

# Progettazione di un paranco elettrico

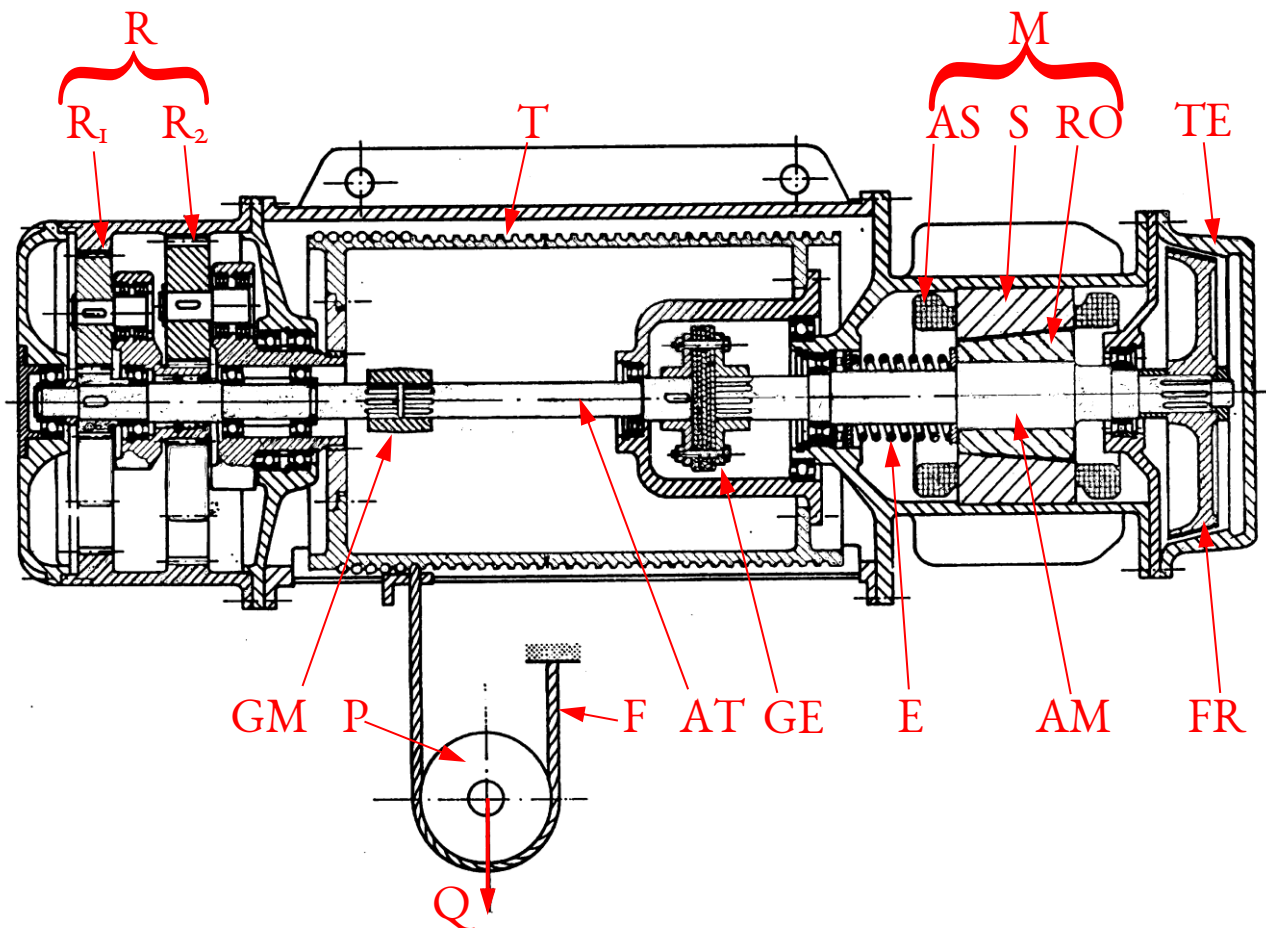


Figura 1: disegno in sezione del paranco.

**Legenda:** TE = telaio, FR = freno conico, AM = albero motore, M = motore, AS = avvolgimenti statorici, S = statore, RO = rotore, E = elemento elastico (molla), GE = giunto elastico, AT = albero di trasmissione, GM = giunto a manicotto, R = riduttore, R<sub>1</sub> = primo stadio di riduzione, R<sub>2</sub> = secondo stadio, T = tamburo scanalato, F = fune, P = puleggia, Q = peso del carico.

## 1. Funzionamento

Si fa riferimento alla *Figura 1*. Quando il motore **M** è spento, l'elemento elastico **E** (che è una molla elicoidale) spinge verso destra il rotore **RO** e l'albero motore **AM** a esso collegato. Così le due superfici coniche del freno **FR** e del telaio **TE** vengono spinte l'una sull'altra e tra di loro si trasmette una coppia d'attrito. Questa coppia serve a tenere fermo l'albero del paranco quando il motore è spento, per impedire il moto retrogrado; se infatti non ci fosse il freno, la forza peso **Q** del carico da sollevare tirerebbe verso il basso la fune **F** e farebbe muovere l'intero sistema in maniera incontrollata. Con questo sistema di frenatura, quando non arriva corrente al motore **M** il paranco resta fermo, ma senza consumare energia elettrica.

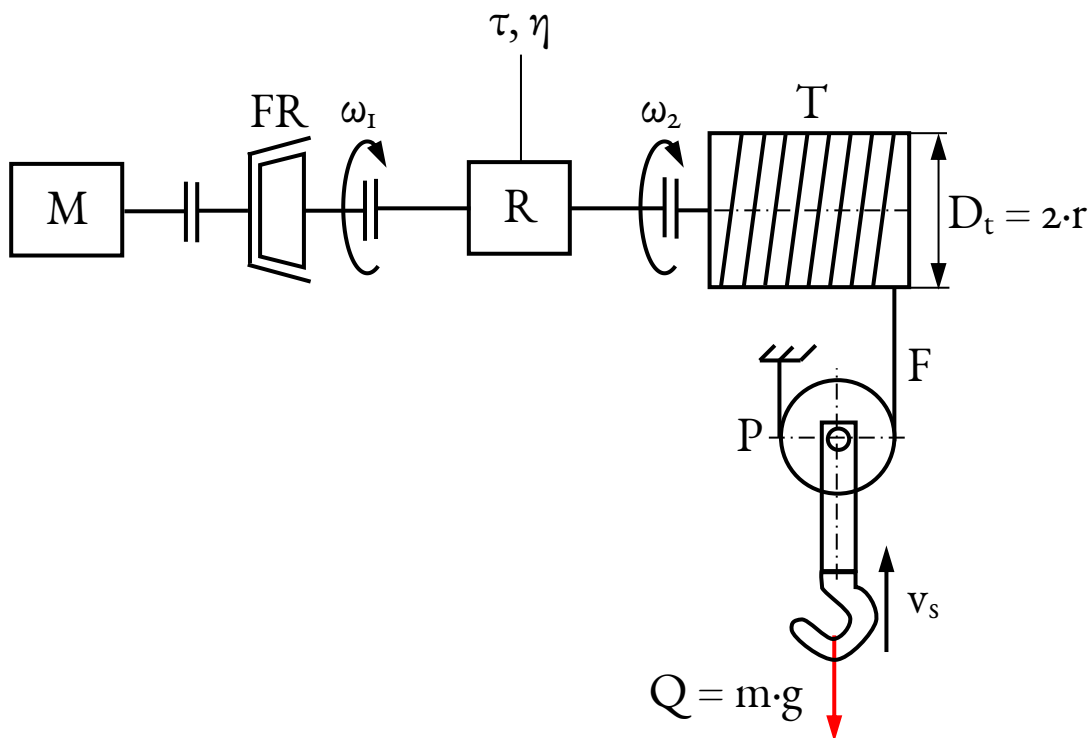
Quando il motore **M** viene attivato, mandando corrente agli avvolgimenti statorici **AS**, si crea una forza elettro-magnetica che vince quella della molla **E** e attrae il rotore **RO** verso sinistra, ossia verso lo statore **S**; questo si ottiene grazie alla particolare forma di rotore e statore, entrambi a tronco di cono. Quando la distanza tra rotore e statore (detta traferro) è minore del valore minimo richiesto per il funzionamento, la stessa forza elettro-magnetica fa ruotare il rotore rispetto allo statore, generando una coppia motrice.

