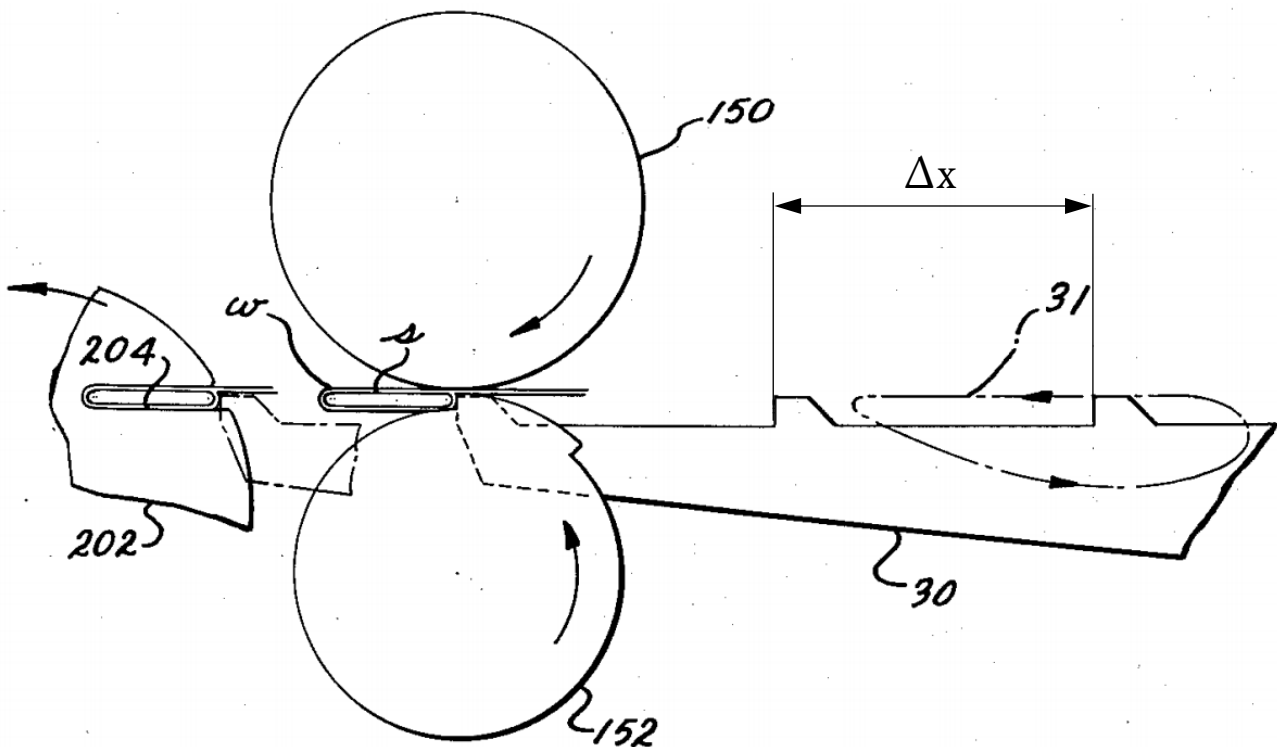


# Cinematica di un meccanismo articolato

## I. Funzionamento

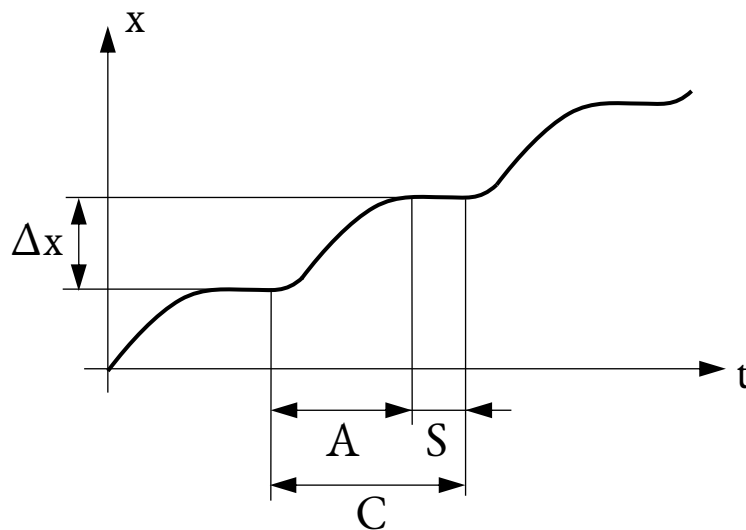
Il meccanismo che verrà analizzato è tratto dal brevetto (Mehlhorn, et al., 1961) riguardante una macchina per il confezionamento di gomme da masticare. In particolare, viene studiato il meccanismo che muove avanti e indietro le barre dentate (nei disegni sono indicate con il numero 30; vedi *Figura 1*).



*Figura 1:* vista frontale di una parte della macchina incartatrice. Le gomme *s* vengono mosse in avanti dalle due barre dentate 30; in figura viene mostrata solo una di esse, mentre l'altra si muove allo stesso modo su un piano parallelo. La barra trasla senza ruotare e ciascun punto segue una traiettoria come 31.

Era necessario far sì che le barre 30 si muovessero avanti e indietro a scatti: in avanti con un movimento rettilineo orizzontale, poi indietro e verso il basso rapidamente, lungo un arco, e infine di nuovo verso l'alto, per tornare al punto di partenza. Alzandosi e abbassandosi le barre 30 si impegnano e si disimpegnano dal contatto con le gomme *s*, che si muovono lungo una guida orizzontale con moto cosiddetto unidirezionale intermittente (vedi *Figura 2*).

Le gomme *s* sono separate tra di loro da una distanza fissa  $\Delta x$ , che è uguale alla spaziatura tra i denti delle barre 30; a ogni ciclo ciascuna gomma *s* scatta in avanti di una distanza  $\Delta x$  mentre il meccanismo si riporta alla posizione iniziale. Le due barre 30 hanno lo stesso moto, ma su due piani diversi, ai due lati delle gomme *s*; nel seguito considereremo una sola di esse e il meccanismo corrispondente.



*Figura 2:* un moto unidirezionale intermittente procede per cicli  $C$ , divisi in una fase di avanzamento  $A$  e una di sosta  $S$ . Durante l'avanzamento, la posizione  $x$  varia di una quantità  $\Delta x$ , detta corsa. L'ascissa  $t$  indica il tempo, mentre l'ordinata  $x$  indica la posizione (in questo caso, di una delle gomme  $s$ ).

Il movimento di ciascuna barra **30** viene ottenuto con un doppio quadrilatero articolato, mostrato nella successiva *Figura 3* e di seguito descritto. Le barre **30** sono fissate rigidamente alla barra verticale **64**, che a sua volta è collegata agli elementi **66** e **68**, rispettivamente superiore e inferiore, mediante le coppie **70** e **72**.

L'estremo di sinistra dell'elemento superiore **66** è collegato, con la coppia **80**, all'elemento rotante **78** che a sua volta è collegato al telaio **82** con una coppia **84**. Allo stesso modo, l'estremo di sinistra dell'elemento inferiore **68** è collegato, con la coppia **90**, all'elemento rotante **88**, collegato al telaio **82** con la coppia **89**.

Sulla destra invece, l'altro estremo dell'elemento superiore **66** è collegato, con la coppia **98**, all'elemento rotante **96**, che a sua volta è collegato al telaio **82** dalla coppia **100**. Allo stesso modo, l'estremo di destra dell'elemento inferiore **68** è collegato, con la coppia **104**, all'elemento rotante **102**, che pure è collegato al telaio **82** con la coppia **106**.

Nella successiva *Figura 3*, per aiutare la comprensione, si sono indicati gli elementi rilevanti con un rettangolo, mentre le coppie (tutte rotoidali) del meccanismo sono state cerchiare.

Lo schema semplificato corrispondente è in *Figura 4*, dove si sono indicati solo gli elementi principali.

L'aspetto da notare nella figura è che le aste **78** (superiore) e **88** (inferiore) sono uguali tra di loro; così anche le aste **96** e **102** e gli elementi **66** e **68**. Inoltre, i meccanismi inferiore e superiore sono assemblati allo stesso modo. Ne consegue che i due membri **66** e **68** si muovono allo stesso modo e che il membro **64**, che collega due punti corrispondenti su di essi (rispettivamente **70** e **72**), si muove di moto traslatorio **[1]**, dove ciascuno dei suoi punti segue la traiettoria indicata in rosso in *Figura 4*.

**[1]** Un fraintendimento comune è pensare che il moto traslatorio equivalga a un moto rettilineo, ma si tratta di due concetti diversi: qui infatti l'elemento **64** trasla, ma i suoi punti descrivono una traiettoria curva. Si dice che un corpo trasla, semplicemente, quando tutti i suoi punti hanno la stessa velocità.

