ESERCIZI: corrente elettrica stazionaria e reti di conduttori

(1) Calcolare la velocità di deriva $\vec{v}_d$ degli elettroni di conduzione in un filo di rame cilindrico di raggio $r = 1\,mm$ percorso da una corrente di $1\,A$.

Sapendo che $I = \int_S \vec{J} \times d\vec{S}$

e che $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ densità di corrente

n = n° di portatori per m^3

q = carica dell'elettrone

Allora

$$I = J S_n =$$ dove $S_n = \pi r^2$ è la sezione normale del filo

$$= nq S_n v_d = nq v_d \pi r^2$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{I}{nq\pi r^2}$$

Ora calcoliamo n, sapendo che $n = \frac{N \delta_{cu}}{P_{cu}}$

N = n° di Avogadro $= 6.02 \cdot 10^{23}$ atomi/gr

δ_{cu} = densità del rame $= 8{,}9\ gr/cm^3$

P_{cu} = peso atomico del rame $= 63.5$

allora $n = 8.5 \cdot 10^{28}$ elettroni/m^3

Sappiamo che $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$

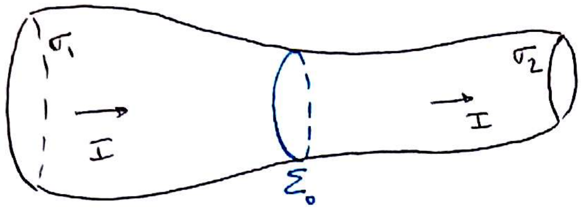
e $S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (10^{-3} m)^2 = 3.14 \cdot 10^{-6}\ m^2$

Quindi

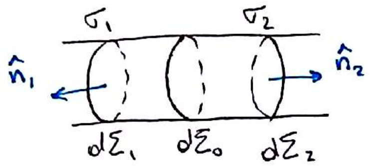
$$v_d = \frac{1A}{8{,}5 \cdot 10^{28}\,m^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 3.14 \cdot 10^{-6}\,m^2} \simeq 2.3 \cdot 10^{-5}\ m/s$$

ricordando $[A] = \left[\frac{C}{s}\right]$

(2) Una corrente stazionaria passa attraverso due conduttori solidi, di conduttività σ_1 e σ_2, a contatto lungo una superficie di separazione Σ_0.
Determinare il comportamento dei vettori $\vec{J}$ e $\vec{E}$ nell'attraversamento di Σ_0.



Prendiamo una scatola cilindrica con asse $\perp$ a Σ_0 e basi infinitesime $d\Sigma_1$, e $d\Sigma_2$ // a Σ_0.



Sappiamo che $\oint \vec{J} \times d\vec{\Sigma} = \oint \vec{J} \times \hat{n}\, d\Sigma = 0$ condizione di stazionarietà ($\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ la carica non varia all'interno della superficie)

e che $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Allora

$$\vec{J}_2 \times \hat{n}_2\, d\Sigma_2 + \vec{J}_1 \times \hat{n}_1\, d\Sigma_1 = (J_{2n} - J_{1n})\, d\Sigma_0 = (\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n})\, d\Sigma_0 = 0$$

quindi $J_{1n} = J_{2n}$ e $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

sono le componenti normali di $\vec{J}$ e $\vec{E}$: || $\vec{J}$ è continua, mentre $\vec{E}$ è discontinuo attraverso la superficie. ||

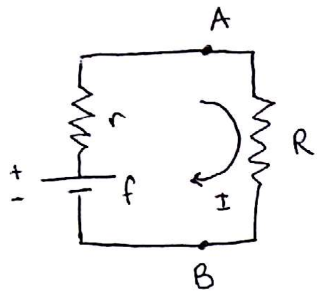
Se applichiamo lo stesso ragionamento in prossimità della superficie laterale, dato che all'esterno la conduttività è 0, allora all'interno deve essere:

$$J_n = \sigma E_n = 0$$

|| in prossimità della superficie del conduttore, il campo elettrico $\vec{E}$ e la densità di corrente $\vec{J}$ sono // alla superficie stessa. ||

③ Una batteria con fem $f = 1.5V$ e resistenza interna $r = 2\,\Omega$ ha i morsetti collegati ai capi di un carico di resistenza $R = 10\,\Omega$.
Calcolare d.d.p. tra i morsetti.