L'albero motore **AM** è collegato con un giunto elastico **GE** a un albero di trasmissione **AT**. Il giunto serve per compensare gli inevitabili errori di allineamento tra il motore **M** e il riduttore **R** e per smorzare l'effetto di eventuali urti, nella catena di trasmissione, a valle del riduttore. Si pensi ad esempio a una brusca variazione del peso da sollevare; senza il giunto elastico, questi urti verrebbero trasmessi direttamente al motore e potrebbero danneggiarlo.

Lo spostamento assiale del blocco freno **FR** – rotore **RO** - albero motore **AM** è possibile perché l'albero di trasmissione **AT** è collegato al riduttore **R** con un giunto a manicotto **GM**, che trasmette la coppia motrice tra motore e riduttore ma consente piccoli spostamenti relativi in senso assiale.

Il riduttore è di tipo epicicloidale ed è composto da due stadi di riduzione in serie, **R<sub>1</sub>** e **R<sub>2</sub>**. Il secondo stadio **R<sub>2</sub>** è collegato al tamburo scanalato **T** che solleva un capo della fune **F**; a tale fune è appesa la puleggia **P** che solleva il carico, avente peso **Q**. Infine, l'altro capo della fune **F** è collegato al telaio.

Lo schema di funzionamento è in *Figura 2*.



*Figura 2:* schema funzionale del paranco elettrico.

**Legenda:** **M** = motore, **FR** = freno, **R** = riduttore, **T** = tamburo, **P** = puleggia, **F** = fune.

## 2. Elenco simboli

$Q$	[kN]	<u>Forza peso</u> del carico da sollevare
$D_t$	[mm]	<u>Diametro</u> del tamburo
$v_s$	[m/min]	<u>Velocità</u> di sollevamento del carico
$v_f$	[m/min]	<u>Velocità</u> della fune
$n_m$	[giri/min]	<u>Velocità di rotazione</u> del motore
$\Delta$	[mm]	<u>Diametro</u> della fune
$\delta$	[mm]	<u>Diametro</u> dei fili della fune
$i_f$		<u>Numero</u> di fili della fune
$C_s$		<u>Coefficiente di sicurezza</u> richiesto per la fune
$\eta$		<u>Rendimento</u> complessivo del paranco (in moto diretto)
$\tau$		<u>Rapporto di trasmissione</u> del riduttore
$P_m$	[kW]	<u>Potenza</u> del motore
$Z_i'$		<u>Numero</u> di denti della ruota $i$ , nel primo stadio di riduzione
$Z_i''$		<u>Numero</u> di denti della ruota $i$ , nel secondo stadio di riduzione
$N_{s,j}$		<u>Numero</u> dei satelliti del $j$ -esimo stadio di riduzione ( $j = 1$ oppure $2$ )
$F_r$	[kN]	<u>Carico di rottura</u> minimo garantito della fune
$\sigma_r$	[N/mm <sup>2</sup> ]	<u>Tensione di rottura</u> minima garantita della fune

## 3. Consegna

- Scegliere la potenza  $P_m$  del motore tra le opzioni fornite nel paragrafo successivo;
- Scegliere la fune  $F$  tra quelle disponibili nel manuale indicato [1];
- Determinare il diametro  $D_t$  del tamburo di avvolgimento;
- Dimensionare, dal punto di vista cinematico, il riduttore posto tra freno e tamburo, indicando per entrambi gli stadi di riduzione ( $R_1$  e  $R_2$ ) il numero di satelliti  $N_s$  e il numero di denti  $Z_i$  di ciascuna ruota.

---

[1] Per gli studenti in difficoltà nel trovare il manuale in questione, viene allegato, sulla pagina con i materiali didattici del corso (<http://campus.unibo.it/283146/>), un estratto dal catalogo della Redaelli S.p.A.. Si può quindi decidere se usare la tabella di funi del manuale o quella del catalogo; chiaramente nei due casi si otterranno dei risultati differenti. In ogni caso gli altri parametri di progetto sono quelli indicati in questa dispensa. Nell'esempio qui svolto, si useranno funi tratte dal manuale indicato.

#### 4. Dati

	$0 \leq S \leq 24$	$25 \leq S \leq 49$	$50 \leq S \leq 74$	$75 \leq S \leq 99$
<b>Q</b> [kN]	20	32	50	70
<b>v<sub>s</sub></b> [m/min]	16	20	12	15
<b>n<sub>m</sub></b> [giri/min]	1450	1450	700	700
<b>η</b>	0.8	0.8	0.8	0.8

I dati del problema da risolvere per il quaderno degli esercizi cambiano da studente a studente, come indicato nella tabella sopra; **S** = ultime due cifre del numero di matricola.

La potenza **P<sub>m</sub>** del motore va scelta tra i possibili valori di seguito:

<b>P<sub>m</sub></b> [kW]	1.5	3	4.2	5.1	8	10.5	12.5	16.5	22
---------------------------	-----	---	-----	-----	---	------	------	------	----

Il coefficiente di sicurezza per la fune deve essere **C<sub>s</sub>** = 6 per tutti gli studenti; il numero di satelliti **N<sub>s</sub>** deve essere compreso, per entrambi gli stadi di riduzione, tra 2 e 4.

#### 5. Svolgimento

Assumiamo, a titolo di esempio, i seguenti dati:

<b>Q</b> [kN]	10
<b>v<sub>s</sub></b> [m/min]	12
<b>n<sub>m</sub></b> [giri/min]	1470
<b>η</b>	0.9

##### 5.1. Scelta del motore

La potenza resistente e la potenza motrice sono date da

$$P_r = \frac{Q \cdot v_s}{60} = \frac{10 \cdot 12}{60} = 2 \text{ kW} \quad [1]$$

$$P_m \geq \frac{P_r}{\eta} = \frac{2}{0.9} = 2.22 \text{ kW} \quad [2]$$

e quindi dalla lista dei motori disponibili si sceglie quello con potenza **P<sub>m</sub>** = 3 kW. Si noti che, se **P<sub>m</sub>** > **P<sub>r</sub>** / **η**, tenendo lo stesso carico **Q** avremo una **v<sub>s</sub>** effettiva maggiore di quella richiesta nei dati del problema; solitamente però si può trascurare questo effetto, a meno che la differenza non sia troppo elevata.

##### 5.2. Scelta della fune e del diametro del tamburo

Per la scelta della fune si fa riferimento ai dati dal catalogo funi Redaelli, come riportati nel manuale “Nuovo Colombo” (Colombo, 2012). Il manuale suggerisce, per funi in macchine di sollevamento materiali, un fattore di sicurezza tra 4 e 8 (vedi Tabella 31 a pag. F85); qui prenderemo il valore intermedio **C<sub>s</sub>** = 6.

La forza agente sulla fune è **Q** / 2, perché la puleggia è sostenuta da due tratti di fune. La fune deve pertanto poter reggere un carico pari almeno a **Q** / 2, maggiorato del fattore di sicurezza **C<sub>s</sub>**. Segue allora

$$F_R \geq \frac{Q}{2} \cdot C_S = \frac{10}{2} \cdot 6 = 30 \text{ kN} \quad [3]$$

dove  $F_R$  è il carico di rottura minimo garantito della fune.

