è la carica libera totale interna a Σ, data dalla somma della carica Q distribuita nel dielettrico e della carica indotta sulla superficie interna dello strato metallico.

Si ha quindi che la carica indotta è data da $Q_{indotta} = -Q$

Il conduttore è collegato a terra, quindi la sua superficie esterna risulta scarica. Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ esterna allo strato conduttore, dal momento che la carica libera totale interna a Σ è nulla, si conclude che D = 0 all'esterno dello strato metallico.
Il campo elettrico si calcola facilmente ricordando la relazione tra **D** e **E**:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\mathbf{u_r}\,, \quad 0 < r < R;$$
$$\mathbf{E} = 0, \qquad r > R.$$

Calcoliamo ora il potenziale, ricordando che lo strato metallico è posto a terra (V = 0). Per r > R si ha: V(r) = 0. Per 0 < r < R, ricordando che il potenziale è continuo per r = R, si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\int_R^r r dr$$

da cui:

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}(R^2 - r^2)\,.$$

2. Sulla superficie interna dello strato metallico viene indotta una carica -Q, distribuita in modo uniforme con densità superficiale σ data da:

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}$$

La superficie esterna dello strato metallico risulta invece scarica.

3. Determiniamo la polarizzazione all'interno della sfera dielettrica (0 < r < R):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)Qr}{4\pi\epsilon_r R^3}\mathbf{u_r}\,.$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico a contatto con il guscio metallico è data da:

$$\sigma = \mathbf{P}(R)\cdot n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}\mathbf{u_r}\cdot\mathbf{u_r} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione è data da:

$$\rho = -\nabla\cdot\mathbf{P}(R) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2 P(r)] = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3}r^3] = -\frac{3(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3}$$

La carica di polarizzazione è quindi distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica.

ESERCIZIO 2

Poiché la carica è distribuita uniformemente sul disco, la densità di carica superficiale presente su di esso è pari a:

$\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$, dove Q è la carica deposta ed R il raggio del disco.

Il disco può essere scomposto in corone circolari concentriche di spessore infinitesimo dr e raggio medio r. Ponendo il disco in rotazione attorno al suo asse, ognuno di questi elementi genera un campo magnetico **dB** assimilabile a quello generato da una spira circolare percorsa da una corrente infinitesima di intensità:

$dI = \dfrac{dq}{dt}$, dove dq è la carica infinitesima presente sulla corona circolare e T il periodo di rotazione.

Risulta che la carica presente sulla corona circolare è data da:

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

mentre il periodo di rotazione legato alla velocità angolare del disco dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Allora possiamo scrivere la corrente infinitesima come:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma\omega r dr = \frac{Q\omega r}{\pi R^2}dr$$

Il campo magnetico generato nel centro O del disco da una delle spire elementari è dato da:

$\mathbf{dB}(O) = \dfrac{\mu_0 dI \mathbf{u_z}}{2r}$, dove $\mathbf{u_z}$ è il versore diretto perpendicolarmente al piano del foglio e uscente.

Il campo magnetico complessivo nel centro del disco sarà allora dato dalla relazione:

$$\mathbf{B}(O) = \int_{disco} \mathbf{dB}(O) = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega Q \mathbf{u_z}}{2\pi R^2}dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}\mathbf{u_z}.$$

ESERCIZIO 3
Per determinare la carica complessiva che attraversa la bobina si può integrare nel tempo la corrente indotta a fronte della variazione di flusso causata dalla rotazione.
Per la legge di Faraday e quella di Ohm si ricava la corrente indotta come:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Chiamando t_i e t_f gli istanti iniziale e finale della rotazione della spira, possiamo calcolare la carica che ha attraversato una sezione della spira:

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} i dt = -\frac{1}{R}\int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\mathbf{B}) = -\frac{1}{R}[\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] \ ,$$

dove $\Phi_f(\mathbf{B})$ è il flusso finale e $\Phi_i(\mathbf{B})$ è il flusso iniziale.
L'equazione ottenuta evidenzia come la carica totale che attraversa la bobina non dipenda dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solo dai suoi valori iniziale e finale.
Il flusso iniziale è pari a

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS = ND\pi a^2$$

in quanto **B** è uniforme ed inizialmente parallelo ed equivalso ad **n**.

1. Nel caso in cui l'angolo di inclinazione sia di 90°:

   $\Phi_f(\mathbf{B}) = 0$ in quanto B è ortogonale ad n. Quindi:

   $$Q = \frac{\Phi_i(\mathbf{B})}{R} = \frac{NB\pi a^2}{R} \ .$$

2. Nel caso in cui l'angolo di inclinazione sia di 180°:

   $\Phi_f(\mathbf{B}) = N\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS = -NB\pi a^2$ in quanto **B** e **n** sono paralleli ma opposti.

   Allora la carica totale sarà:

   $$Q = -\frac{1}{R}(-NB\pi a^2 - NB\pi a^2) = \frac{2NB\pi a^2}{R} \ .$$