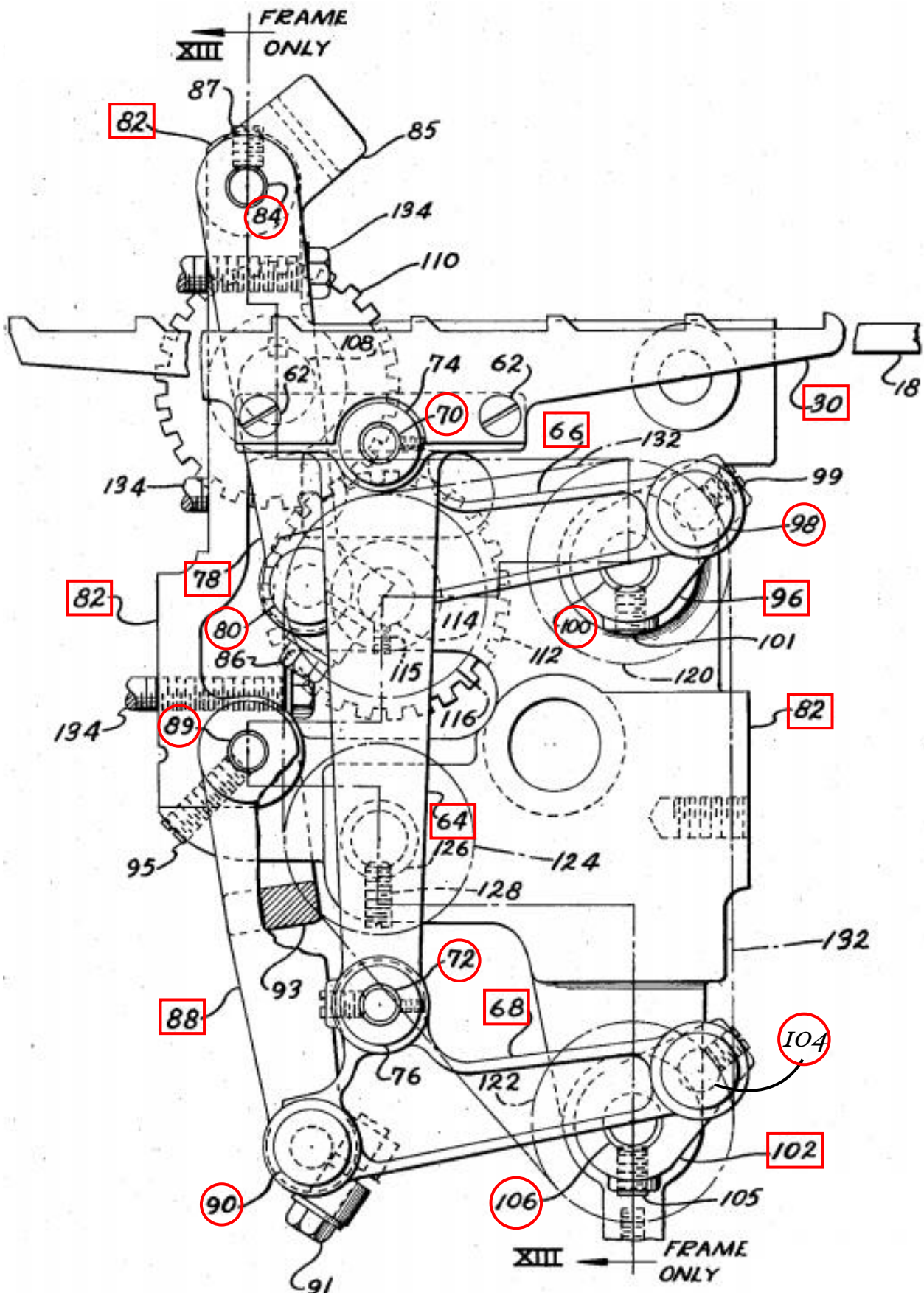
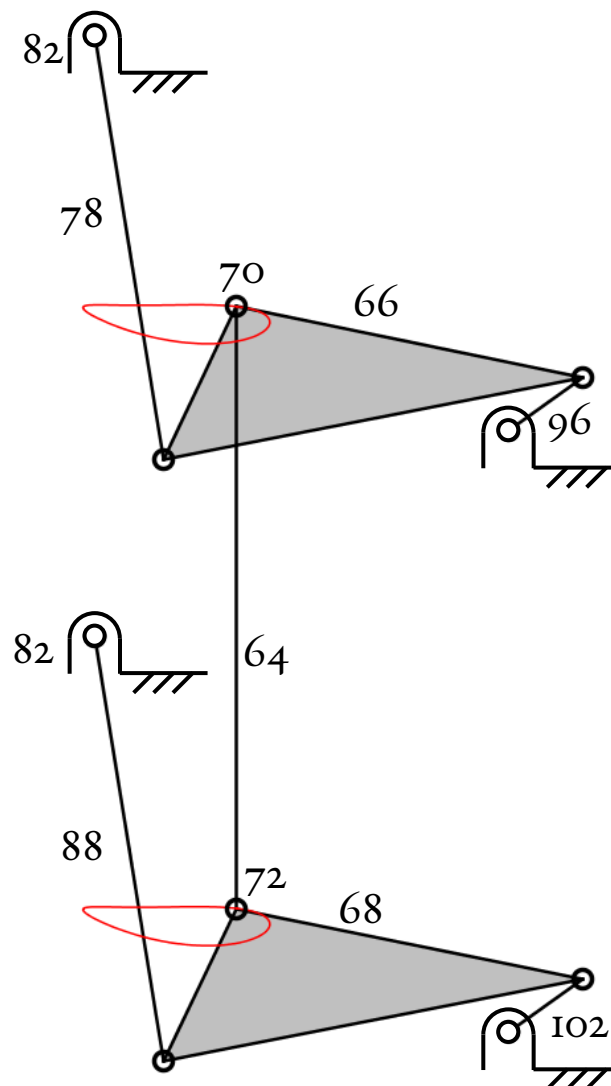


Figura 3: vista frontale del meccanismo che muove ciascuna barra 30, con i componenti principali.

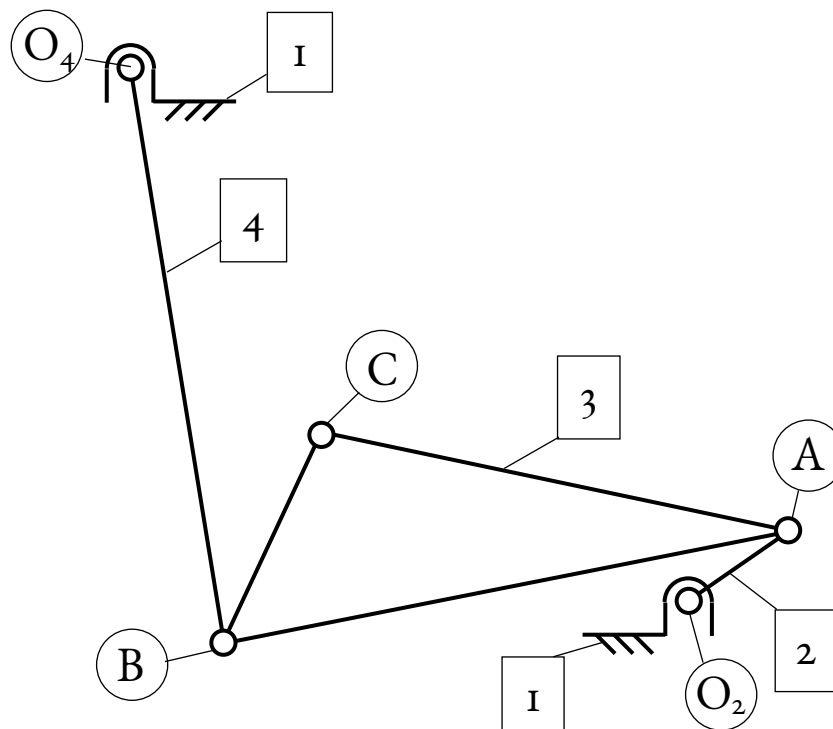


*Figura 4:* il meccanismo di *Figura 3*, indicando solo gli elementi essenziali. I membri **68** e **66** sono ternari, ossia sono collegati ad altri 3 membri (e sono mostrati come triangoli); gli altri membri sono binari e sono rappresentati come aste. I cerchi corrispondono alle coppie rotoidali.

Si può ora semplificare ulteriormente lo studio considerando uno dei due meccanismi, visto che l'altro si muove allo stesso modo. Prendiamo in esame solo il meccanismo inferiore, composto dai membri **88**, **68**, **102** e **82**, dopodiché studiamo il moto del punto **72**, che definisce la traiettoria di interesse. Questi membri costituiscono un quadrilatero articolato, la cui analisi cinematica, per via sia grafica che analitica, è già nota.

Lo schema del meccanismo che verrà analizzato è riportato in *Figura 5*. I componenti sono i seguenti:

- 1            Telaio (corrisponde all'elemento **82** delle figure *Figura 3* e *Figura 4*)
- 2            Manovella (corrisponde all'elemento **102**)
- 3            Biella (corrisponde a **68**)
- 4            Bilanciere (corrisponde a **88**)
- O<sub>2</sub>        Coppia rotoidale (corrisponde a **106**)



*Figura 5:* schema del meccanismo in esame, che è il quadrilatero articolato inferiore di *Figura 4*.

$O_4$	<u>Coppia rotoidale</u> (corrisponde a <b>89</b> )
<b>A</b>	<u>Coppia rotoidale</u> (corrisponde a <b>104</b> )
<b>B</b>	<u>Coppia rotoidale</u> (corrisponde a <b>90</b> )
<b>C</b>	<u>Coppia rotoidale</u> (corrisponde a <b>72</b> )

Il nostro obiettivo è calcolare posizione e velocità del punto **C**, la cui traiettoria è identica a quella delle barre **30**, in funzione della posizione angolare del membro movente, ossia la biella **2**.

## 2. Elenco simboli

Con riferimento a *Figura 6* e *Figura 7* nelle pagine successive, definiamo quanto di seguito riportato.