Il manuale fornisce anche altre indicazioni generali per la scelta delle funi. In particolare, la tab. 32 a pag. F96 suggerisce che, per questa applicazione (funi per montacarichi), si dovrebbero prendere questi parametri:

$$0.6 \leq \delta \leq 2, \quad 42 \leq i_f \leq 180, \quad D_t/\delta \geq 400, \quad D_t/\Delta \geq 25 \quad [4]$$

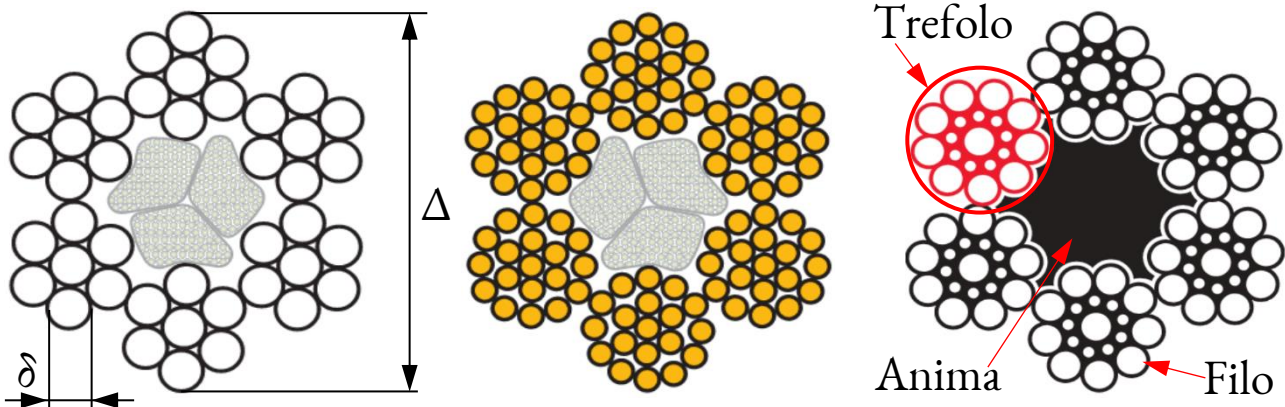


Figura 3: a sinistra, sezione di una fune con 42 fili (6 trefoli da 7 fili ognuno). Al centro, una fune con 114 fili in 6 trefoli da 19 fili; a destra, un'altra fune, sempre con 114 fili, ma con trefoli costruiti diversamente. Si sono anche indicati i diametri  $\Delta$  (della fune) e  $\delta$  (del filo); le tre funi hanno anima centrale in fibra tessile.

Le ultime due condizioni, sui rapporti  $D_t / \delta$  e  $D_t / \Delta$ , impongono un limite minimo alle dimensioni del tamburo: se infatti la fune viene avvolta e svolta ripetutamente con un raggio troppo piccolo, essa avrà una breve durata di servizio prima di cedere. Per contro, aumentare il raggio del tamburo significa aumentare costi e ingombri; inoltre aumenta anche la coppia resistente che il paranco deve vincere, data dalla tensione della fune per il raggio di avvolgimento (in formule,  $C_R = (Q/2) \cdot D_t/2$ ).

La tabella 29 nel manuale (pag. da 91 a 93) propone una serie di funi con numero di fili crescente; noi consideriamo però solo quelle con  $i_f < 180$ , per quanto visto nella eq. [4]. Le funi possono essere realizzate con fili aventi tensione minima di rottura  $\sigma_r$  di 1300 o 1600 N/mm<sup>2</sup>. Ciascuna di queste funi è inoltre disponibile in diverse misure, cioè con diverso diametro complessivo  $\Delta$ ; naturalmente noi prenderemo quella più piccola, a parità di altre condizioni. Cercando a catalogo, troviamo le funi riassunte nella tabella seguente.

	$\sigma_R = 1300 \text{ [N/mm}^2\text{]}$					$\sigma_R = 1600 \text{ [N/mm}^2\text{]}$					
	$i_f$	$F_r \text{ [kN]}$	$\Delta \text{ [mm]}$	$\delta \text{ [mm]}$	$25 \Delta$	$400 \delta$	$F_r \text{ [kN]}$	$\Delta \text{ [mm]}$	$\delta \text{ [mm]}$	$25 \Delta$	$400 \delta$
	42	30	8	0.88	200	352	37	8	0.88	200	352
	114	34.5	9	0.6	225	240	42.5	9	0.6	225	240
	114	36	9	0.72	225	288	35	8	0.64	200	256
	150	45	10	0.65	250	260	56	10	0.65	250	260

Tabella 1: catalogo delle possibili funi (da manuale "Nuovo Colombo").

Per ciascuna fune abbiamo indicato, oltre ai parametri generali ( $F_R$ ,  $\Delta$  e  $\delta$ ), anche il diametro minimo del tamburo, come indicato dalle condizioni in [4]; cioè, siccome deve essere  $D_t / \delta > 400$  e  $D_t / \Delta > 25$ ,  $D_t$  dovrà essere maggiore sia di  $25 \Delta$  che di  $400 \delta$ . Nella tabella abbiamo indicato in rosso, per ciascuna possibile fune, la più stringente di queste due condizioni, ossia quella che corrisponde al diametro  $D_t$  più elevato.

Si vede come il diametro minimo si ottenga con una fune avente  $i_f = 114$ ,  $\Delta = 9$  mm e tensione di rottura  $\sigma_R = 1300$  N/mm<sup>2</sup>; si potrebbe ottenere lo stesso risultato con una fune avente  $\sigma_R = 1600$  N/mm<sup>2</sup>, ma questa sarebbe inutilmente più costosa. La fune scelta (evidenziata in giallo in tabella) in definitiva richiede un tamburo con diametro  $D_t = 240$  mm. Sulla base di questa scelta dimensioneremo ora il riduttore.

### 5.3. Dimensionamento del riduttore

La velocità angolare del motore è già nota (in giri/min) dai dati del problema; espressa in rad/s vale

$$\omega_1 = n_m \cdot \frac{2\pi}{60} = 1470 \cdot \frac{2\pi}{60} = 153.9 \text{ rad/s} \quad [5]$$

Ora si tratta di ricavare la velocità  $v_f$  della fune, nota la velocità  $v_s$  di sollevamento del carico. La puleggia  $P$  ruota intorno al punto  $O$ , centro di istantanea rotazione; poiché il punto d'attacco della fune è a una distanza doppia da  $O$  rispetto al punto di attacco del carico (che è nel centro della puleggia), si trova che la velocità della fune è il doppio di quella del carico. Si veda *Figura 4*. In formule scriviamo

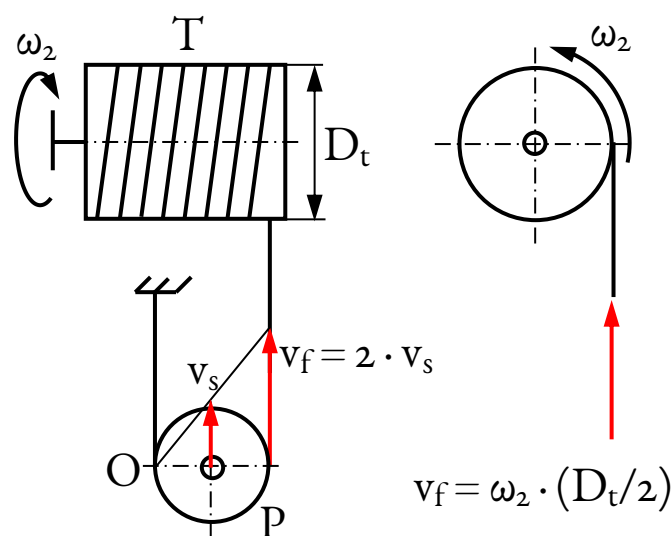
$$v_f = v_s \cdot 2 = \omega_2 \cdot \frac{D_t}{2} \quad [6]$$

dove si è anche espressa  $v_f$  in funzione della velocità di rotazione  $\omega_2$  del tamburo, avente raggio  $D_t/2$ . In definitiva dalla [6] si ricava la velocità di rotazione del tamburo:

$$\omega_2 = v_f / \left(\frac{D_t}{2}\right) = (2v_s) / \left(\frac{D_t}{2}\right) = \frac{2 \cdot (12/60)}{0.24/2} = 3.33 \text{ rad/s} \quad [7]$$

( $v_s$  è espressa in m/min, quindi va divisa per 60) e di conseguenza il rapporto di trasmissione dovrà essere

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3.33}{153.9} = 2.17 \cdot 10^{-2} \Rightarrow i = \frac{1}{\tau} = 46.2 \quad [8]$$



*Figura 4:* schema delle velocità di fune, carico e tamburo.

