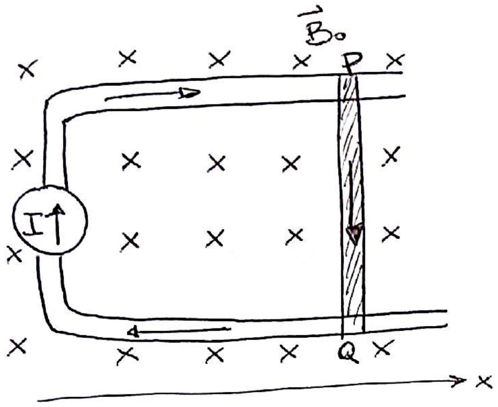
ESERCIZI: forza magnetica, campo $\vec{B}$ e legge di Ampère

① Un generatore in grado di mantenere una corrente costante I alimenta un circuito formato da due conduttori rigidi rettilinei, paralleli, e da un filo rigido PQ lungo b che può scorrere senza attrito, restando sempre perpendicolare ai due conduttori (fissi, insieme al generatore).
Il circuito è immerso in un campo magnetico $\vec{B}_0$ uniforme, entrante.
Calcolare la forza agente sul filo PQ.



Il filo risente di una forza

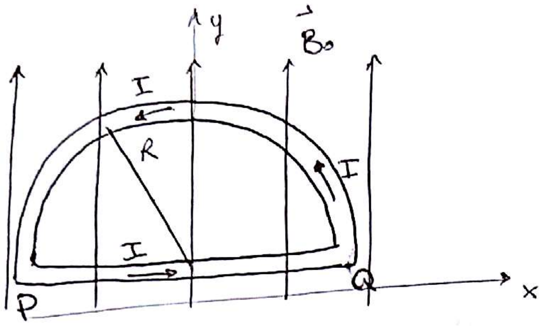
$$\boxed{\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}_0}$$

che è perpendicolare e concorde all'asse x (regola della mano destra)

Quindi, nel nostro caso, $\vec{F} = I\,\vec{PQ} \times \vec{B}_0 = I b B_0 \hat{x}$

La forza è costante e il filo si muove di moto uniformemente accelerato.

② In un circuito chiuso a forma di semicirconferenza di raggio R fluisce una corrente di intensità I.
Il circuito è contenuto nel piano xy con il tratto rettilineo PQ parallelo all'asse x ed è immerso in un campo magnetico $\vec{B}_0$ uniforme // all'asse y.
Calcolare la forza magnetica sul tratto curvo e sul tratto rettilineo.



Sappiamo che $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}_0$ per un conduttore rettilineo, $(F = IlB\sin\theta)$
mentre $\vec{F} = I\int d\vec{l} \times \vec{B}_0$ per filo/conduttore curvilineo.

Allora, su tratto PQ : $\vec{F} = I\,\vec{PQ} \times \vec{B}_0$ dove $\vec{PQ} = 2R\hat{x}$ e $\vec{B}_0 = B_0\hat{y}$

quindi $\vec{F} = I2R\hat{x} \times \hat{y}B = 2IRB\,\hat{z}$ // all'asse z e uscente dal foglio.

Nel tratto curvilineo, invece, seguendo il verso della corrente :

$$d\vec{l} = (-dx\,\hat{x}, dy\,\hat{y}) \rightarrow d\vec{l} = -dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$$

quindi la forza sarà :

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}_0 = -IBdx\,\hat{x}\,\hat{y} + IB\,dy\,\underbrace{\hat{y} \times \hat{y}}_{=0} = -IB\,dx\,\hat{z}$$

Quindi integrando su tratto la circonferenza :

$$\vec{F} = -IB\hat{z}\int_{-l}^{l} dx = -2IBR\hat{z}$$ quindi uguale e opposta a quella su $\vec{PQ}$.

Notiamo che in un campo uniforme, la forza non dipende dalla forma del conduttore, purché stia in un piano, e che la forza su un circuito piano chiuso è nulla. NB

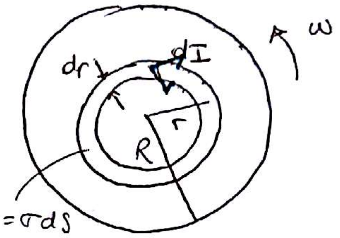
③ Un disco di materiale isolante R, caricato uniformemente con carica Q, ruota intorno al suo asse con velocità angolare ω.