$r_2$	[mm]	Lunghezza della manovella <b>2</b>
$r_3$	[mm]	Lunghezza della biella <b>3</b>
$r_4$	[mm]	Lunghezza del bilanciere <b>4</b>
$\theta_2$	[°]	Angolo formato dalla manovella <b>2</b> con l'orizzontale
$\theta_3$	[°]	Angolo formato dalla biella <b>3</b>
$\theta_4$	[°]	Angolo del bilanciere <b>4</b>
<b>X</b>		Asse orizzontale, verso sinistra
<b>Y</b>		Asse verticale, verso il basso

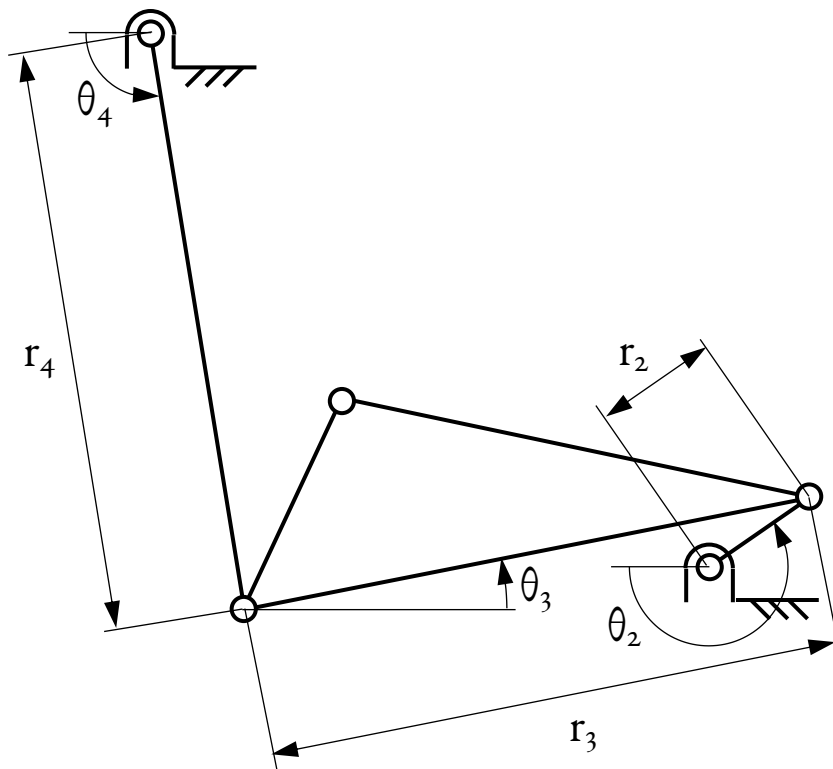


Figura 6: schema di funzionamento del quadrilatero articolato in esame, con lunghezze e angoli.

<b>O</b>		Origine del sistema di riferimento (coincide con $O_2$ di Figura 5)
<b><math>r_{ix}</math></b>	[mm]	Distanza di $O_2$ da $O_4$ , proiettata su <b>X</b>
<b><math>r_{iy}</math></b>	[mm]	Distanza di $O_2$ da $O_4$ , proiettata su <b>Y</b>
<b><math>r_6</math></b>	[mm]	Distanza di <b>C</b> da <b>A</b> , in direzione parallela al segmento <b>AB</b>
<b><math>r_7</math></b>	[mm]	Distanza di <b>C</b> da <b>A</b> , in direzione normale al segmento <b>AB</b>

Le altre quantità rilevanti, non indicate nelle figure, sono spiegate di seguito; queste sono quantità variabili durante il movimento del meccanismo, tranne  $\omega_2$ , che riterremo costante.

<b><math>\omega_2</math></b>	[rad/s]	Velocità di rotazione della manovella <b>2</b> , corrispondente a $\dot{\theta}_2 = \text{cost.}$
<b><math>\omega_3</math></b>	[rad/s]	Velocità di rotazione della biella <b>3</b> , corrispondente a $\dot{\theta}_3$
<b><math>\omega_4</math></b>	[rad/s]	Velocità di rotazione del bilanciere <b>4</b> , corrispondente a $\dot{\theta}_4$
<b><math>x_C</math></b>	[mm]	Coordinata <b>X</b> del punto <b>C</b>
<b><math>y_C</math></b>	[mm]	Coordinata <b>Y</b> del punto <b>C</b>
<b><math>v_{xC}</math></b>	[mm/s]	Velocità lungo <b>X</b> del punto <b>C</b> , corrispondente a $\dot{x}_C$
<b><math>v_{yC}</math></b>	[mm/s]	Velocità lungo <b>Y</b> del punto <b>C</b> , corrispondente a $\dot{y}_C$

Gli angoli sono misurati in senso antiorario e le velocità di rotazione sono positive se in senso antiorario.

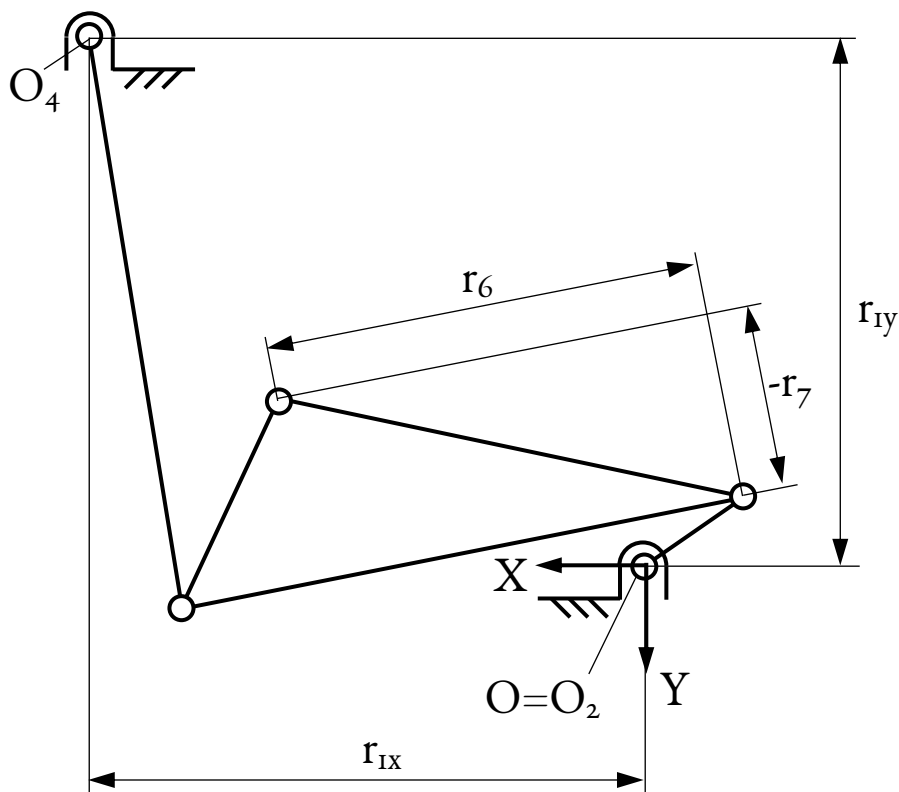


Figura 7: come Figura 6, ma evidenziando altri elementi di interesse.

### 3. Consegna

- Trovare il numero di gradi di libertà del meccanismo originale, quello schematizzato in *Figura 4*.
- Calcolare la posizione  $\theta_4$  e la velocità angolare  $\omega_4$  del membro 4, noti l'angolo  $\theta_2$  e la velocità  $\omega_2$ .
- Calcolare la posizione e la velocità del punto C, nelle loro componenti lungo gli assi  $X$  e  $Y$ .
- Ripetere l'analisi di velocità del punto C, ma per via grafica, usando il software GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). Il disegno deve essere incluso nel quaderno degli esercizi. Si può usare il metodo dei centri di istantanea rotazione oppure quello del poligono delle velocità, a scelta.

### 4. Dati

	$0 \leq S \leq 1$	$2 \leq S \leq 3$	$4 \leq S \leq 5$	$6 \leq S \leq 7$	$8 \leq S \leq 9$
$r_2$ [mm]	12	21	18	15	24
$r_3$ [mm]	60	105	90	75	120
$r_4$ [mm]	60	105	90	75	120
$\theta_2$ [°]	240	260	280	300	320
$r_{IX}$ [mm]	58	101.5	87	72.5	116
$r_{IY}$ [mm]	56	98	84	70	112
$r_6$ [mm]	46	80.5	69	57.5	92
$r_7$ [mm]	-20	-35	-30	-25	-40
$\omega_2$ [rad/s]	2.5	-0.8	1.5	-2	0.5

I dati del problema da risolvere per il quaderno degli esercizi cambiano da studente a studente, come indicato nella tabella;  $S$  = ultima cifra del numero di matricola.