Dobbiamo ora ricavare i rapporti di trasmissione  $\tau_1$  e  $\tau_2$  dei due stadi del riduttore, posto che deve valere

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 \Rightarrow i = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{1}{\tau_2} = i_1 i_2 \quad [9]$$

Bisogna anche considerare dei criteri di buon proporzionamento, indicati dai manuali o dall'esperienza:

$$i_2 \cong i_1, \quad i_2 \leq i_1 \quad [10]$$

Cioè i due rapporti  $i_1$  e  $i_2$  devono essere circa uguali ed è preferibile che il maggiore dei due sia il primo. Combinando la [9] e la [10] si ottiene

$$i = i_1 i_2 \cong i_1^2 \Rightarrow i_1 \cong \sqrt{i} = \sqrt{46.2} = 6.8 \Rightarrow i_1 = 7 \Rightarrow i_2 = \frac{i}{i_1} = \frac{46.2}{7} = 6.6 \quad [11]$$

I due stadi sono entrambi epicicloidali. Per essi vale allora la formula del Willis: con riferimento alla *Figura 5*, il rapporto di trasmissione di ciascuno stadio è

$$\tau = \frac{1}{i} = \frac{\omega_P}{\omega_{SO}} = \frac{Z_{SO}}{Z_{SO} + Z_C} \Rightarrow Z_{SO} \cdot i = Z_{SO} + Z_C \quad [12]$$

La formula [12] si dimostra come segue: si comincia considerando il rotismo ordinario, cioè quello che si ottiene considerando il portasatelliti **P** fisso e la corona **C** rotante intorno allo stesso asse del solare **SO**. Si ha così che tutti i membri ruotano intorno ad assi fissi. Il rapporto di trasmissione tra corona e solare è allora

$$\tau_0 = \frac{\omega_{C,F}}{\omega_{SO,F}} = \frac{\omega_{C,P}}{\omega_{SO,P}} = \frac{\omega_{C,P}}{\omega_{SA,P}} \frac{\omega_{SA,P}}{\omega_{SO,P}} = \frac{Z_{SA}}{Z_C} \cdot \left( -\frac{Z_{SO}}{Z_{SA}} \right) = -\frac{Z_{SO}}{Z_C} \quad [13]$$

Qui, il pedice **F** indica che le velocità di rotazione sono misurate rispetto al membro fisso; nel caso del rotismo ordinario, questo è il portasatelliti **P**.  $\tau_0$  è negativo, perché corona e solare girano in versi opposti.

Questo rapporto di trasmissione  $\tau_0$  deve rimanere lo stesso anche se calcolato per il rotismo epicicloidale corrispondente, ossia misurando le velocità di rotazione rispetto al portasatelliti, che ruota a sua volta: si ha

$$\tau_0 = \frac{\omega_{C,P}}{\omega_{SO,P}} = \frac{\omega_C - \omega_P}{\omega_{SO} - \omega_P} = \frac{-\omega_P}{\omega_{SO} - \omega_P} \quad [14]$$

dove si è introdotto  $\omega_C = 0$ , perché nel rotismo epicicloidale la corona **C** è fissa. Di qui si ricava

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\omega_{SO} - \omega_P}{-\omega_P} = -\frac{\omega_{SO}}{\omega_P} + \frac{\omega_P}{\omega_P} = -\frac{1}{\tau} + 1 = \frac{\tau - 1}{\tau} \quad [15]$$

avendo introdotto la definizione dell'eq. [12] del rapporto di trasmissione  $\tau$  del rotismo epicicloidale. Di qui infine si ricava, con semplici passaggi algebrici,

$$\tau = \tau_0(\tau - 1) = \tau_0\tau - \tau_0 \Rightarrow \tau_0 = \tau(\tau_0 - 1) \Rightarrow \tau = \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1} \quad [16]$$

e introducendo infine la formula per  $\tau_0$  vista in [13] si ottiene

$$\tau = \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1} = \frac{(-Z_{SO}/Z_C)}{(-Z_{SO}/Z_C) - 1} = \frac{-Z_{SO}}{-Z_{SO} - Z_C} = \frac{Z_{SO}}{Z_{SO} + Z_C} \quad [17]$$

con il che si è dimostrata l'equazione [12].