Determinare l'espressione del momento magnetico del disco rotante.

Il momento magnetico di una spira piana è $\boxed{\vec{m} = I S \hat{n}}$

dove $\hat{n}$ è la normale alla spira orientata in verso tale da vedere circolare la corrente I in senso antiorario.

↳ $\hat{n}$ uscente



Il disco con densità di carica superficiale

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Si può pensare come un insieme di spire circolari di raggio r $(r<R)$ e larghezza infinitesima dr, ciascuna percorsa da corrente dI

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi}\omega \qquad \text{dove } T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{periodo di rotazione del disco}$$

e $dq = \sigma\, dS \quad (dS = 2\pi r\, dr)$

Allora $d\vec{m}$ di spira elementare è

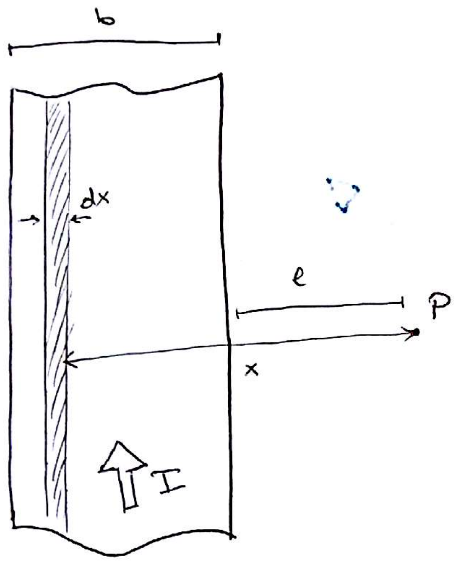
$$d\vec{m} = dI\, S\, \hat{n} = \frac{dq}{2\pi}\omega\, I\, \pi r^2 \hat{n} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{2\pi}\omega \pi r^2 \hat{n} = \hat{n}\, \sigma \pi \omega r^3 dr$$

Integrando su tutto il disco:

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \hat{n}\, \sigma \pi \omega \int_0^R r^3 dr = \hat{n} \underbrace{\sigma}_{Q/\pi R^2} \pi \omega \frac{R^4}{4} = \frac{Q \omega R^2}{4}\hat{n}$$

④ Un nastro conduttore rettilineo, di piccolo spessore e molto lungo, ha larghezza $b = 5\,cm$ ed è percorso da una corrente, costante e uniformemente distribuita sulla sezione del nastro, la cui intensità è $I = 10A$.

Calcolare, nel vuoto, il valore di $\vec{B}_0$ in un punto del piano P individuato dal nastro a distanza $\ell = 10\,cm$ dal bordo più vicino del nastro.



Effetto complessivo del nastro

≡

sovrapposizione di effetti elementari di strisce parallele, di larghezza dx, in cui si può scomporre il nastro.

Ogni striscia elementare ≡ filo rettilineo indefinito

Sappiamo che per un filo, Biot-Savart è

$$\boxed{\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{i}}$$

$\hat{i}$ = versore tangente a crf di raggio r su piano ⊥ a filo

La corrente dI che passa nella striscia elementare è

$$dI = I\frac{dx}{b}$$

quindi $\quad d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi x} I \frac{dx}{b}\hat{n}$ $\quad$ dove $\hat{n}$ = versore normale al piano e orientato verso il basso

In ogni punto P, i contributi sono // e concordi, quindi l'integrale si ottiene così:

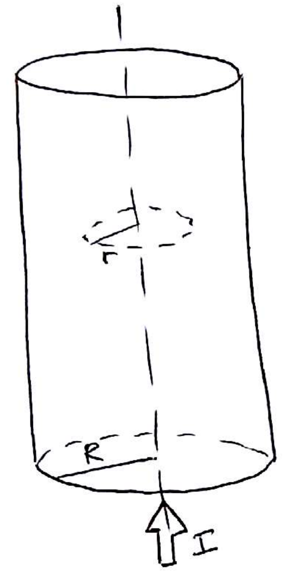
$$\vec{B}_0 = \int d\vec{B}_0 = \hat{n}\int_{\ell}^{\ell+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{dx}{x} = \hat{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left[\ln x\right]_{\ell}^{\ell+b} = \hat{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\left(\frac{\ell+b}{\ell}\right)$$

Mettendo i valori:

$$|\vec{B}_0| = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\left(\frac{\ell+b}{\ell}\right) = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}}\ln\left(\frac{15}{10}\right)T = 1.62\cdot 10^{-5}\,T$$

(5) Una corrente stazionaria I scorre con densità uniforme in un cilindro conduttore molto lungo, avente raggio R, posto nel vuoto.

