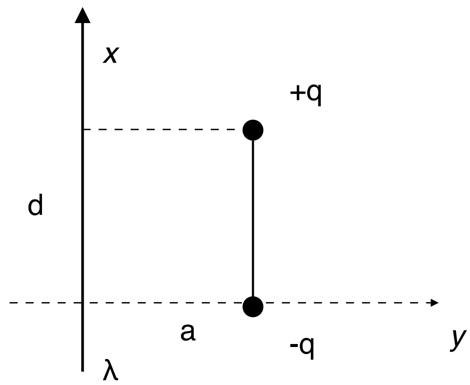
PRIMO PARZIALE — 27.04.2017
FISICA GENERALE T-2, Prof. G. Vannini
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e dell'Automazione

ESERCIZIO 1

Un filo infinitamente lungo con densità lineare di carica λ (positiva) e due cariche puntiformi (+q e -q) sono posti come in figura: il filo è posto sull'asse *x*, la carica +q ha coordinate (d, a) e la carica -q (0, a).

Calcolare nell'istante iniziale:

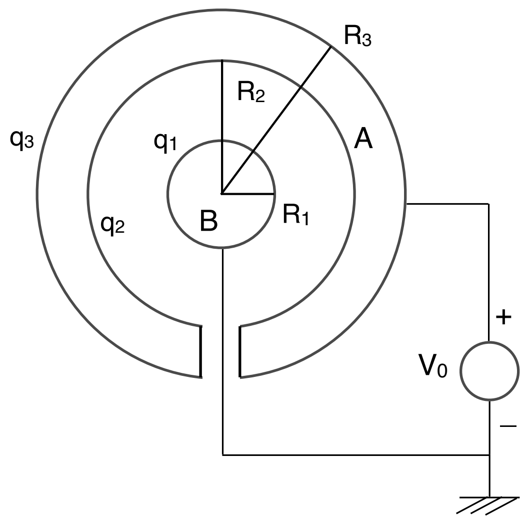
1. il momento di dipolo elettrico;
2. la forza totale che agisce sulle due cariche;
3. il momento della forza che agisce sul dipolo.



ESERCIZIO 2

Una sfera conduttrice cava A, di raggi R_2 = 40 cm e R_3 = 60 cm, contiene una sfera conduttrice B concentrica, di raggio R_1 = 20 cm. Si connette alle due sfere, come mostrato in figura, un generatore di d.d.p. V_0 = 900 V. Notando che le superfici di raggio R_1 e R_2 costituiscono un condensatore sferico, determinare:

1. la capacità del condensatore stesso;
2. le cariche q_1, q_2 e q_3;
3. la sua energia elettrostatica.



ESERCIZIO 3

Una lamina di materiale dielettrico lineare e di costante dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot 3.52$ ($\varepsilon_r = 3.52$) e di spessore d = 12.2 cm, è posta, normalmente alle linee del campo, in un campo elettrico uniforme E_0 = 10000 V/m. Calcolare:

1. la d.d.p. ΔV fra le superfici del dielettrico;
2. la densità superficiale sigma delle cariche di polarizzazione.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. Il dipolo elettrico è costituito dalle cariche +q e -q ed è dato da:

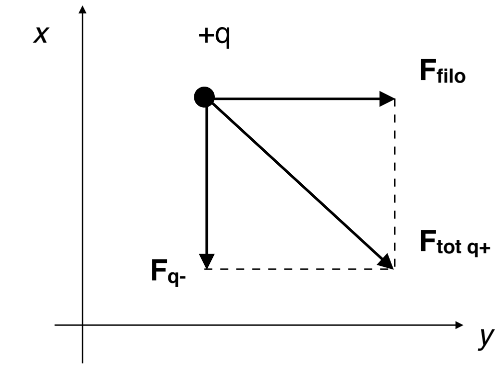
   p = q **δ** dove **δ** è la distanza tra le cariche ed è diretta come il versore **i** dell'asse *x*.

   Quindi **p** = (qd) **i**

2. Per ottenere la forza sulle due cariche, si devono considerare le cariche separatamente perché la forza ha diverse direzioni e diverse componenti.

Sulla carica +q:

$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_{q-} + \mathbf{E}_{filo}$



$$\mathbf{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{E}_{q-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{d^2}(-\mathbf{i})$$

Quindi $$\mathbf{E}_{tot} = (-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a})$$

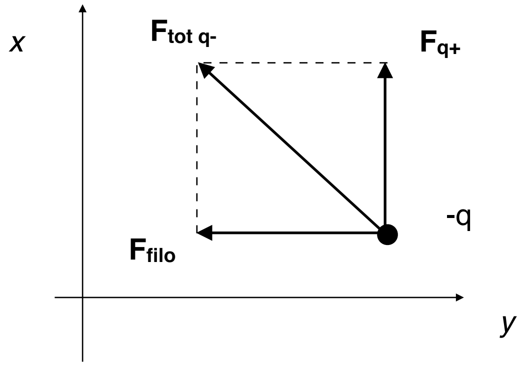
La forza si esprime come $$\mathbf{F}_{totq+} = \mathbf{E}_{tot}q = (-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a})$$

il suo modulo è:

$$|\,\mathbf{F}_{totq+}| = \sqrt{(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2})^2 + (\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a})^2}$$