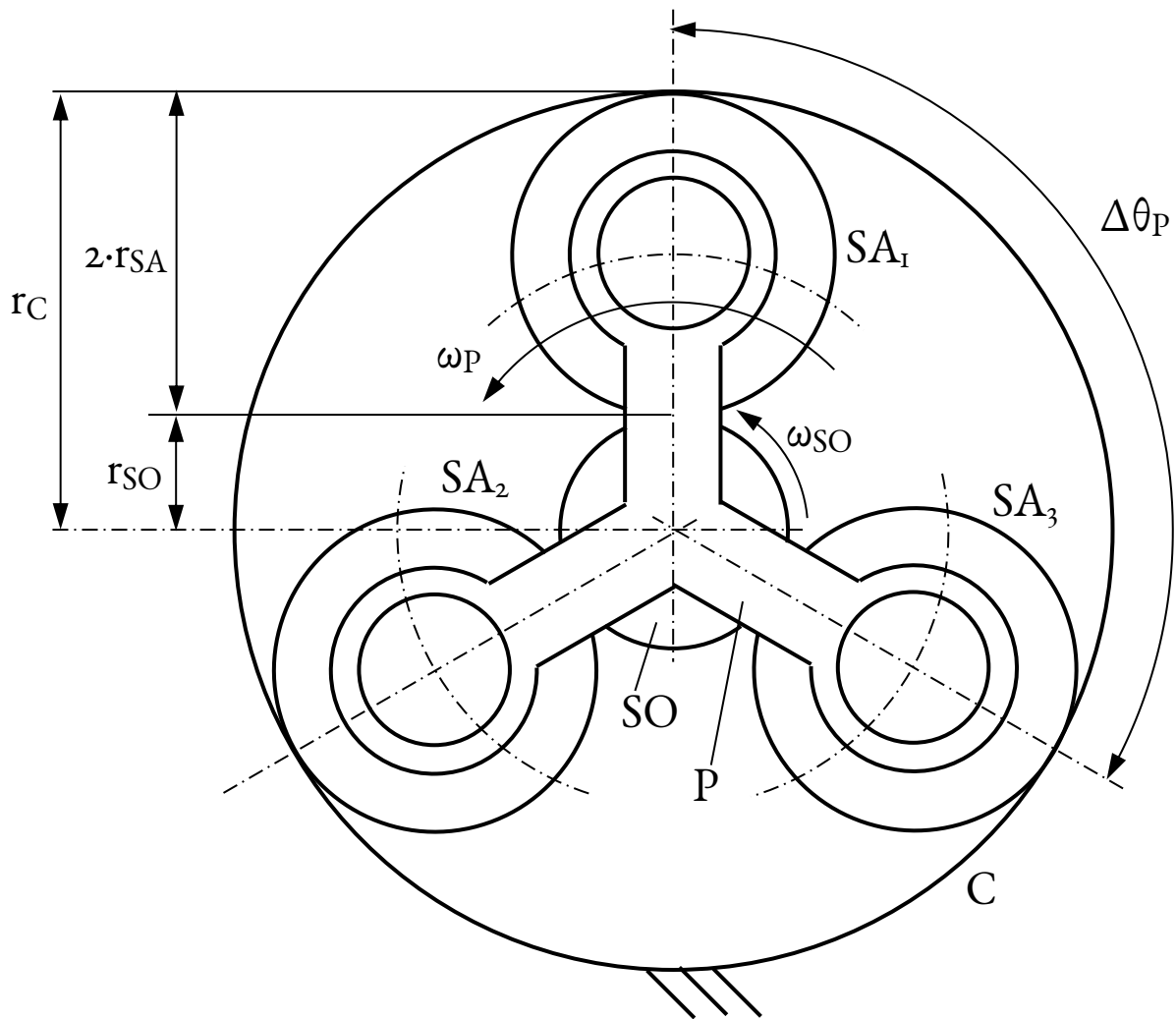


Figura 5: schema di uno stadio di riduttore epicicloidale, con  $N_s = 3$  satelliti.

**Legenda:** SO = solare, SA = satelliti, P = portasatelliti, C = corona.

Un'altra condizione da considerare è che, come si vede dalla figura,

$$r_{SO} + 2r_{SA} = r_C \quad [18]$$

dove  $r_i$  è il raggio primitivo della ruota  $i$ . Questa corrisponde alla condizione di montaggio delle ruote: i satelliti e il solare, cioè le ruote dentate esterne del rotismo, devono poter entrare dentro la corona, che è una ruota dentata interna. Ricordiamo la definizione del modulo  $m$  di una ruota dentata:

$$m = \frac{d_p}{Z} = \frac{2r_p}{Z} \Rightarrow r_p = \frac{mZ}{2} \quad [19]$$

dove  $d_p$  è il diametro primitivo della ruota e  $Z$  è il numero di denti. Sostituendo allora l'equazione [19] nella [18], si ricava

$$Z_{SO} + 2Z_{SA} = Z_C \quad [20]$$

avendo considerato che  $m$  deve essere lo stesso per solare, satelliti e corona, visto che queste ruote dentate devono poter ingranare tra di loro.



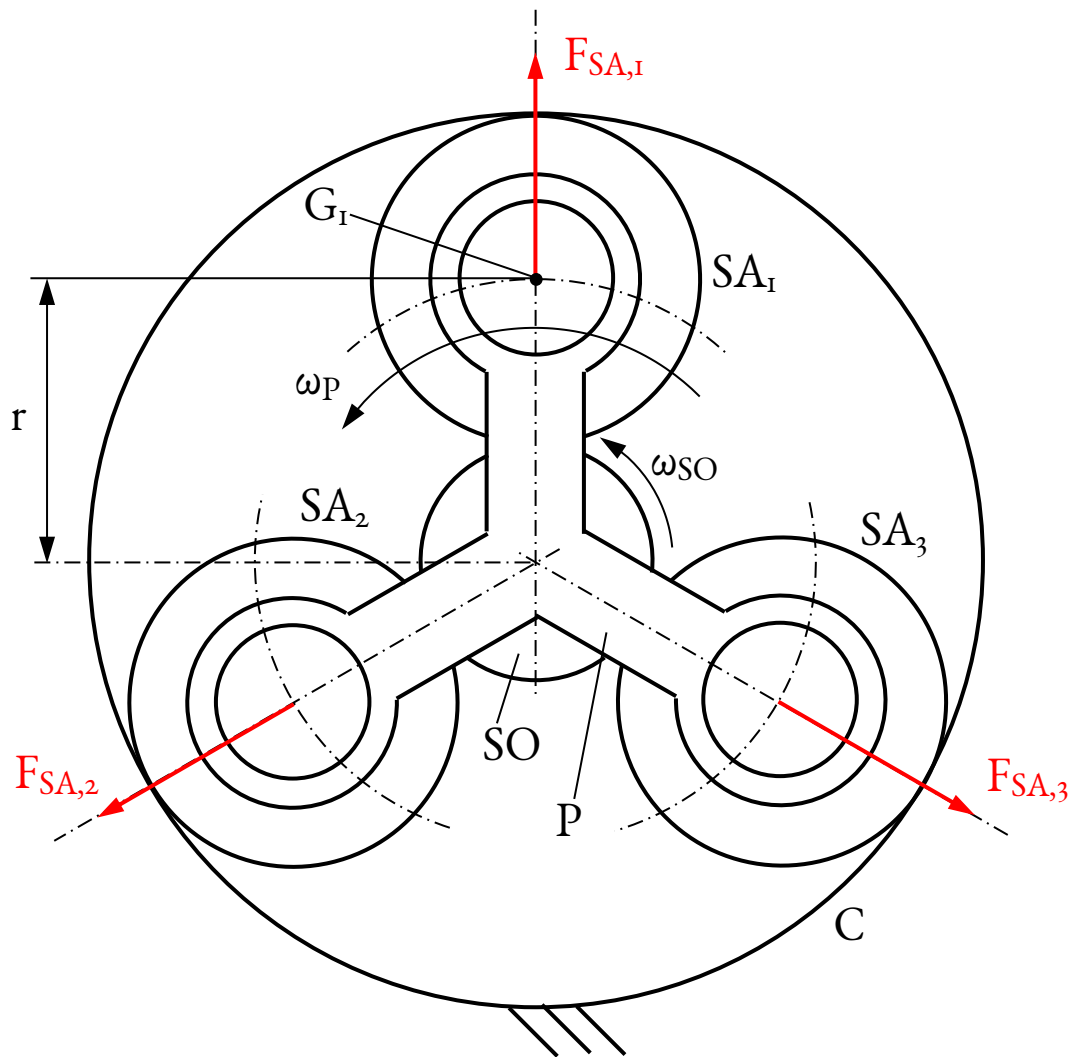


Figura 6: forze centrifughe agenti sui satelliti dello stadio di riduttore.