Possiamo disegnare il generatore così:



qui circola una sola corrente I

$\sum f_i = \sum I_i R_i$ 2ª legge di Kirchhoff

in questo caso:

$\sum f_i = f$

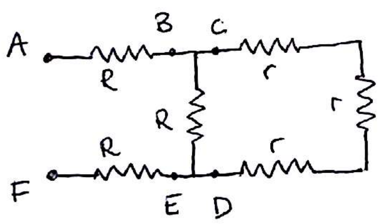
$\sum I_i R_i = Ir + IR$

Allora: $f = I(r+R) \Rightarrow I = \frac{f}{r+R}$

Sapendo che $\Delta V = RI$ (legge di ohm)

allora $\Delta V = V_A - V_B = \frac{R}{r+R} f = \frac{10\,\cancel{\Omega}}{12\,\cancel{\Omega}} \cdot 1.5V = 1.25V$

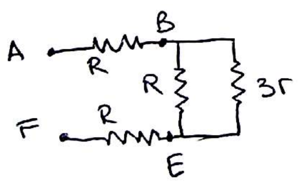
④ Calcolare la resistenza tra gli estremi A e F del sistema di resistori:



Il ramo CD è costituito da 3 resistenze in serie:

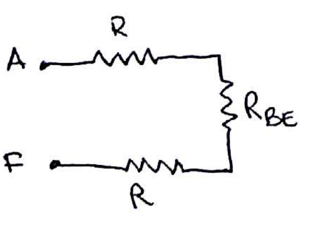
$R_{CD} = 3r$

ridisegniamo il circuito



Il ramo BE è costituito da 2 resistenze in parallelo:

$\frac{1}{R_{BE}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3r} = \frac{3r+R}{R \cdot 3r} \rightarrow R_{BE} = \frac{R \cdot 3r}{3r+R}$

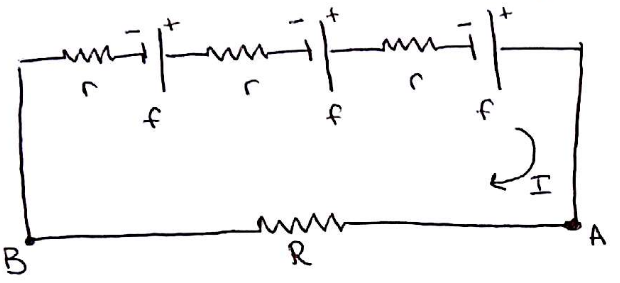


Il ramo AF è costituito da 3 resistenze in serie:

$R_{TOT} = R + R_{BE} + R = 2R + \frac{R\,3r}{3r+R}$

(5) Tre batterie aventi la stessa fem $f = 6V$ e la stessa resistenza interna $r = 1\,\Omega$ sono collegate in serie ad un resistore di $R = 6\,\Omega$.

Calcolare:
1) la resistenza complessiva vista ai capi A e B di R;
2) la corrente che circola attraverso R;
3) la potenza complessivamente erogata dai generatori;
4) la potenza trasferita su R (cioè dissipata).



1) Le 3 resistenze interne sono in serie, quindi $R_{AB} = 3r = 3\,\Omega$

2) Sappiamo che $\sum f_i = \sum I_i R_i$ (2ª legge di Kirchhoff)

allora $3f = IR + I3r$

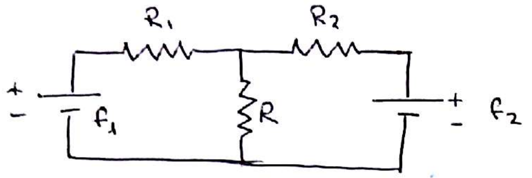
$$3f = I(R+3r) \Rightarrow I = \frac{3f}{3r+R} = \frac{18V}{3\,\Omega + 6\,\Omega} = 2A$$