Sulla carica -q, applichiamo lo stesso procedimento:

$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_{q+} + \mathbf{E}_{filo}$



$$\mathbf{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}(-\mathbf{j})$$

$$\mathbf{E}_{q+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2}\mathbf{i}$$

Quindi $$\mathbf{E}_{tot} = (\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a})$$

La forza si esprime come $$\mathbf{F}_{totq-} = \mathbf{E}_{tot}q = (\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}, -\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a})$$

il suo modulo è:

$|\mathbf{F_{totq-}}| = \sqrt{(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2})^2 + (-\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a})^2}$

Nell'istante iniziale le forze hanno stesso modulo e stesse componenti ma con verso opposto: la forza risultante è quindi nulla. Nell'istante successivo, la forza del campo elettrico del filo fa variare la distanza a, quindi la forza risultante non sarà più nulla.

3. Il momento della forza che agisce sul dipolo è:

$\mathbf{M} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}$ dove $\mathbf{p} = (qd, 0)$ e $\mathbf{E} = (0, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a})$

Allora, risolvendo il prodotto vettoriale:

$\mathbf{M} = qd\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\mathbf{k}$

il momento è un vettore perpendicolare sia a **p** che a **E**, il cui verso e la cui direzione sono determinati dalla regola della mano destra.

ESERCIZIO 2

Con questa connessione: il conduttore B è a potenziale nullo: $V_B = 0$, mentre il conduttore A è a potenziale $V_A = V_0 = 900$ V.

1. Applicando il teorema di Gauss si può trovare il campo elettrico e quindi il potenziale tra le armature del condensatore:

$$\Phi_S(\mathbf{E_0}) = \int_S \mathbf{E_0} \times \mathbf{dS} = E_0(r)\int_S dS = E_0(r)4\pi R^2$$

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{sfera} \rho(\tau)d\tau = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

Allora, uguagliando le due equazioni: $E_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

Il potenziale è $V(r) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$

Allora la capacità del condensatore sarà:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

ponendo all'interno i valori dati dall'esercizio:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi 8.85 \cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N \cdot m^2}\frac{20 \cdot 40}{40 - 20}10^{-2}m^2 = 44.4 \cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N \cdot m} = 44.4 \cdot 10^{-12}F$$

$$[\frac{C^2}{N \cdot m}] = [\frac{C^2}{Joule}] = [\frac{C}{V}] = [F]$$

2. Considerando il condensatore sferico e avendone calcolato la capacità:

$q = CV_0 = 44.4 \cdot 10^{-12}\frac{C}{V} \cdot 900V = 4 \cdot 10^{-8}C$ è la carica del condensatore

quindi: $q_1 = -q = -4 \cdot 10^{-8}C$ e $q_2 = +q = 4 \cdot 10^{-8}C$

Notiamo che q_1 negativa, perché la sfera cava A ha carica positiva e la sfera B è collegata a terra (quindi inizialmente neutra).
Per calcolare q_3, abbiamo bisogno di scrivere il potenziale della sfera cava B, che sappiamo essere $V_0 = 900$ V.

$V(r) = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ avendo posto $V(\infty) = 0$

Allora $V_0 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 6 \cdot 10^{-8}C$.

3. Per un condensatore sferico, l'energia elettrostatica è data da

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(4 \cdot 10^{-8})^2C^2}{44.4 \cdot 10^{-12}\frac{C}{V}} = \frac{1}{2}\frac{16 \cdot 10^{-16}}{44.4 \cdot 10^{-12}}J = 1.8 \cdot 10^{-5}J$$

ESERCIZIO 3

1. In assenza di dielettrico: $\mathbf{D_0} = \epsilon_0\mathbf{E_0}$

e nel caso di presenza di un dielettrico: $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ dove $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$
Sappiamo che **D** è conservativo, quindi $\mathbf{D_0} = \mathbf{D}$, allora possiamo scrivere che

$$\epsilon_0\mathbf{E_0} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E_0}}{\epsilon_r}$$

La d.d.p. tra le superfici del dielettrico dipende da **E**, quindi:

$$\Delta V = \int_{lamina} \mathbf{E} \times \mathbf{dl} = Ed = \frac{E_0}{\epsilon_r}d = 10^4\frac{V}{m}\frac{12.2 \cdot 10^{-2}}{3.52}m = 347V$$

2. Per quanto riguarda la densità superficiale delle cariche di polarizzazione:

$$|\sigma_P| = |\mathbf{P} \times \mathbf{n}| = |P| = \chi\epsilon_0\mathbf{E} = \chi\epsilon_0\frac{\mathbf{E_0}}{\epsilon_r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\epsilon_0\mathbf{E_0} = \frac{3.52 - 1}{3.52} \cdot 8.85\frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot 10^4\frac{V}{m} = 6.34 \cdot 10^{-8}\frac{C}{m^2}$$

$$[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot \frac{V}{m}] = [\frac{C^2}{Joule\ \ m} \cdot \frac{Joule}{C} \cdot \frac{1}{m}] = [\frac{C}{m^2}]$$

con verso opposto sulle due superfici della lamina.