Università di Bologna – Campus di Rimini – Corso di laurea in Farmacia e CQPS

Esame MATEMATICA 23/02/2015 – Docente: Stefano Bordoni

STUDENTE: ___________________________; CORSO di LAUREA: ____________

MATRICOLA: ________; N° documento: _____________; FIRMA: ____________

1. Calcolare: $\log_z(z/\sqrt[3]{z})$, $\dfrac{(k-1)!}{(k-1)\cdot(k-2)!}$ [2]

2. Risolvere:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1} \geq \frac{4}{9}$; $\log_{\frac{2}{3}}(\frac{11}{8}+x^2) > -3$; $|6x-5x^2| < -3$; $\sqrt[2]{7x-2x^2} \geq -1$; $\sqrt[3]{1-x} < -2$. [7]

3. Calcolare $D'^r_{4;3} - D'^r_{3;4}$ (disposizioni con ripetizione) e $C_{5;2} - C_{5;3}$ [2]

4. Determinare dominio, grafico e codominio (studio globale) della funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{x-1}\,.$$

Determinare la funzione derivata $f'(x)$ e una funzione primitiva $\Phi(x)$ della funzione $f(x)$. Calcolare inoltre $\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)$. [7]

∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

5. Eseguire lo studio analitico completo della funzione $y = \sqrt[2]{x^2-1}$. [7]

6. Dopo aver determinato un intervallo sul quale la funzione $y = f(x) = \sin(x)$ è invertibile, determinare la funzione inversa, inclusi dominio, grafico e codominio. [3]

7. In una moneta non truccata, qual è la probabilità che escano 5 teste su 5 lanci? [2]

<u>PER LA LODE</u>: Dimostrare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

VOTO: _______

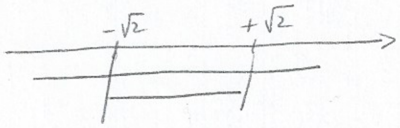
Esame Matematica 23/02/2015

1) $z^y = \frac{z}{\sqrt[3]{z}}$ $z^y = \frac{z}{z^{1/3}}$ $z^y = z^{2/3}$ $y = \frac{2}{3}$

$\frac{(K-1)!}{(K-1)!} = 1$

2) • $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $-x+1 \leq 2$ $x-1 \geq -2$ $x \geq -1$

• $\begin{cases} \frac{11}{8} + x^2 > \phi \\ \frac{11}{8} + x^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \end{cases}$ $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{11}{8} + x^2 < \frac{27}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} \checkmark \\ x^2 < \frac{16}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} \checkmark \\ x^2 < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \forall x \\ x \in]-2; +\sqrt{2}[\end{cases}$



$x \in]-\sqrt{2}; +\sqrt{2}[$

• $|f(x)| < -3$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

• $\sqrt[2]{f(x)} \geq -1$ $f(x) \geq \phi$ $7x - 2x^2 \geq \phi$ $2x^2 - 7x \leq \phi$ $\left(x = \phi \text{ vel } x = \frac{7}{2}\right)$

$x \in \left[\phi; \frac{7}{2}\right]$

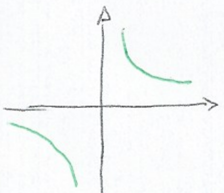
• $1 - x < (-2)^3$ $1 - x < -8$ $-x < -9$ $x > 9$

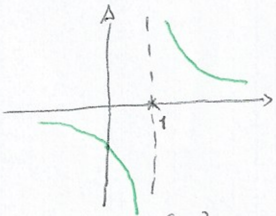
3) $D^r_{4;3} = 4^3 = 64$ $D^r_{3;4} = 3^4 = 81$ $D^r_{4;3} - D^r_{3;4} = 64 - 81 = -17$

$C_{5;2} - C_{5;3} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} - \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} - \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \phi$

4) $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[1R]{T_x} y = \frac{1}{x-1}$

$f(x) = (x-1)^{-1}$





D: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

C: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

D: $\mathbb{R} / \{1\}$

C: $\mathbb{R} \setminus \{\phi\}$

- $f'(x) = -1(x-1)^{-1-1} \cdot 1$
  $= -(x-1)^{-2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