Ricavare l'espressione del campo $\vec{B}$ in funzione della distanza dall'asse del cilindro, assumendo che il conduttore, al suo interno, abbia praticamente la stessa permeabilità magnetica del vuoto (μ_0).



Data la simmetria cilindrica, sappiamo che $\vec{B}$ ha lo stesso modulo in punti equidistanti dall'asse (come per un filo rettilineo).

Notando che $J = \frac{I}{\pi R^2}$ (densità di corrente),

allora una corrente concatenata con crf di raggio r e centro sull'asse del cilindro ($\perp$ a esso) sarà fatta così

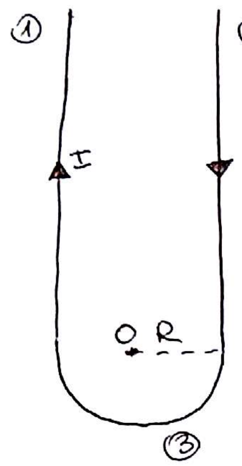
$$\begin{cases} i(r) = \pi r^2 J = I \frac{r^2}{R^2} & (r \leq R) \\ i(r) = I & (r > R) \end{cases}$$

Per il th della circuitazione di Ampére : $\boxed{\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I^{(conc)}}$

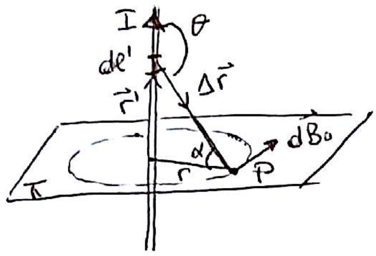
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \begin{cases} \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} & \text{per } 0 \leq r \leq R \\ \mu_0 I & \text{per } r > R \end{cases}$$

Quindi
$$\begin{cases} B(r) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r & \text{per } 0 \leq r \leq R \quad \text{(dipendenza lineare da } r\text{)} \\ B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{per } r > R \quad \text{(legge di Biot-Savart)} \end{cases}$$

⑥ Calcolare il campo $\vec{B}_0$, nel vuoto, prodotto da due lunghi fili paralleli, percorsi da corrente stazionaria I, posti a distanza $2R$ e collegati da un tratto semicircolare di raggio R, nel punto O, centro di curvatura del tratto semicircolare.



Per i tratti rettilinei ① e ②, calcoliamo il campo $\vec{B}_0$ come nel caso del filo rettilineo (solo che adesso ce ne serve solo metà).



- Tutti gli elementi $d\vec{l}'$ di circuito forniscono contributi $d\vec{B}_0$ // e concordi fra loro ($\perp$ a piano filo-$\vec{r}$).
- Linee di forza di $\vec{B}_0$ = cf su piani π $\perp$ a filo e centrate su filo stesso.

$$\boxed{\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\vec{l}'\times\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl'}{|\Delta r|^2}\operatorname{sen}\theta$$

$\hookrightarrow d\vec{l}'\times\Delta\vec{r} = dl'\,\Delta r\operatorname{sen}\theta$

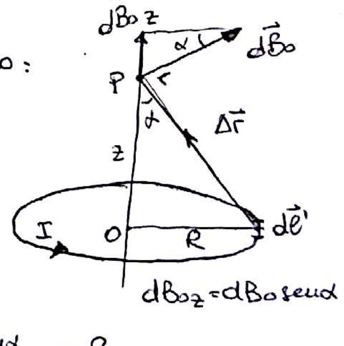
Dato che $\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha$, $r' = r\operatorname{tg}\alpha \to dr' = dl' = \frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha$ e $\Delta r = \frac{r}{\cos\alpha}$

allora $\boxed{B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha} \to$ a noi serve solo $\int_0^{\pi/2}$

Quindi: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = B_2$

Notiamo che $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_3$ sono concordi e diretti nel verso interno del foglio.