## 5. Metodo analitico: equazioni

Convienne innanzitutto definire un sistema di coordinate ausiliario, avente la stessa origine in  $O_2$  ma con gli assi  $X'$  e  $Y'$  ruotati di un angolo  $\alpha$  (in senso orario) rispetto a  $X$  e  $Y$ . L'angolo  $\alpha$  è tale per cui l'asse  $X'$  passa per  $O_4$ , oltre che per  $O_2$ . Si veda *Figura 8*. Vale, come si vede dalla figura,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right) \quad [1]$$

Avendo cambiato le coordinate di riferimento, dobbiamo definire anche i nuovi angoli di rotazione  $\theta'_2$ ,  $\theta'_3$  e  $\theta'_4$  dei componenti mobili, che ora sono misurati non rispetto all'orizzontale (come era in *Figura 6*) ma rispetto al nuovo asse  $X'$ : si veda *Figura 9*. Confrontando quest'ultima con la *Figura 6*, si trova:

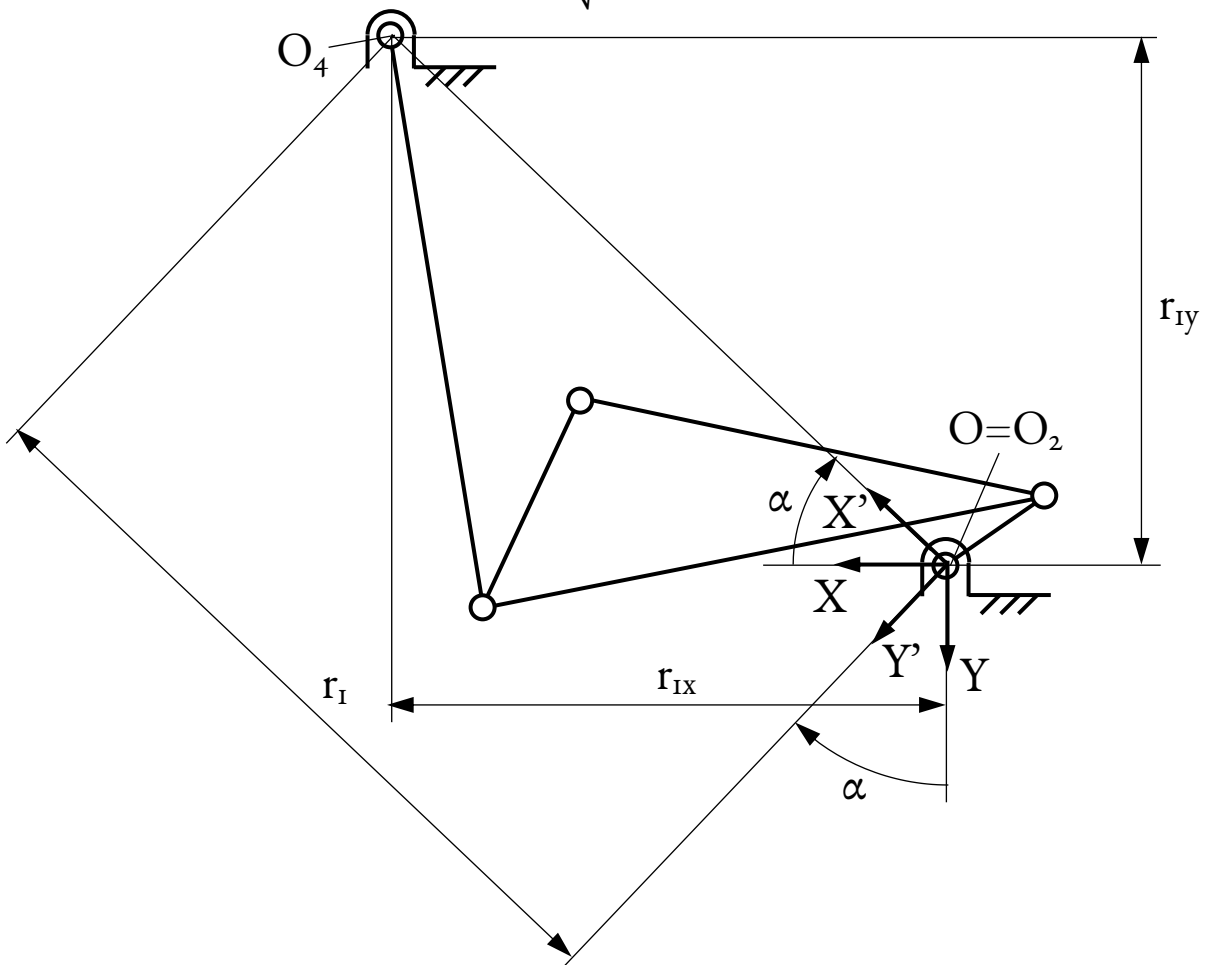
$$\theta'_2 = \theta_2 + \alpha \quad [2]$$

$$\theta'_3 = \theta_3 + \alpha \quad [3]$$

$$\theta'_4 = \theta_4 + \alpha \quad [4]$$

Definiamo anche il nuovo parametro  $r_1$  che corrisponde alla distanza tra  $O_2$  e  $O_4$ :

$$r_1 = \sqrt{r_{1x}^2 + r_{1y}^2} \quad [5]$$



*Figura 8:* trasformazione di coordinate ( $X'$ - $Y'$ ) e definizione del nuovo parametro  $r_1$ .



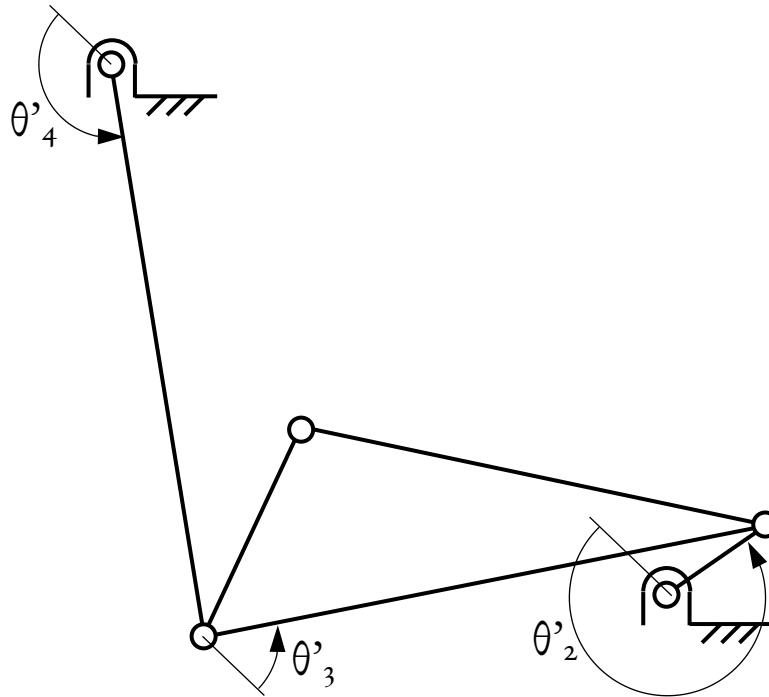


Figura 9: definizione degli angoli  $\theta'_2$ ,  $\theta'_3$  e  $\theta'_4$ .

A questo punto, con le definizioni appena viste, ci siamo ricondotti alla trattazione della cinematica del quadrilatero articolato classica, che daremo per nota.

Si trovano dunque gli angoli  $\theta'_3$  e  $\theta'_4$  come

$$\theta'_3 = \theta'_{3,a} \vee \theta'_{3,b}, \theta'_4 = \theta'_{4,a} \vee \theta'_{4,b} \quad [6]$$

Come si vede, ci sono due possibili soluzioni per ciascuno dei due angoli. Questo corrisponde al fatto che effettivamente, in generale, l'analisi di posizione di un quadrilatero articolato ha due possibili soluzioni: si ha cioè che fissata la posizione del membro di ingresso **2** ci sono due possibili posizioni dei restanti membri mobili **3** e **4**, come illustrato in *Figura 10*. Per individuare la soluzione giusta bisogna calcolare i due possibili valori di  $\theta'_3$  o di  $\theta'_4$  e poi vedere quale dei due è compatibile con la posizione effettiva del meccanismo.

Dopo l'analisi di posizione, possiamo passare all'analisi di velocità, trovando  $\omega_3$  e  $\omega_4$  in funzione di  $\omega_2$ .

Qui bisogna segnalare un aspetto: le velocità angolari dei membri sono le stesse se espresse nel sistema di riferimento originale (vedi *Figura 6*) o nel sistema di riferimento ruotato (vedi *Figura 9*). Infatti, considerando ad esempio l'equazione [2] e derivandola rispetto al tempo si ottiene

$$\omega'_2 = \frac{d}{dt}(\theta'_2) = \frac{d}{dt}(\theta_2 + \alpha) = \omega_2 \quad [7]$$

A questo punto abbiamo completato l'analisi di posizione e di velocità del membro **4**, pertanto siamo già in grado di calcolarne la posizione  $\theta_4$  e la velocità angolare  $\omega_4$ , come richiesto nella consegna.

Rimane invece da svolgere l'analisi di posizione e velocità del punto **C** sul membro **3**. Si ricordi che fin qui abbiamo usato il sistema di coordinate ausiliarie  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$  definite in *Figura 8* per ricondurci alla trattazione usuale della cinematica del quadrilatero articolato, con l'asse delle ascisse passante per  $\mathbf{O}_2$  e  $\mathbf{O}_4$ .

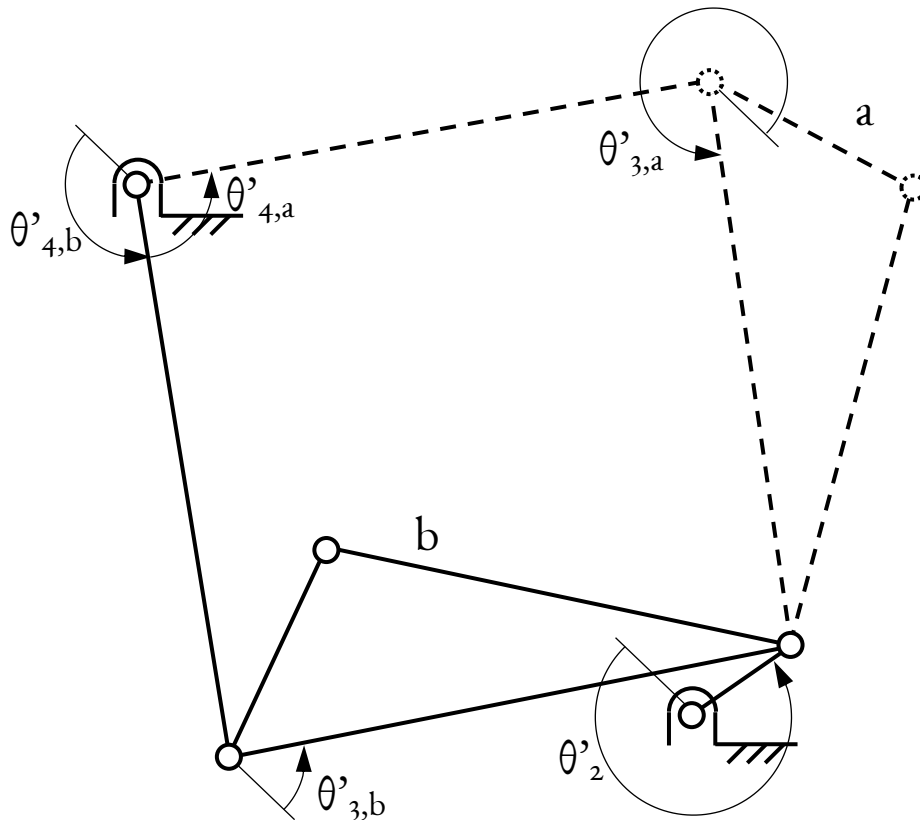


Figura 10: le due possibili configurazioni del quadrilatero, **a** e **b**, per una data posizione  $\theta'_2$  del membro di ingresso. La posizione **a** va scartata perché non corrisponde alla geometria effettiva del meccanismo.