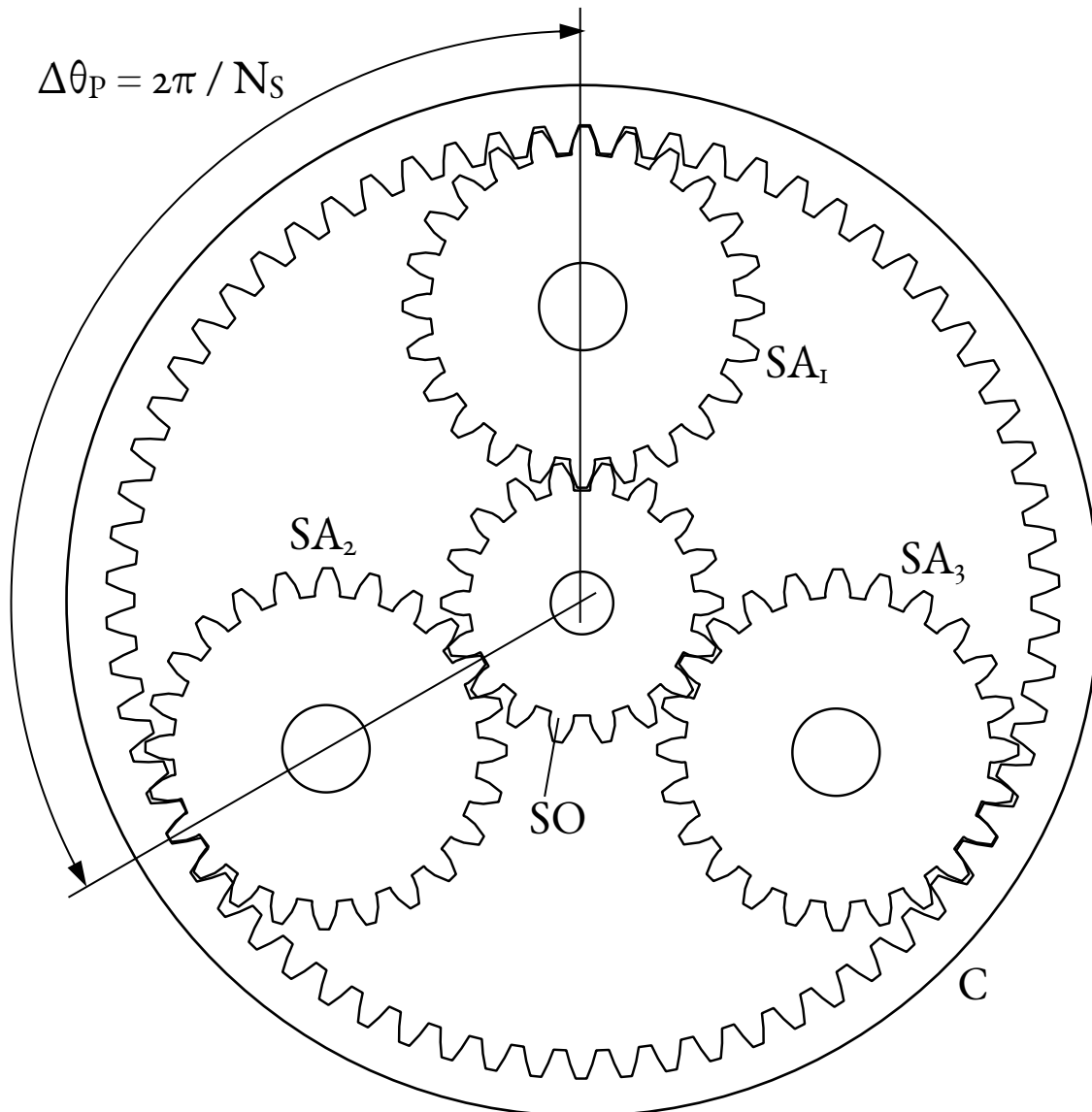
L'ultima condizione da inserire per trovare il numero di denti di ciascuna ruota nasce da considerazioni di simmetria. I satelliti **SA** di un riduttore epicicloidale vengono distribuiti a intervalli regolari intorno al solare **SO**: così facendo le forze centrifughe agenti su ciascuno dei satelliti si bilanciano tra di loro.

Con riferimento alla *Figura 6* sia infatti  $F_{SA,i}$  la forza inerziale agente sulla ruota **i**. Se siamo in condizioni di moto a regime, le velocità di rotazione in ingresso  $\omega_{SO}$  e in uscita  $\omega_P$  sono costanti. La forza  $F_{SA,i}$  ha allora solo una componente radiale, di modulo  $|F_{SA,i}| = m_{SA,i} \cdot (\omega_P)^2 \cdot r$ , dove  $m_{SA,i}$  è la massa della ruota **i**,  $\omega_P$  la velocità di rotazione del portasatelliti (che corrisponde alla velocità di rotazione dei satelliti intorno all'asse centrale) e  $r$  è la distanza del baricentro  $G_i$  dall'asse del solare.  $F_{SA,i}$  corrisponde a una forza centrifuga.

È chiaro allora che, se le ruote hanno massa uguale, le forze d'inerzia  $F_{SA,i}$  sono uguali in modulo, ma con direzione diversa; se le ruote sono poi disposte simmetricamente intorno all'asse centrale, queste forze si equilibrano tra loro e la risultante del sistema di forze è nulla. Si hanno così minori sforzi sui supporti (cuscinetti, etc.) e un sistema che è bilanciato rispetto alle forze d'inerzia, con i vantaggi che questo comporta in termini di riduzione delle vibrazioni.

Si consideri adesso un riduttore con  $N_S$  satelliti distribuiti regolarmente, con un angolo tra un satellite e il successivo pari a  $\Delta\theta_P = 2\pi / N_S$ .

Si ruoti ora il portasatelliti di un angolo  $\Delta\theta_P$ , in modo che, ad esempio, il satellite **1** vada nella posizione che prima era occupata dal satellite **2**. Perché i satelliti continuino a ingranare correttamente (vedi *Figura 7*), è necessario allora che **1** abbia, in questa nuova posizione, la stessa “immagine” che prima aveva **2**, dove con immagine si intende la proiezione del profilo della dentatura sul piano di figura. Allora, la ruota dentata al centro, cioè il solare **SO**, per ingranare con **1** deve rappresentare la stessa immagine che aveva prima della rotazione di  $\Delta\theta_P$  del portasatelliti **P**.



*Figura 7:* schema di uno stadio di riduttore, con  $N_S = 3$  satelliti. Qui è mostrata la dentatura delle ruote.

Una ruota dentata può avere, nelle due posizioni successive, la stessa immagine se e solo se è ruotata di un multiplo intero  $k$  del passo angolare  $p_\theta$ , dove il passo corrisponde all'angolo tra un dente e il successivo:

$$\Delta\theta = k \cdot p_\theta = k \cdot \frac{2\pi}{Z}, \quad k \in \mathbb{N} \quad [21]$$

essendo  $\Delta\theta$  l'angolo di rotazione della ruota e  $Z$  il numero di denti. Si veda *Figura 8*.

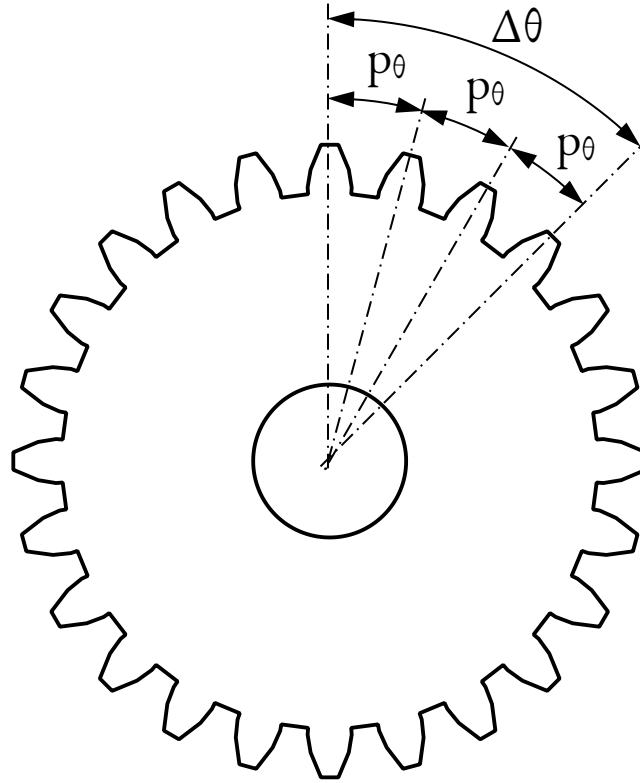


Figura 8: una ruota dentata si riporta nella stessa posizione se è ruotata di un multiplo intero del passo  $p_\theta$ .