- $\Phi(x) = \ln|x-1| + cost$

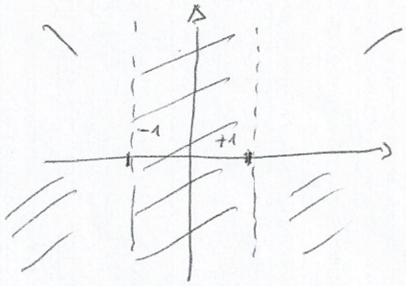
- $\lim_{x \to -\infty} \left[\ln|x-1| \right] \Rightarrow \ln|-\infty - 1| =$
  $\Rightarrow \ln(+\infty) \Rightarrow +\infty$

° ° ° ° ° °

5) $y = f(x) = \sqrt[2]{x^2-1}$ • Dominio: $x^2 - 1 \geq \phi$ $\quad x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[+1; +\infty\right[$

- funzione pari poiché $f(-x) = \sqrt[2]{(-x)^2-1} = \sqrt[2]{x^2-1} = f(x)$

- $f(x) \geq \phi$ se $x^2 - 1 \geq \phi \Rightarrow$ $f(x)$ positiva se $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]+1; +\infty\right[$
  $f(x) = \phi$ se $x \in \{-1; +1\}$



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow \sqrt{(\pm\infty)^2 - 1} = \sqrt{+\infty - 1} \sim +\infty$

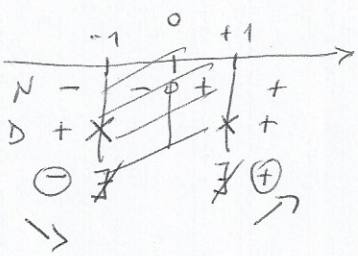
- $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} (x^2-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \cancel{2}x = x(x^2-1)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

  Se $x = \pm 1$ $f'(x)$ NON esiste

  $K = (-1; \phi)$ e $J = (1; \phi)$ sono punti di NON derivabilità

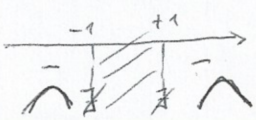
  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \frac{-1}{\phi^+} = -\infty \\ \lim_{x \to +1^+} f'(x) = \frac{1}{\phi^+} = +\infty \end{array}\right\}$ tangenti verticali

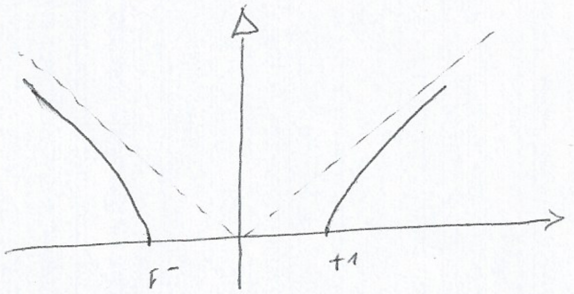
$? x: f'(x) \geq \phi$ $\quad N \geq \phi \quad x \geq \phi$
$\quad D \geq \phi \quad \forall x \in$ dominio



- $f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x}{x^2-1} =$
  $= \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-1}}$

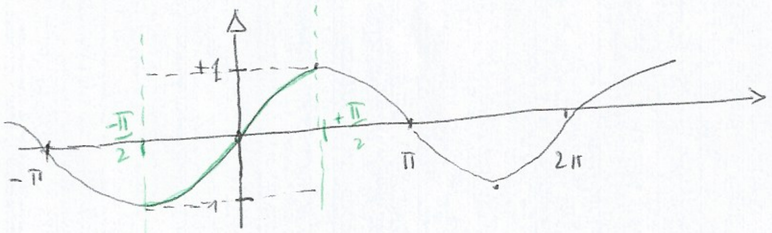
$f''(x) < \phi \quad \forall x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]+1; +\infty\right[$



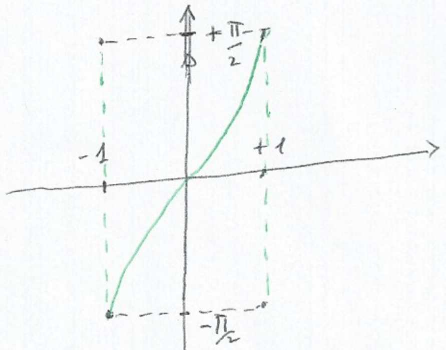


(Rami positivi di una iperbole)

6) $y = \sin(x)$ è invertibile se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ .....



$\Rightarrow$



D: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

C: $[-1; +1]$

D: $[-1; +1]$

C: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

$y = \arcsin(x)$

7) $p(5T/5) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$ $\Leftarrow p(kT/n) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 1 = \frac{5!}{5!\,0!} \cdot \frac{1}{2^5} = 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$