Ora però la posizione e la velocità sono date in questo sistema ausiliario, mentre noi vorremmo ricondurci a quello di partenza, ossia  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ . Per farlo dobbiamo vedere come si passa da un sistema di coordinate a un altro; si faccia riferimento a *Figura 11*, dove uno stesso vettore  $\mathbf{v}$  è stato definito in due sistemi di coordinate.

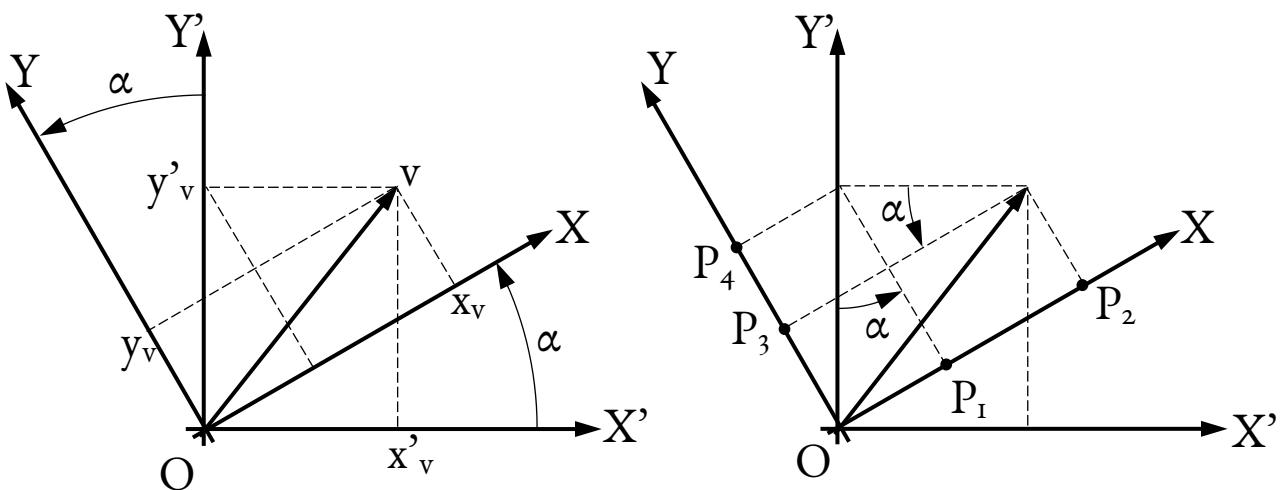


Figura 11: a sinistra, il passaggio dal sistema di coordinate  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$  al sistema  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ , ruotato di un angolo  $\alpha$ . A destra sono indicati alcuni punti ausiliari utili per capire come passare da un sistema all'altro.

Con riferimento alla figura (a sinistra), siano  $x'_v$  e  $y'_v$  le coordinate di  $\mathbf{v}$  nel sistema di partenza  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$ ; siano invece  $x_v$  e  $y_v$  le coordinate di  $\mathbf{v}$  nel nuovo sistema  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ . Conosciamo già  $x'_v$  e  $y'_v$  e dobbiamo ricavare  $x_v$  e  $y_v$ . Allora, confrontando la figura a sinistra con quella a destra, troviamo

$$x_v = \overline{OP_2} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = y'_v \sin \alpha + x'_v \cos \alpha \quad [8]$$

$$y_v = \overline{OP_3} = \overline{OP_4} - \overline{P_3P_4} = y'_v \cos \alpha - x'_v \sin \alpha \quad [9]$$

Noi abbiamo il vettore  $\mathbf{pc} = (x'_c; y'_c)$  della posizione del punto  $\mathbf{C}$ , nel sistema  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$ , e vogliamo ottenerne le coordinate, nel sistema  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ : allora adattiamo le equazioni [8] e [9] per ottenere

$$x_c = y'_c \sin \alpha + x'_c \cos \alpha \quad [10]$$

$$y_c = y'_c \cos \alpha - x'_c \sin \alpha \quad [11]$$

dove  $x'_c$  e  $y'_c$  sono già state ricavate in precedenza dalle formule note per il quadrilatero.

Allo stesso modo si calcola il vettore velocità:

$$\dot{x}_c = \dot{y}'_c \sin \alpha + \dot{x}'_c \cos \alpha \quad [12]$$

$$\dot{y}_c = \dot{y}'_c \cos \alpha - \dot{x}'_c \sin \alpha \quad [13]$$

A questo punto abbiamo completato lo studio cinematico per via analitica.

## 6. Metodo analitico: esempio di svolgimento

A titolo di esempio vediamo ora lo svolgimento del problema con questi dati di partenza:

$r_2$	[mm]	9
$r_3$	[mm]	45
$r_4$	[mm]	45
$\theta_2$	[°]	310
$r_{1x}$	[mm]	43.5
$r_{1y}$	[mm]	42
$r_6$	[mm]	34.5
$r_7$	[mm]	-15
$\omega_2$	[rad/s]	3

Troviamo  $\alpha$ ,  $\theta'_2$  e  $r_1$  con le eq. [1], [2] e [5]:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_{1y}}{r_{1x}}\right) = \arctan\left(\frac{42}{43.5}\right) = 44^\circ \quad [e1]$$

$$\theta'_2 = \theta_2 + \alpha = 310 + 44 = 354^\circ \quad [e2]$$

$$r_1 = \sqrt{r_{1x}^2 + r_{1y}^2} = \sqrt{42^2 + 43.5^2} = 60.5 \text{ mm} \quad [e3]$$

Si definiscono i seguenti parametri ausiliari  $h_i$ :

$$h_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{60.5}{9} = 6.72, \quad h_2 = \frac{r_1}{r_3} = \frac{60.5}{45} = 1.344, \quad h_3 = \frac{r_1}{r_4} = \frac{60.5}{45} = 1.344 \quad [e4]$$

$$h_4 = \frac{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_3} = \frac{-60.5^2 - 9^2 - 45^2 + 45^2}{2 \cdot 9 \cdot 45} = -4.61 \quad [e5]$$

$$h_5 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} = \frac{60.5^2 + 9^2 - 45^2 + 45^2}{2 \cdot 9 \cdot 45} = 4.61 \quad [e6]$$

Si definiscono anche le seguenti variabili ausiliarie:

$$a = -h_1 + (1 + h_2) \cos(\theta'_2) + h_4 = -6.72 + (1 + 1.344) \cos(354) - 4.61 = -9 \quad [e7]$$

$$b = -2 \sin(\theta'_2) = -2 \sin(354) = 0.209 \quad [e8]$$

$$c = h_1 - (1 - h_2) \cos(\theta'_2) + h_4 = 6.72 - (1 - 1.344) \cos(354) - 4.61 = 2.45 \quad [e9]$$

$$d = -h_1 + (1 - h_3) \cos(\theta'_2) + h_5 = -6.72 + (1 - 1.344) \cos(354) + 4.61 = -2.45 \quad [e10]$$

$$e = h_1 - (1 + h_3) \cos(\theta'_2) + h_5 = 6.72 - (1 + 1.344) \cos(354) + 4.61 = 9 \quad [e11]$$

Ora possiamo trovare i due possibili valori di  $\theta'_4$  dalla formula:

$$\theta'_4 = 2 \arctan\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4de}}{2d}\right) = 2 \arctan\left(\frac{-0.209 \pm \sqrt{0.209^2 + 4 \cdot 2.45 \cdot 9}}{-2 \cdot 2.45}\right) \quad [e12]$$

Dalla [e12] si trovano i due possibili valori  $\theta'_{4,a} = -123.9^\circ$  (se la radice ha segno +) e  $\theta'_{4,b} = 126^\circ$  (se invece ha segno -). Per capire quale dei due è corretto, troviamo i due corrispondenti valori di  $\theta_4$ : dalla [4] si ricava

$$\theta'_4 = \theta_4 + \alpha \Rightarrow \theta_4 = \theta'_4 - \alpha = \theta'_4 - 44 \quad [e13]$$

da cui si ricavano i due possibili valori  $\theta_{4,a} = -167.9^\circ$  e  $\theta_{4,b} = 82^\circ$ . La situazione è mostrata in *Figura 12*; come si vede la soluzione giusta è quella con  $\theta_{4,b} = 82^\circ$  e dunque  $\theta'_{4,b} = 126^\circ$ , cioè la soluzione che si ottiene quando nella [e12] c'è un segno - al numeratore.