In questo caso si ha allora che a una rotazione del satellite  $\Delta\theta_P = 2\pi / N_S$  deve corrispondere una rotazione del solare  $\Delta\theta_{SO}$  che è multiplo intero del passo angolare  $p_\theta$ ; in formule

$$\Delta\theta_{SO} = k \cdot \frac{2\pi}{Z_{SO}} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \Delta\theta_P = \frac{2\pi}{N_S} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_P}{\Delta\theta_{SO}} = \left(\frac{2\pi}{N_S}\right) / \left(k \cdot \frac{2\pi}{Z_{SO}}\right) = \frac{Z_{SO}}{k \cdot N_S} \quad [22]$$

Ma il rapporto  $\Delta\theta_P / \Delta\theta_{SO}$  corrisponde al rapporto di trasmissione  $\tau$ : infatti come noto

$$\tau = \frac{\omega_P}{\omega_{SO}} = \frac{(d\theta_P/dt)}{(d\theta_{SO}/dt)} = \frac{d\theta_P}{d\theta_{SO}} = \frac{\Delta\theta_P}{\Delta\theta_{SO}} \quad [23]$$

Nell'ultimo passaggio si è sostituita la derivata  $d\theta_P / d\theta_{SO}$ , rapporto tra variazioni infinitesime, con  $\Delta\theta_P / \Delta\theta_{SO}$ , un rapporto tra variazioni finite: in questo caso ciò è lecito perché la derivata in questione, ossia  $\tau$ , è costante.

Mettendo insieme le equazioni [22] e [23] con quanto visto nella equazione [12] si trova

$$\frac{Z_{SO}}{Z_{SO} + Z_C} = \tau = \frac{\Delta\theta_P}{\Delta\theta_{SO}} = \frac{Z_{SO}}{k \cdot N_S} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [24]$$

e da qui infine

$$Z_{SO} + Z_C = k \cdot N_S \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [25]$$

A questo punto abbiamo un insieme di tre condizioni date dalle eq. [12], [20] e [25]. Definiamo i rapporti di ingranamento tra solare e satelliti  $\tau_{OA}$  e tra satelliti e corona  $\tau_{AC}$

$$\tau_{OA} = \frac{Z_{SO}}{Z_{SA}}, \quad \tau_{AC} = \frac{Z_{SA}}{Z_C} \quad [26]$$

Deve valere, per la [12],

$$Z_{SO} \cdot i = Z_{SO} + Z_C \Rightarrow \frac{Z_{SO}}{Z_{SA}} \cdot i = \tau_{OA} \cdot i = \frac{Z_{SO}}{Z_{SA}} + \frac{Z_C}{Z_{SA}} = \tau_{OA} + \frac{1}{\tau_{AC}} \Rightarrow \tau_{OA} \cdot (i - 1) = \frac{1}{\tau_{AC}} \quad [27]$$

dividendo entrambi i termini per  $Z_{SA}$  e semplificando. Similmente, per la [20],

$$Z_{SO} + 2Z_{SA} = Z_C \Rightarrow \frac{Z_{SO}}{Z_{SA}} + 2 \frac{Z_{SA}}{Z_{SA}} = \tau_{OA} + 2 = \frac{Z_C}{Z_{SA}} = \frac{1}{\tau_{AC}} \quad [28]$$

E sostituendo la [28] nella [27] si ricava

$$\tau_{OA} + 2 = \tau_{OA} \cdot (i - 1) \Rightarrow 2 = \tau_{OA} \cdot (i - 2) \Rightarrow \tau_{OA} = \frac{2}{i - 2} \quad [29]$$

Infine, sostituendo quest'ultima equazione nella [27],

$$\frac{1}{\tau_{AC}} = \tau_{OA} \cdot (i - 1) = \frac{2 \cdot (i - 1)}{i - 2} \Rightarrow \tau_{AC} = \frac{i - 2}{2(i - 1)} \quad [30]$$

Tornando ora alle definizioni di  $\tau_{OA}$  e  $\tau_{AC}$  possiamo ricavare il numero di denti dei satelliti  $Z_{SA}$  e della corona  $Z_C$  in funzione di  $i$  e del numero di denti del solare  $Z_{SO}$ . Infatti, sostituendo la [26] nella [29],

$$\tau_{OA} = \frac{2}{i - 2} = \frac{Z_{SO}}{Z_{SA}} \Rightarrow Z_{SA} = \frac{i - 2}{2} Z_{SO} \quad [31]$$

E da qui, inserendo la [30],

$$\tau_{AC} = \frac{i - 2}{2(i - 1)} = \frac{Z_{SA}}{Z_C} \Rightarrow Z_C = \frac{2(i - 1)}{i - 2} Z_{SA} = \frac{2(i - 1)}{i - 2} \cdot \frac{i - 2}{2} Z_{SO} = (i - 1) \cdot Z_{SO} \quad [32]$$

A questo punto dobbiamo introdurre la condizione di non interferenza di taglio per le ruote esterne:

$$Z \geq 17 \quad [33]$$

che vale per ruote ottenute per taglio con utensile creatore e aventi angolo di pressione di  $20^\circ$ . Poi bisogna ricordare la condizione di non interferenza di lavoro tra due ruote dentate che ingranano tra di loro:

$$Z \geq \frac{2\tau}{-1 + \sqrt{1 + \tau \cdot (2 + \tau) \sin^2 \alpha}} \quad [34]$$

dove  $\tau$  è il rapporto di trasmissione e  $\alpha$  l'angolo di pressione, che in questo caso appunto è  $20^\circ$ . Possiamo fare un grafico del valore minimo di  $Z$  (per la ruota dentata più piccola) in funzione di  $\tau$ ; si veda *Figura 9*. Come si vede, la condizione più restrittiva è la [33] per gli ingranaggi esterni ( $\tau > 0$ ) e la [34] per quelli interni ( $\tau < 0$ ). Pertanto, sul solare **SO**, che fa parte di un ingranamento esterno con i satelliti **SA**, dovremo considerare la prima equazione; sui satelliti stessi, invece, che fanno parte di un ingranamento interno con la corona **C**, dovremo controllare che sia rispettata la seconda equazione. Infine, per l'ingranamento interno, dovremo anche controllare che non ci sia interferenza secondaria tra corona e satelliti: deve valere allora

$$Z_C - Z_{SA} \geq 8 \quad [35]$$

Per le dimostrazioni delle eq. da [33] a [35] si faccia riferimento a (Funaioli, et al., 2005).

A questo punto possiamo procedere a calcolare il numero di denti di tutte le ruote, per entrambi gli stadi.

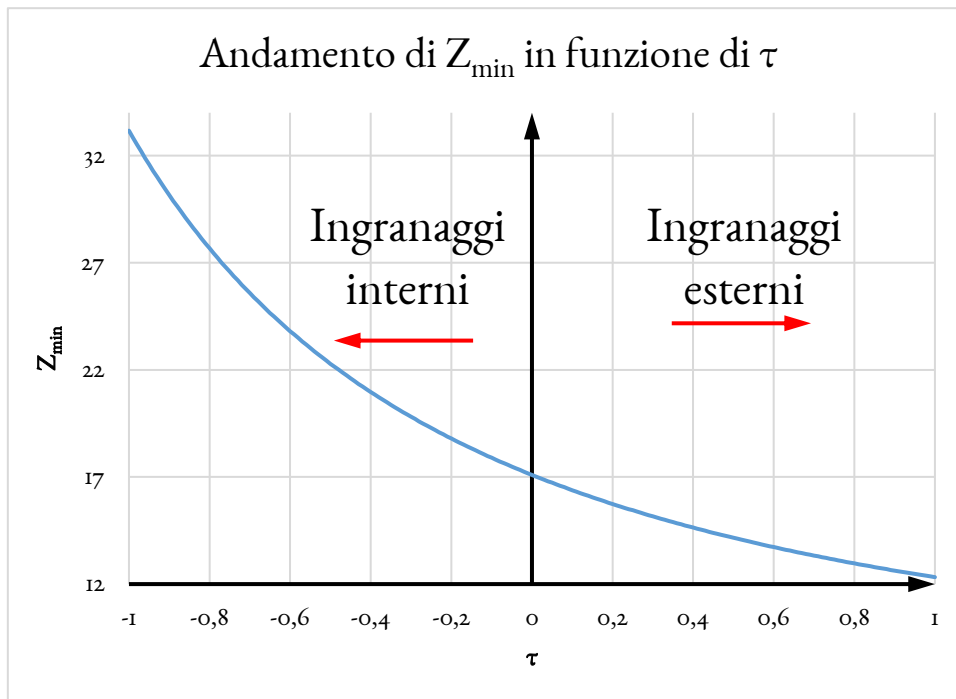


Figura 9: andamento del numero minimo dei denti della ruota più piccola in un ingranamento, in funzione del rapporto di trasmissione.