3) Potenza del generatore: $W = I\Delta V = I \cdot 3f = 2A \cdot 18V = 36\,W$

4) Potenza dissipata per effetto Joule: $W = I^2 R$ (perché $\Delta V = IR$)

$$W = (2A)^2 \cdot 6\,\Omega = 24\,W$$

6. Nella rete in figura, si ha $f_1 = 10V$, $R_1 = 100\,\Omega$, $f_2 = 20V$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R = 300\,\Omega$. Calcolare la corrente stazionaria I_1 erogata dal generatore f_1, nell'ipotesi che siano trascurabili le resistenze interne di entrambi i generatori.



Disegniamo le correnti che fluiscono nelle due maglie e assumiamo che il verso orario sia quello positivo.

I_1 $\quad$ I_2

Per la 2ª legge di Kirchhoff $\quad \Sigma f_i = \Sigma R_k I_k$

maglia 1 / maglia 2
$$\begin{cases} f_1 = I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R \\ -f_2 = I_2 R_2 + (I_2 - I_1) R \end{cases}$$

Risolviamo il sistema di 2 equazioni:

$$\begin{cases} f_1 = I_1 (R+R_1) - I_2 R & \rightarrow I_1 = \dfrac{f_1 + I_2 R}{R+R_1} \\ -f_2 = I_2 (R+R_2) - I_1 R & \rightarrow I_2 = \dfrac{I_1 R - f_2}{R+R_2} \end{cases}$$

allora

$$I_1 = \frac{f_1}{R+R_1} + I_2 \frac{R}{R+R_2} = \frac{f_1}{R+R_1} + \frac{I_1 R - f_2}{R+R_2}\,\frac{R}{R+R_2} =$$

$$= \frac{f_1}{R+R_1} + I_1 \frac{R}{R+R_2}\,\frac{R}{R+R_1} - \frac{f_2}{R+R_2}\,\frac{R}{R+R_1}$$

$$I_1 \left(1 - \frac{R^2}{(R+R_2)(R+R_1)} \right) = \frac{f_1}{R+R_1} - \frac{f_2 R}{(R+R_2)(R+R_1)}$$

$$I_1 = \frac{f_1}{\cancel{R+R_1}} \cdot \frac{(R+R_2)\cancel{(R+R_1)}}{(R+R_2)(R+R_1) - R^2} - \frac{f_2 R}{\cancel{(R+R_2)(R+R_1)}} \cdot \frac{\cancel{(R+R_2)(R+R_1)}}{(R+R_2)(R+R_1) - R^2} =$$

$$= \frac{f_1 (R+R_2)}{(R+R_2)(R+R_1) - R^2} - \frac{f_2 R}{(R+R_2)(R+R_1) - R^2} =$$

$$= \frac{f_1 (R+R_2) - f_2 R}{(R+R_2)(R+R_1) - R^2} = \frac{10V \cdot 500\,\cancel{\Omega} - 20V \cdot 300\,\cancel{\Omega}}{[400 \cdot 500 - (300)^2]\,\Omega^2} = -0.00909\,A = -9.1\,mA$$

Oppure utilizzando Cramer, si può determinare I_1 così:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & -R \\ -f_2 & R+R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+R_1 & -R \\ -R & R+R_2 \end{vmatrix}} = \frac{f_1(R+R_2) - f_2 R}{(R+R_1)(R+R_2) - R^2} = -9.1 \text{ mA}$$

Ricordiamo il metodo di Cramer:

$$1^a \text{ incognita} = \frac{\begin{vmatrix} \text{costante} & \text{coeff. di } 2^a \text{ incognita} \\ \text{costante} & \text{coeff. di } 2^a \text{ incognita} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{coeff. di } 1^a \text{ incognita} & \text{coeff. di } 2^a \text{ incognita} \\ \text{coeff. di } 1^a \text{ incognita} & \text{coeff. di } 2^a \text{ incognita} \end{vmatrix}} = \frac{\text{determinante}}{\text{determinante}}$$