In maniera simile si ricava l'angolo  $\theta'_3$ , che in questo esempio diventa

$$\theta'_3 = 2 \arctan\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 2 \arctan\left(\frac{-0.209 \pm \sqrt{0.209^2 + 4 \cdot 9 \cdot 2.45}}{-2 \cdot 9}\right) \quad [e14]$$

da cui si ottengono le due possibili soluzioni  $\theta'_{3,a} = -54^\circ$  (segno +) e  $\theta'_{3,b} = 56.1^\circ$  (segno -). Ora dalla [3]

$$\theta'_3 = \theta_3 + \alpha \Rightarrow \theta_3 = \theta'_3 - \alpha = \theta'_3 - 44 \quad [e15]$$

e di qui otteniamo i due valori  $\theta_{3,a} = -98^\circ$  e  $\theta_{3,b} = 12.13^\circ$ . Come abbiamo appena visto nel determinare  $\theta_4$ , la soluzione giusta è quella che corrisponde al segno -, ossia la **b**, come confermato sempre dalla *Figura 12*.

Ora possiamo calcolare le due velocità angolari:

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3} \omega_2 \frac{\sin(\theta'_2 - \theta'_4)}{\sin(\theta'_4 - \theta'_3)} = \frac{9}{45} \cdot 3 \cdot \frac{\sin(354 - 126)}{\sin(126 - 56.1)} = -0.475 \text{ rad/s} \quad [e16]$$

$$\omega_4 = \frac{r_2}{r_4} \omega_2 \frac{\sin(\theta'_2 - \theta'_3)}{\sin(\theta'_4 - \theta'_3)} = \frac{9}{45} \cdot 3 \cdot \frac{\sin(354 - 56.1)}{\sin(126 - 56.1)} = -0.565 \text{ rad/s} \quad [e17]$$

Le velocità angolari  $\omega_3$  e  $\omega_4$  sono negative perché gli elementi **3** e **4** ruotano in senso orario, mentre  $\omega_2$  è positiva, con la notazione che abbiamo scelto, perché **2** ruota in senso antiorario.

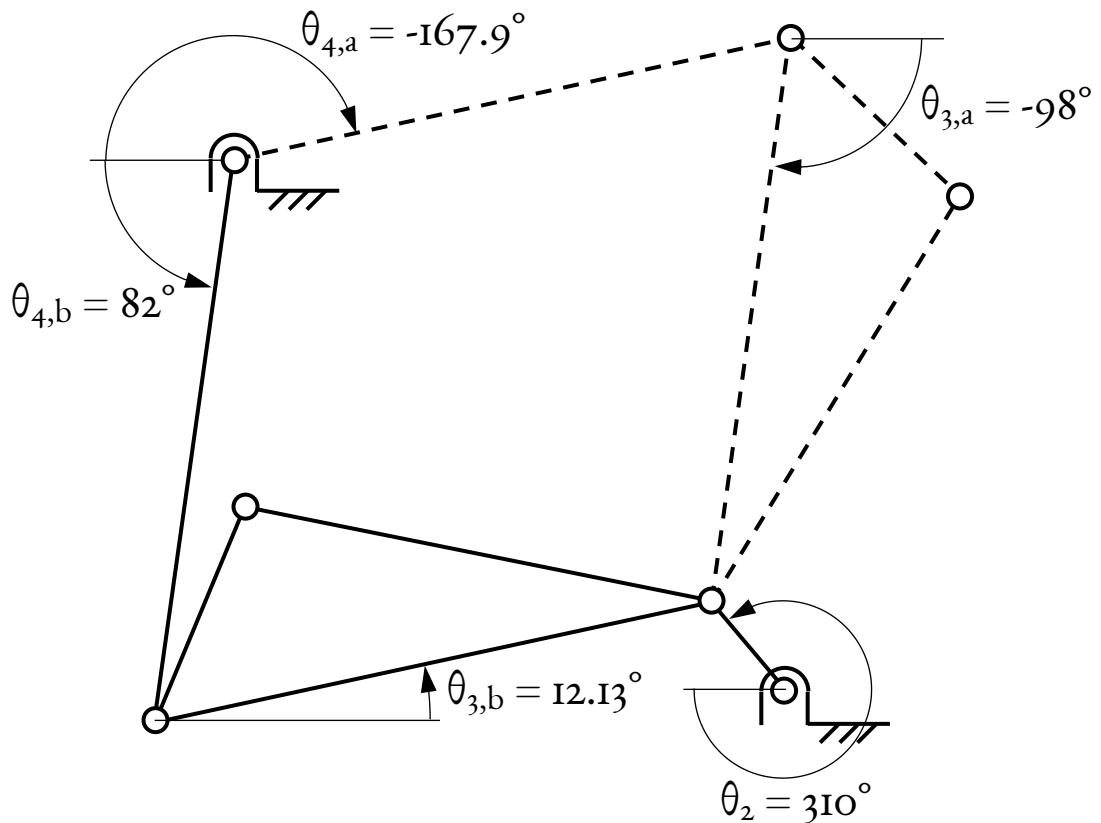


Figura 12: le due possibili posizioni del quadrilatero, **a** e **b**, per i dati indicati nell'esempio. Si vede che la soluzione **b** è quella compatibile con il movimento del meccanismo come descritto nel paragrafo 1.

Passiamo ora a trovare la posizione del punto **C** nel sistema di riferimento  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$  [2]:

$$x'_c = r_2 \cos(\theta'_2) + r_6 \cos(\theta'_3) - r_7 \sin(\theta'_3) \quad [e18]$$

$$= 9 \cos(354) + 34.5 \cos(56.1) + 15 \sin(56.1) = 40.6 \text{ mm}$$

$$y'_c = r_2 \sin(\theta'_2) + r_6 \sin(\theta'_3) + r_7 \cos(\theta'_3) \quad [e19]$$

$$= 9 \sin(354) + 34.5 \sin(56.1) - 15 \cos(56.1) = 19.34 \text{ mm}$$

Poi troviamo la velocità, sempre nel sistema di riferimento  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$ :

$$\dot{x}'_c = -r_2 \omega_2 \sin(\theta'_2) - \omega_3 [r_6 \sin(\theta'_3) + r_7 \cos(\theta'_3)] \quad [e20]$$

$$= -9 \cdot 3 \sin(354) + 0.475 [34.5 \sin(56.1) - 15 \cos(56.1)]$$

$$= 12.46 \text{ mm/s}$$

$$\dot{y}'_c = r_2 \omega_2 \cos(\theta'_2) + \omega_3 [r_6 \cos(\theta'_3) - r_7 \sin(\theta'_3)] \quad [e21]$$

$$= 9 \cdot 3 \cos(354) - 0.475 [34.5 \cos(56.1) + 15 \sin(56.1)] = 11.8 \text{ mm/s}$$

Usiamo le equazioni [10] e [11] per esprimere il vettore posizione nel sistema di riferimento  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ :

$$x_c = y'_c \sin \alpha + x'_c \cos \alpha = 19.34 \sin(44) + 40.6 \cos(44) = 42.6 \text{ mm} \quad [e22]$$

$$y_c = y'_c \cos \alpha - x'_c \sin \alpha = 19.34 \cos(44) - 40.6 \sin(44) = -14.31 \text{ mm} \quad [e23]$$

[2] Si noti che nei dati del problema  $r_7$  ha segno negativo: questo deriva dall'aver mantenuto la notazione del Cleghorn. Qui e nell'esercizio per casa,  $r_7$  ha segno negativo perché è rivolto verso l'alto.

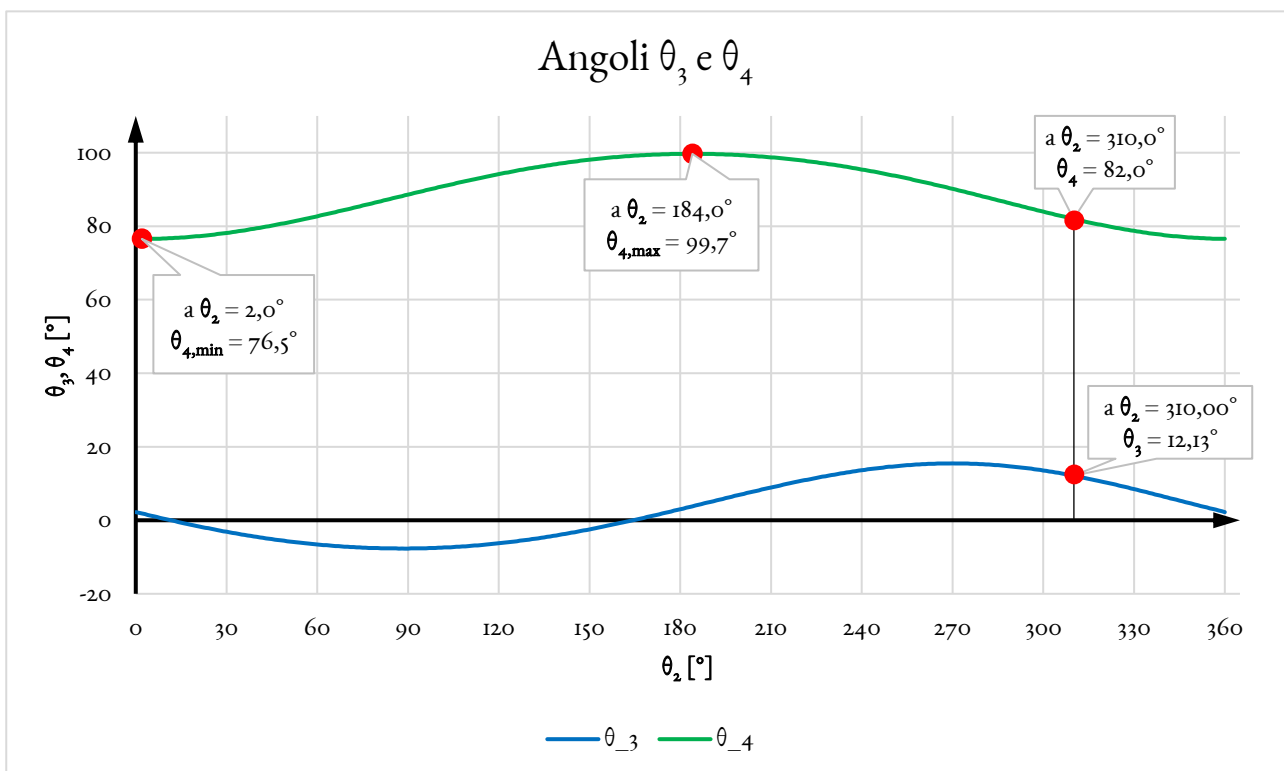
Qui  $y_C$  ha segno negativo perché l'asse  $Y$  è rivolto verso il basso. Infine, per la velocità, dalle eq. [12] e [13]

$$\dot{x}_C = \dot{y}'_C \sin \alpha + \dot{x}'_C \cos \alpha = 11.8 \sin(44) + 12.46 \cos(44) = 17.16 \text{ mm/s} \quad [e24]$$

$$\dot{y}_C = \dot{y}'_C \cos \alpha - \dot{x}'_C \sin \alpha = 11.8 \cos(44) - 12.46 \sin(44) = -0.1672 \text{ mm/s} \quad [e25]$$

