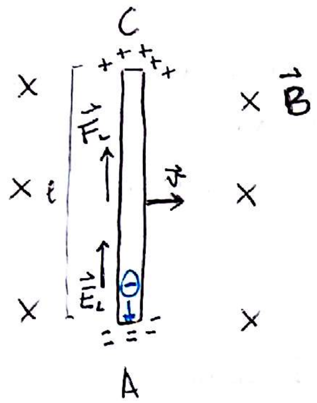
Esercizi: campi magnetici variabili nel tempo, conduttori in moto in campi $\vec{B}$

(1) Una sbarretta conduttrice di lunghezza l si muove di moto traslatorio con velocità $\vec{v}$ in una zona di spazio in cui è presente un campo $\vec{B}$ uniforme, costante nel tempo e diretto $\perp$ al piano formato dal vettore $\vec{v}$ e dalla sbarretta. Calcolare la fem indotta.



La forza di Lorentz $\vec{F}_L$, diretta lungo la sbarretta, agisce sui portatori di carica del conduttore.

⇓

accumuli di cariche di segno opposto agli estremi della sbarretta

Gli elettroni si spostano verso un'estremità (A) e resta un eccesso di cariche positive nell'altra (B).

Quindi all'interno della sbarretta: campo di Lorentz

$E_L = vB$ (campo elettromotore)

ha lo stesso verso e direzione di $\vec{F}_L$

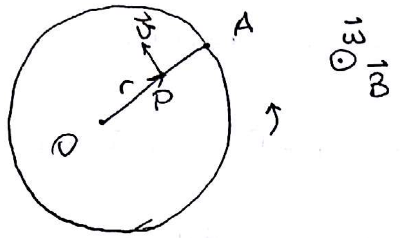
L'accumulo di cariche agli estremi, genera un campo elettrostatico $\vec{E}_S$ che si oppone a quello di Lorentz.

Si raggiunge l'equilibrio quando: $E_S = E_L = vB$

Quindi la sbarretta si comporta come un generatore con fem tra i due estremi A e C:

$$f_i = \Delta V\Big|_A^C = \int_A^C \vec{E}_S \cdot d\vec{l} = vBl$$

② Una sottile sbarra rettilinea conduttrice, lunga $R = 10$ cm, è incernierata ad un estremo attorno al quale ruota con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s. Essa è immersa in un campo $\vec{B}$ uniforme e costante, di modulo $B = 1$ T, parallelo e concorde a ω. Calcolare il valore e il segno della tensione che si misura ai capi della sbarra.



Sia $\vec{v}$ = velocità del generico punto P della sbarra, distante r da O.

Allora il campo $\vec{E}$ indotto, nel punto P, è

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}$$

in modulo: $|\vec{E}| = \omega B r$ e direzione e verso di $\vec{OA}$ (perché $\vec{B}$ concorde a $\vec{\omega}$)

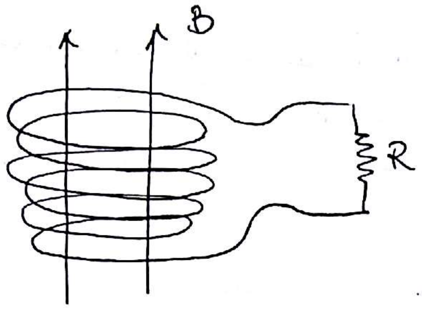
$\Rightarrow$ - accumulo di cariche negative in O e positive in A

- campo elettrico $\vec{E}_s$ opposto a $\vec{E}$ $\quad (\vec{E}_s = -\vec{E})$

I campi elettrici $\vec{E}$ e $\vec{E}_s$ non sono uniformi, infatti crescono in modulo linearmente con la distanza dal centro (r).

$$f_i = \int_0^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^A \left[(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}\right] \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\omega B}_{\text{costanti e } \parallel \text{ fra loro, } \perp \text{ con } \vec{r}} \int_0^R r\, dr = \omega B \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{1}{2}\omega B R^2 = 0.5 \text{ V}$$

③ Una bobina costituita da $N = 100$ spire di area $\Sigma = 100\ cm^2$ e resistenza complessiva $R = 5\ \Omega$ è posta tra le espansioni polari di un elettromagnete e giace in un piano ortogonale alle linee di $\vec{B}$. Il campo $\vec{B}$, uniforme nei punti di Σ, varia nel tempo aumentando linearmente dal valore 0 al valore $B_0 = 0.8\ T$ in un tempo $t_0 = 10\ s$. Calcolare la fem indotta nella bobina, la carica q che fluisce nella bobina durante il tempo t_0 e il lavoro totale speso nello stesso tempo.



La legge di variazione del campo magnetico è

$$\boxed{B(t) = B_0 \frac{t}{t_0}}$$

Il flusso attraverso la bobina:

$$\phi(B) = N \Sigma B = N \Sigma \frac{B_0}{t_0} t$$

$N\Sigma$ = superficie attraversata totale

Allora la fem indotta è:

$$\boxed{f_i = -\frac{d\phi}{dt}} = -N\Sigma \frac{dB}{dt} = -N\Sigma \frac{B_0}{t_0} = -8 \cdot 10^{-2}\ V$$

costante per tutto il tempo t_0

e la corrente nella bobina è:

$$\boxed{I = \frac{f_i}{R}} = -1.6 \cdot 10^{-2} A$$

circola in verso tale da opporsi, con il suo campo, alla variazione di $\vec{B}$.

