View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

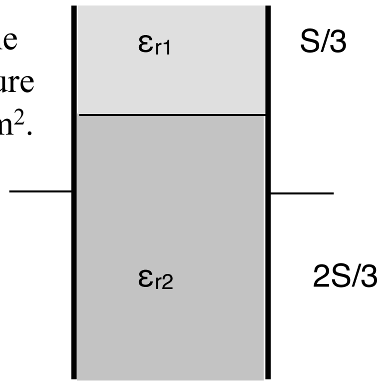
provided by Almae Matris Studiorum Campus

PRIMO APPELLO — 14.06.2017
FISICA GENERALE T-2, Prof. G. Vannini
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e dell'Automazione

ESERCIZIO 1

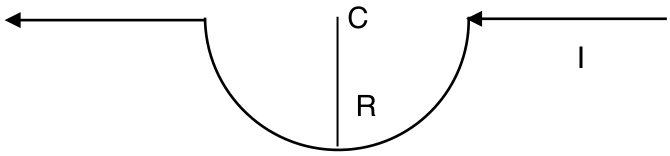
Un condensatore piano e isolato è riempito completamente da due lastre di dielettrico omogeneo e isotropo con costanti $\varepsilon_{r1} = 2$ e $\varepsilon_{r2} = 3$ come mostrato in figura. Sono note la carica Q = 1 muC distribuita sulle armature del condensatore, la distanza d = 10 cm fra di esse e la loro area S = 1.5 m^2. La lastra con costante dielettrica ε_{r1} copre un terzo della superficie delle armature, la lastra con costante ε_{r2} copre la parte rimanente. Ricordando che la componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia tra i due dielettrici si conserva, calcolare:

1. il campo elettrico nel condensatore;
2. la capacità del condensatore;
3. le densità superficiale e volumetrica di carica di polarizzazione.



ESERCIZIO 2

Si consideri un filo percorso da una corrente I = 7A, formato da due tratti rettilinei ed un semicerchio di raggio R = 10 cm, come mostrato in figura. Il filo ha lunghezza complessiva pari a 6R. Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel punto C, al centro del semicerchio.

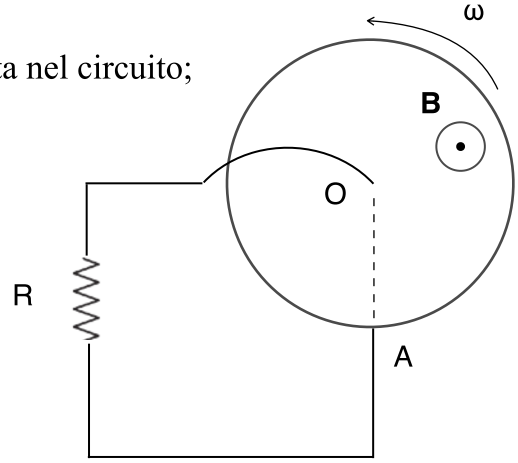


ESERCIZIO 3

Un sottile disco conduttore di raggio D = 20 cm ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω = 100 rad/s. Un estremo di un resistore (R = 20 ohm) è collegato al centro O del disco, l'altro alla periferia tramite un contatto strisciante A. Il disco è immerso in un campo magnetico ad esso ortogonale, diretto verso il lettore, di modulo B = 0.2 T. Si trascuri l'autoinduzione del circuito.

Calcolare:

1. il valore, la direzione e il verso della corrente indotta nel circuito;
2. il momento della forza che agisce sul disco;
3. la potenza che occorre spendere per mantenere in rotazione il disco.



SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1) Il sistema presentato è equivalente al parallelo (poiché la d.d.p. tra di essi è la stessa) tra due condensatori di area S/3 e 2S/3 riempiti dai due materiali diversi. Inoltre sappiamo che all'interno di un condensatore il campo elettrico **E** è perpendicolare alle armature e che è parallelo all'interfaccia tra i dielettrici.
   Dato che E_t (componente tangente all'interfaccia) si conserva, cioè $E_{t1} = E_{t2}$, e che è l'unica componente del campo, allora il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} = \mathbf{E_2}$$

Per il teorema di Coulomb $\mathbf{D} = \sigma \hat{n}$

inoltre si sa che $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$

Allora:

$$\sigma_1 = |\mathbf{D_1}| = \epsilon_0 \epsilon_{r1} |\mathbf{E}|$$
$$\sigma_2 = |\mathbf{D_2}| = \epsilon_0 \epsilon_{r2} |\mathbf{E}|$$