Per $\vec{B}_3$, prendiamo il campo generato da una spira circolare piana nel suo centro:



- $d\vec{l}'$ sempre $\perp$ a $d\vec{B}_0$.
- per ogni $d\vec{l}'$ ce n'è sempre un altro opposto che fornisce dB_0 uguale in modulo ma con componente $\perp$ a z opposta. $\Rightarrow \vec{B}_0$ sempre lungo z!

$$\vec{B}_0 = \int d\vec{B}_0 = \hat{n}\int dB_{0z} = \hat{n}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl'}{|\Delta\vec{r}|^2}\operatorname{sen}\alpha = \hat{n}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\Delta\vec{r}|^2}\int dl' = \hat{n}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\Delta\vec{r}|^2}\,2\pi R$$

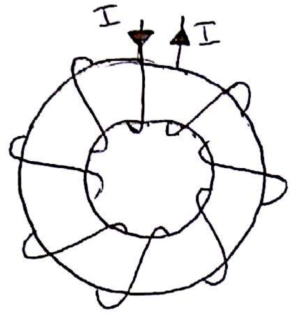
Dato che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{|\Delta\vec{r}|}$ e $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{R^2+z^2}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{B}_0 = \hat{n}\,\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \xrightarrow{z=0} \vec{B}_0 = \hat{n}\,\frac{\mu_0 I}{2R}}$

Quindi $B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}$

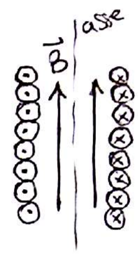
Allora

$$B_{TOT} = B_1 + B_2 + B_3 = 2\,\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 2)$$

⑦ Un solenoide toroidale è costituito da N spire avvolte a una superficie a forma di ciambella (toroide). Calcolare il campo $\vec{B}$ se nel sistema scorre corrente I.



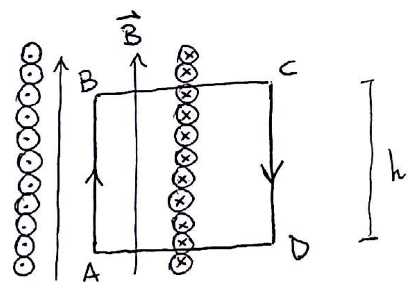
Per un solenoide rettilineo indefinito (supponendo una densità di spire costante) il campo $\vec{B}$ è sempre // all'asse e in ogni punto ha lo stesso valore.
Vuol dire che non ci possono essere variazioni delle caratteristiche di $\vec{B}$ lungo il solenoide.



Se prendiamo una scatola cilindrica coassiale al solenoide e al suo interno:
il flusso di $\vec{B}$ entrante da una base è uguale a quello uscente dall'altra.
Dato che in totale il flusso attraverso una superficie è nullo, lo sarà anche quello uscente dalla superficie laterale (qualsiasi sia r della scatola, purché interno).
↳ possibile solo se $\vec{B}$ // alla superficie laterale ⇒ $\vec{B}$ // all'asse anche in punti fuori da esso.

Quindi: linee di campo sono confinate all'interno del solenoide
$\vec{B}$ all'esterno è nullo

Consideriamo un percorso chiuso ABCD:



la corrente concatenata è

$I_{conc} = nhI$

dove n = n° di spire dentro ABCD

- CD dà contributo nullo perché esterno
- BC e AD sono ⊥ a $\vec{B}$ ⇒ contributo nullo
- AB dà unico contributo ≠ 0:

dato che $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc}$, allora

$$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B B\,dl = Bh \\ &\mu_0 I_{conc} = \mu_0 n h I \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\cancel{h} = \mu_0 n \cancel{h} I \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n I}$$

il campo magnetico all'interno del solenoide rettilineo indefinito è ovunque uniforme

Allora per il solenoide toroidale, possiamo dire che la simmetria suggerisce che le linee di campo $\vec{B}$ all'interno del solenoide sono delle circonferenze con centro sull'asse del toroide e che il modulo di $\vec{B}$ dipende solo dalla distanza r dall'asse.

Allora

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{2\pi r B}_{\text{applicato a crf di raggio } r} = \mu_0 N I$$

in quanto la linea di integrazione concatena tutte N le spire

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$ variabile come $\frac{1}{r}$ all'interno del toroide

NB.: Solo se i valori massimo e minimo di r sono molto vicini a r_{medio}, allora assumiamo che $\vec{B}$ sia uniforme in modulo.

NB.2 : Se le spire sono compatte, all'esterno $\vec{B}$ è nullo. Dato che le spire sono avvolte come un'elica, c'è una componente della $\vec{J}$ che avanza lungo il toroide:

$\Rightarrow$ ~~Cè~~ corrente della spira di raggio circa pari a r_m $\Rightarrow$ c'è campo magnetico esterno anche se piuttosto debole.