I $\vec{B}_i$

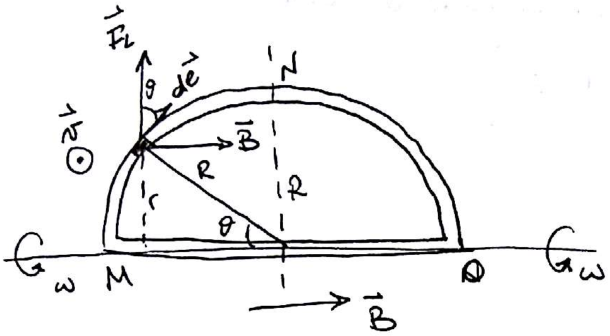
La carica totale che passa attraverso una qualsiasi sezione del filo:

$$q = \int I\, dt = i t_0 = 0.16\ C$$

La potenza dissipata su R: $P = f_i I = 1.28 \cdot 10^{-3}\ W$

Il lavoro totale speso: $W = P t_0 = f_i I t_0 = f_i q = 1.28 \cdot 10^{-2}\ J$

④ In una zona di campo $\vec{B}$ uniforme e costante nel tempo (diretto orizzontalmente) ruota, con velocità angolare ω intorno al diametro orizzontale MO, una spira conduttrice chiusa MNOM a forma di semicirconferenza rigida di raggio R. Calcolare il valore della corrente che circola nel circuito e la d.d.p. tra i punti M e N per effetto della sola forza di Lorentz.



Il flusso di $\vec{B}$ concatenato con la spira è sempre nullo, perchè $\vec{B} \perp \hat{n}$ dove $\hat{n}$ è la normale al piano della spira.

$\Downarrow$

la fem indotta è nulla

$\Downarrow$

la corrente circolante nel circuito è nulla.

$I = 0$

Su un portatore di carica q nel filo conduttore viene esercitata una forza di Lorentz giacente sul piano della spira:

$$F_L = q v(\theta) B \qquad \text{dove} \qquad v(\theta) = \omega r = \omega R \,\text{sen}\,\theta$$

allora

$$E_L = \frac{F_L}{q} = v(\theta) B = \omega R B \,\text{sen}\,\theta .$$

Per effetto di tale campo si ha:

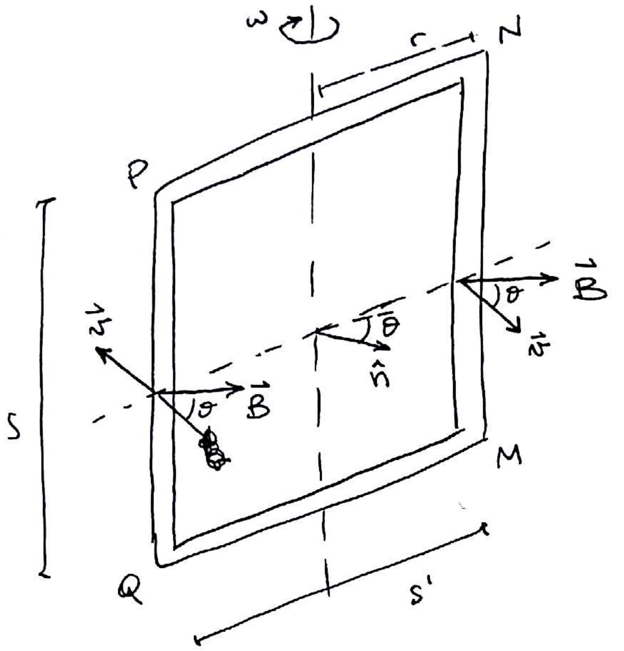
$$V_M - V_N = \int_M^N \vec{E}_L \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\pi/2} (\omega R B \,\text{sen}\,\theta) \cos\theta \,(R\, d\theta) =$$

dato che
$d\ell = R\, d\theta$
$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\, d\ell \cos\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \omega B R^2 \,\text{sen}\,\theta \cos\theta \, d\theta = \omega B R^2 \left[\frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\omega B R^2$$

N.B.
$$\left[\int f(x) f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2}\right]$$

5 Una spira rettangolare, di lati MN = PQ = s e NP = QM = s', ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa, parallelo al lato MN.
Sulla spira agisce un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante, orizzontale.
θ è l'angolo tra la normale alla spira e $\vec{B}$.
Calcolare la fem indotta.



Sappiamo che

$$\boxed{f_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}}$$

- lungo lati MN e PQ:

$(\vec{v} \times \vec{B})$ // e concorde al verso di percorrenza del lato stesso (regola mano destra)

$\vec{v}$ sempre tangente a crf disegnata da $\vec{\omega}$, quindi sui lati MN e PQ: $\vec{v} \,//\, \hat{n}$

allora:

$\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{MN} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{PQ} = s\, v\, B \operatorname{sen}\theta$ (θ tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$)

- lungo lati NP e QM:

$\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{NP} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{QM} = 0$ perché $(\vec{v} \times \vec{B}) \perp$ a ciascun lato

Quindi $f_i = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\, s\, v\, B \operatorname{sen}\theta$ solo 2 contributi di MN e PQ.

Dato che $v = \omega r = \omega \frac{s'}{2}$, $\Sigma = s \cdot s'$ (area totale) e $\theta = \omega t$ (rotazione)

allora

$$f_i = 2\, s\, \omega \frac{s'}{2} \cdot B \operatorname{sen}(\omega t) = \omega \Sigma B \operatorname{sen}(\omega t)$$

fem indotta nella spira a causa della rotazione uniforme in $\vec{B}$.

Lo stesso risultato si ottiene con

$$\boxed{f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}}$$

, infatti $\Phi(B) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = B \Sigma \cos\theta = B \Sigma \cos(\omega t)$

$\rightarrow f_i = -\frac{d}{dt}\left[B \Sigma \cos(\omega t)\right] = \omega B \Sigma \operatorname{sen}(\omega t)$ la fem varia sinusoidalmente nel tempo.