Qui possiamo notare come la velocità lungo  $X$  sia molto maggiore di quella lungo  $Y$ . Infatti, come spiegato nel paragrafo 1, il quadrilatero è progettato in modo tale che, per un certo tratto di funzionamento, il punto  $C$  si muove in orizzontale, quindi la sua velocità in direzione verticale è quasi nulla. Questo corrisponde al tratto in cui le barre dentate **30** di *Figura 3* spingono in avanti le gomme **s**.

Gli andamenti delle quantità appena calcolate sono riportati nei grafici successivi. Il grafico in *Figura 13* indica i valori di  $\theta_3$  e  $\theta_4$  nella posizione indicata ( $\theta_4 = 310^\circ$ ); sono indicati anche i valori massimo ( $\theta_{4,\max} = 99,7^\circ$ ) e minimo ( $\theta_{4,\min} = 76,5^\circ$ ) dell'angolo  $\theta_4$ . Si vede dunque come, mentre il membro **2** fa un giro completo, il membro **4** oscilla tra due posizioni estreme, con un arco di  $\theta_{4,\max} - \theta_{4,\min} = 23,2^\circ$ . Si dice allora che il membro **2** è una manovella, mentre il membro **4** è un bilanciere.



*Figura 13:* andamenti degli angoli di rotazione dei membri **3** (in blu) e **4** (in verde), in funzione dell'angolo del membro **2**. Di  $\theta_4$  sono indicati anche i valori minimo ( $76,5^\circ$ , a  $\theta_2 = 2^\circ$ ) e massimo ( $99,7^\circ$ , a  $\theta_2 = 184^\circ$ ).

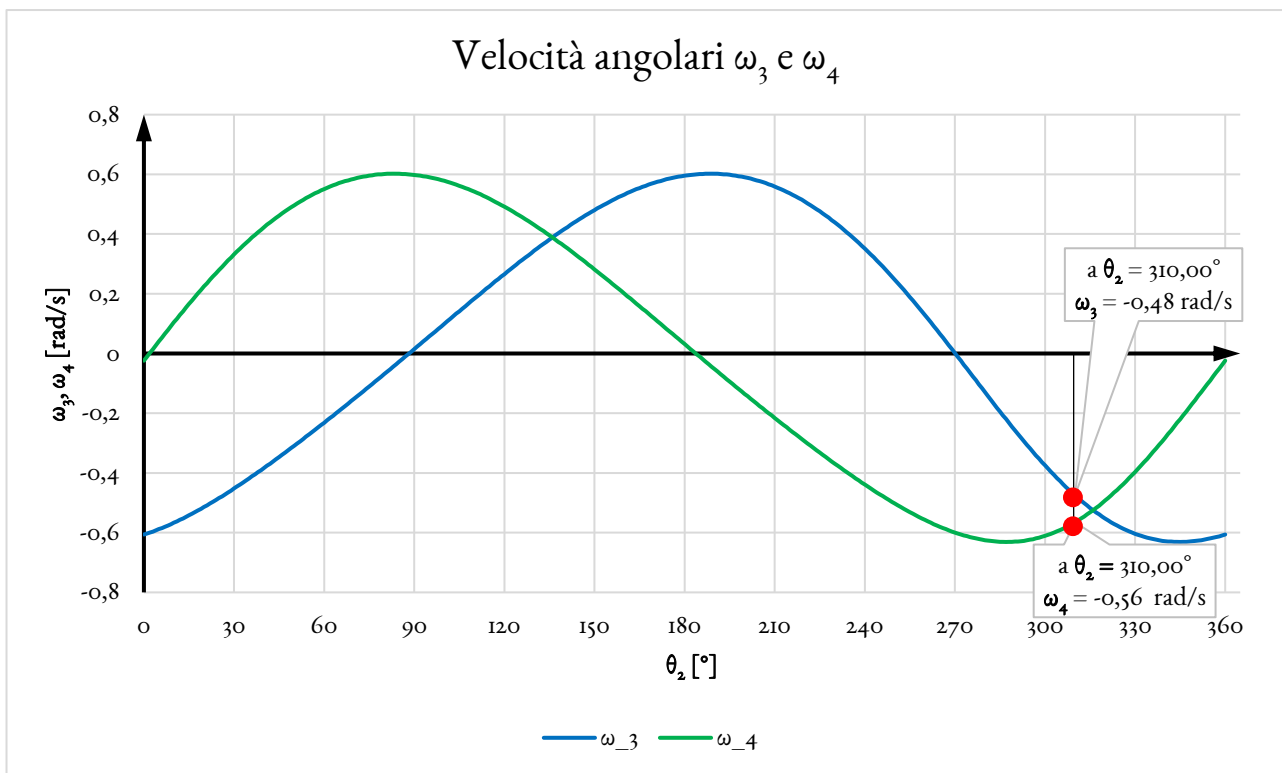


Figura 14: andamenti delle velocità di rotazione dei membri 3 (in blu) e 4 (in verde), in funzione dell'angolo del membro 2.

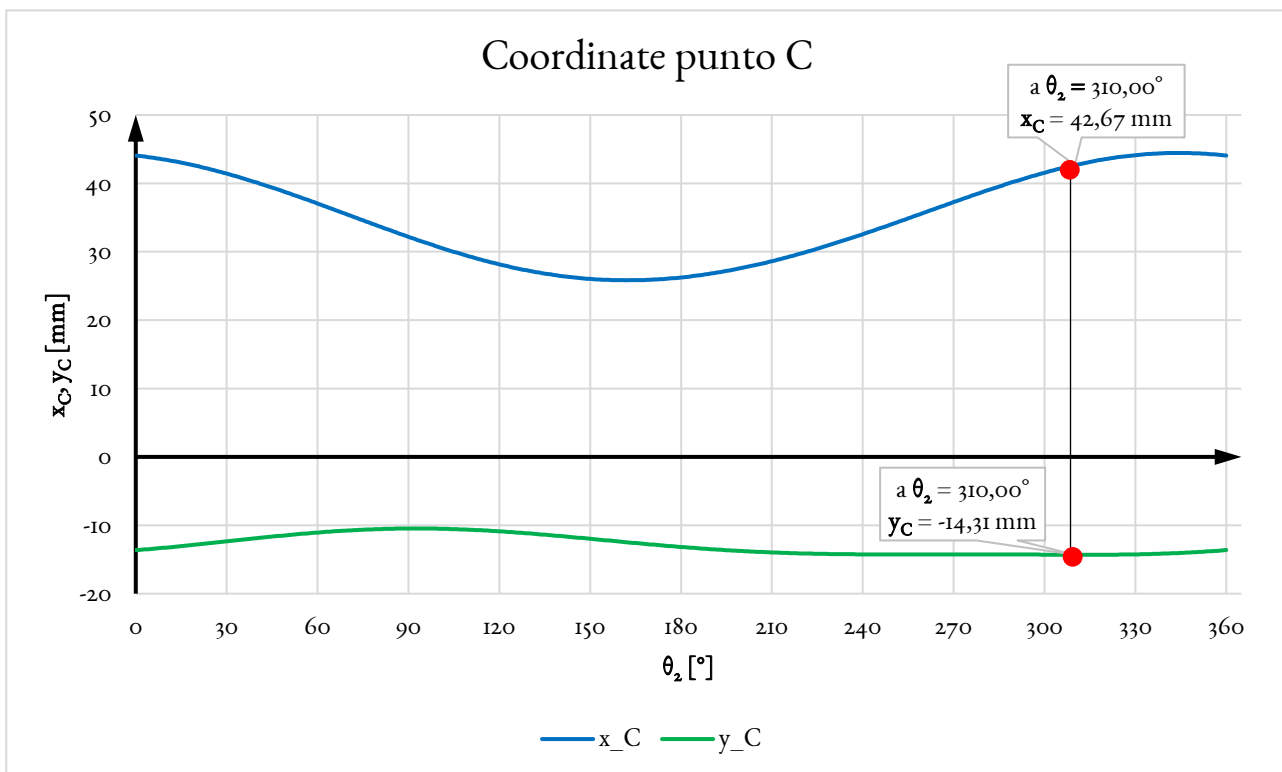


Figura 15: andamenti delle coordinate  $x$  (blu) e  $y$  (in verde) del punto C, in funzione dell'angolo  $\theta_2$ . Si noti il tratto da  $\theta_2 \approx 240^\circ$  a  $\theta_2 \approx 320^\circ$  nel quale la coordinata  $y$  è circa costante.