Per il primo stadio di riduzione, nella [11] avevamo fissato  $i_1 = 7$ ; dalla [31] segue allora

$$Z'_{SA} = \frac{i_1 - 2}{2} Z'_{SO} = \frac{7 - 2}{2} Z'_{SO} = \frac{5}{2} Z'_{SO} \quad [36]$$

e dalla [32]

$$Z'_C = (i_1 - 1) \cdot Z'_{SO} = (7 - 1) \cdot Z'_{SO} = 6 \cdot Z'_{SO} \quad [37]$$

Per determinare  $Z'_{SO}$ , dobbiamo ricordare la [33], che impone  $Z'_{SO} > 17$ , mentre la [36] implica che  $Z'_{SO}$  sia multiplo di 2 (altrimenti  $Z'_{SA}$  non sarebbe un numero intero). Come valore di primo tentativo scegliamo  $Z'_{SO} = 18$ ; allora dalle [36] e [37] si ha  $Z'_{SA} = 45$  e  $Z'_C = 108$ . La condizione di non interferenza secondaria [35] è già verificata ( $Z'_C - Z'_{SA} > 8$ ); resta da verificare la condizione di non interferenza di lavoro. In questo caso nella [34] bisogna sostituire a  $\tau$  il rapporto ( $-\tau'_{AC}$ ) tra satelliti e corona; dalla definizione in [26]

$$\tau'_{AC} = \frac{Z'_{SA}}{Z'_C} = \frac{45}{108} = 0.417 \quad [38]$$

da cui, sostituendo nella [34],

$$Z'_{SA} \geq \frac{-2\tau'_{AC}}{-1 + \sqrt{1 - \tau'_{AC} \cdot (2 - \tau'_{AC}) \sin^2 20^\circ}} = 21.2 \quad [39]$$

condizione che come si vede è verificata [2]. Rimane da determinare il numero di satelliti  $N'_s$ : dalla [25]

$$k = \frac{Z'_{SO} + Z'_C}{N'_s} = \frac{108 + 18}{N'_s} = \frac{126}{N'_s} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [40]$$

[2] Si noti che nella [39] si è inserito il rapporto ( $-\tau'_{AC}$ ), con segno negativo, per tenere conto del fatto che l'ingranamento tra corona e satelliti è interno, dunque il rapporto di trasmissione a rigore è negativo.

Perché  $k$  sia intero,  $N''_s$  deve essere divisore di 126. Prendere  $N''_s = 2$  potrebbe andare bene, ma solitamente per ragioni costruttive i satelliti sono almeno 3; dato che anche questo è un divisore di 126, fissiamo  $N''_s = 3$ . Con questo il dimensionamento cinematico del primo stadio di riduzione è terminato.

Per il secondo stadio si procede in maniera del tutto analoga, ma a partire da  $i_2 = 6.6$  come avevamo deciso nella [11]; dalla [31] segue allora

$$Z''_{SA} = \frac{i_2 - 2}{2} Z''_{SO} = \frac{6.6 - 2}{2} Z''_{SO} = \frac{4.6}{2} Z''_{SO} = 2.3 \cdot Z''_{SO} = \frac{23}{10} Z''_{SO} \quad [41]$$

e dalla [32]

$$Z''_C = (i_2 - 1) \cdot Z''_{SO} = (6.6 - 1) \cdot Z''_{SO} = 5.6 \cdot Z''_{SO} = \frac{56}{10} Z''_{SO} \quad [42]$$

Anche in questo caso dobbiamo ricordare la [33], che impone  $Z''_{SO} > 17$ , mentre le [41] e [42] implicano che  $Z''_{SO}$  sia multiplo di 10 (altrimenti  $Z''_{SA}$  e  $Z''_C$  non sarebbero numeri interi). Come valore di primo tentativo scegliamo  $Z''_{SO} = 20$ ; allora dalle [41] e [42] si ha  $Z''_{SA} = 46$  e  $Z''_C = 112$ . La condizione di non interferenza secondaria [35] è già verificata ( $Z''_C - Z''_{SA} > 8$ ); resta da verificare la condizione di non interferenza di lavoro. In questo caso nella [34] bisogna sostituire il rapporto ( $-\tau''_{AC}$ ) tra satelliti e corona; dalla definizione in [26]

$$\tau''_{AC} = \frac{Z''_{SA}}{Z''_C} = \frac{46}{112} = 0.411 \quad [43]$$

da cui, sostituendo nella [34],

$$Z''_{SA} \geq \frac{-2\tau''_{AC}}{-1 + \sqrt{1 - \tau''_{AC} \cdot (2 - \tau''_{AC}) \sin^2 20^\circ}} = 21.1 \quad [44]$$

condizione che come si vede è verificata. Rimane da determinare il numero di satelliti  $N''_s$ : dalla [25]

$$k = \frac{Z''_{SO} + Z''_C}{N_s} = \frac{112 + 20}{N_s} = \frac{132}{N_s} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [45]$$

Perché  $k$  sia intero,  $N''_s$  deve essere divisore di 132. Anche qui si preferisce prendere almeno 3 satelliti: poiché 3 è un divisore di 132, fissiamo  $N''_s = 3$ , come per il primo stadio. Così il dimensionamento cinematico è completo anche per il secondo stadio di riduzione.

Infine controlliamo la velocità di sollevamento effettiva che si otterrebbe con il riduttore appena progettato: mettendo insieme quanto visto nelle equazioni [5], [6], [8], [9] e [12]

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{v_f}{2} = \frac{1}{2} \omega_2 \cdot \frac{D_t}{2} = \tau \omega_1 \frac{D_t}{4} = \tau_2 \tau_1 \omega_1 \frac{D_t}{4} = \omega_1 \frac{D_t}{4} \cdot \frac{Z'_{SO}}{Z'_{SO} + Z'_C} \cdot \frac{Z''_{SO}}{Z''_{SO} + Z''_C} \quad [46] \\ &= 153.9 \cdot \frac{240}{4} \cdot \frac{18}{18 + 108} \cdot \frac{20}{20 + 112} = 0.1999 \text{ m/s} \end{aligned}$$

che è quasi esattamente uguale alla  $v_s = 0.2 \text{ m/s} = 12 \text{ m/min}$  dai dati di progetto.

## 6. Bibliografia

**Colombo, Giuseppe. 2012.** *Manuale dell'ingegnere: nuovo Colombo.* 85. Milano : Hoepli, 2012. p. F88-F97. Vol. 2.

**Funaioli, Ettore, Maggiore, Alberto e Meneghetti, Umberto. 2005.** *Lezioni di meccanica applicata alle macchine.* I. Bologna : Pàtron, 2005. p. 190-194. Vol. I - Fondamenti di meccanica delle macchine.

**Redaelli Tecna S.p.A.** Homepage Redaelli. [Online] <http://www.redaelli.com/>.



Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o spedisce una lettera a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.