Inoltre conoscendo la carica del condensatore:

$$Q = \sigma_1 \frac{S}{3} + \sigma_2 \frac{2S}{3}$$

sostituendo sigma1 e sigma2 in Q:

$$Q = \epsilon_0 \epsilon_{r1} |\mathbf{E}| \frac{S}{3} + \epsilon_0 \epsilon_{r2} |\mathbf{E}| \frac{2S}{3}$$

Allora: $\frac{3Q}{\epsilon_0 S} = \epsilon_{r1} |\mathbf{E}| + 2\epsilon_{r2} |\mathbf{E}|$

$$|\mathbf{E}| = \frac{3Q}{\epsilon_0 S(\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2})} = 2.86 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$

2) La capacità totale del condensatore sarà la comma delle due capacità, considerando il parallelo spiegato nel punto 1:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{3d} = 8.85 \cdot 10^{-11} F$$
$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{2S}{3d} = 2.66 \cdot 10^{-10} F$$

Allora la capacità totale è:

$C = C_1 + C_2 = 3.54 \cdot 10^{-10} F$

3) Le densità superficiali di carica di polarizzazione sono

$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$ dove $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$

prendiamo l'interfaccia con l'armatura positiva:

$\sigma_{P1} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{n}_1 = -P_1 = -\epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E = -2.5 \cdot 10^{-7} C$
$\sigma_{P2} = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{n}_2 = -P_2 = -\epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E = -5 \cdot 10^{-7} C$

Per quanto riguarda la densità di carica volumetrica, questa è nulla in quanto il dielettrico è omogeneo e isotropo: $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$.

ESERCIZIO 2

Per il principio di sovrapposizione, si considera il campo magnetico totale **B** come la somma dei singoli contributi dati dagli elementi infinitesimi **dl** del circuito percorso da corrente.
Per Laplace, sappiamo che:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

I tratti rettilinei dei fili non contribuiscono poiché **dl** è parallelo a **r**.
L'unico tratto che contribuisce è la semicirconferenza:

$$\mathbf{B} = \int_{semicirc} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{R^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} \int_{semicirc} \mathbf{dl} \times \mathbf{r} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} \int_{semicirc} R dl \hat{k}$$

dove **k** è il versore dell'asse *z* uscente dal piano e perpendicolare ad esso.

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} \int_{semicirc} R dl \hat{k} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} R \hat{k} \int_{semicirc} dl = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \hat{k} \pi R = -\frac{\mu_0 i}{4R} \hat{k}$$

B è effettivamente metà del campo magnetico generato da una spira circolare di raggio R nel suo centro.

ESERCIZIO 3

1) Il campo elettrico indotto $\mathbf{E_i}$ va da O ad A. In fine si avrà un estremo A positivo e un estremo O negativo.

$$fem = \int_O^A \mathbf{E_i} \cdot \mathbf{dl} = \int_O^A \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \int_O^D \omega r B dr = \omega B \frac{D^2}{2} = 0.4V$$

ai capi di OA.

Allora la corrente indotta è $$i = \frac{fem}{R} = \frac{\omega B D^2}{2R} = 2 \cdot 10^{-2} A$$

con stessa direzione di OA e stesso verso di $\mathbf{E_i}$.

2) La forza che agisce sul tratto **dr** del raggio OA è

$\mathbf{dF} = i\mathbf{dr} \times \mathbf{B}$ che si oppone alla rotazione

Allora il momento di tale forza è

$\mathbf{dM} = \mathbf{r} \times \mathbf{dF} = i\mathbf{r} \times (\mathbf{dr} \times \mathbf{B})$

Poiché i vettori sono tutti ortogonali:

$$dM = -irdrB = -\omega B \frac{D^2}{2R} rdrB = -\omega \frac{B^2 D^2}{2R} rdr$$

Allora

$$M = \int dM = \int_0^D -\omega \frac{B^2 D^2}{2R} rdr = -\omega \frac{B^2 D^2}{2R} \frac{D^2}{2} = -\omega \frac{B^2 D^4}{4R} = -8 \cdot 10^{-5} Nm$$

che fa resistenza al campo magnetico.

3) Per mantenere in rotazione il disco con velocità angolare w, bisogna applicare un momento M’ uguale e opposto a M:

$$P_m = \omega \cdot M' = \frac{\omega^2 B^2 D^4}{4R} = 8 \cdot 10^{-3} W$$

oppure

$$P_{elettrica} = \frac{fem^2}{R} = \frac{\omega^2 B^2 D^4}{4R} = 8 \cdot 10^{-3} W$$