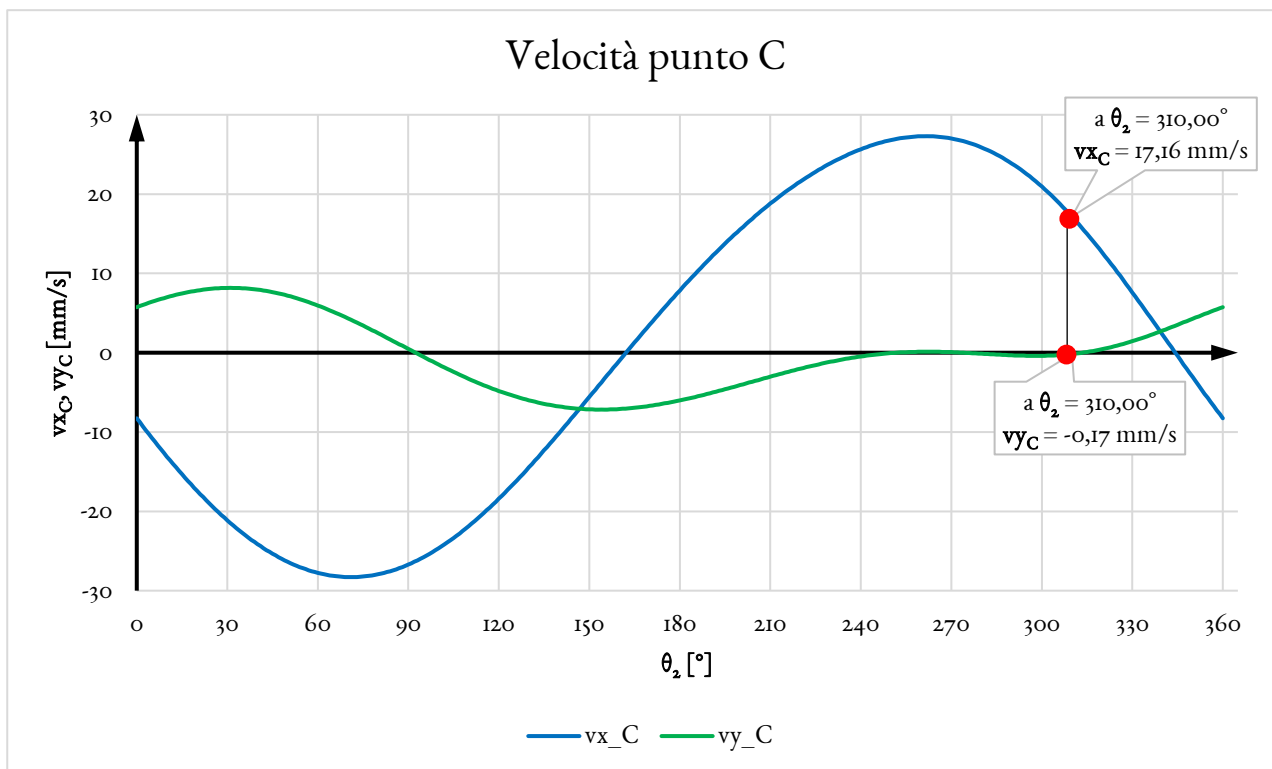


Figura 16: andamenti della velocità del punto C, lungo x (blu) e lungo y (verde), in funzione dell'angolo  $\theta_2$ . Si noti il tratto da  $\theta_2 \approx 240^\circ$  a  $\theta_2 \approx 320^\circ$  nel quale la velocità lungo y è circa nulla.

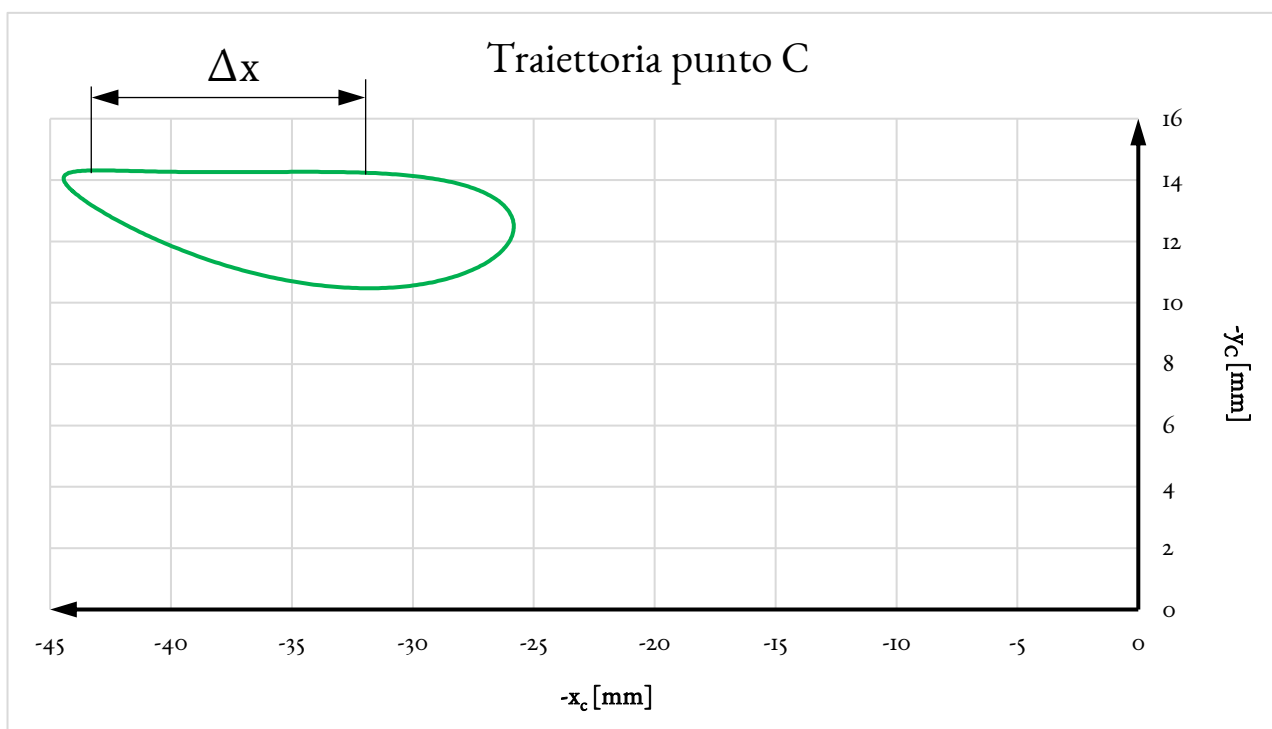


Figura 17: traiettoria del punto C, nel sistema di coordinate  $X - Y$ . Si è invertito il segno delle coordinate per mostrare la traiettoria come nella Figura 4.



## 7. Metodo grafico

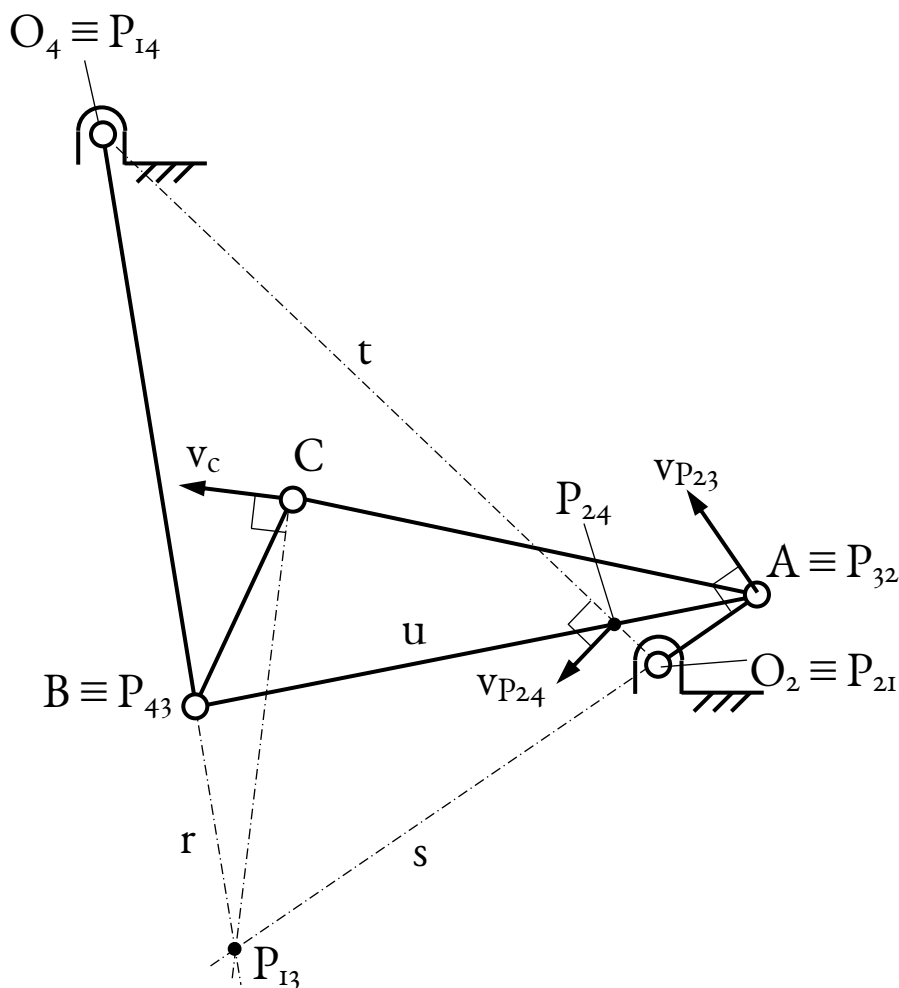
L'analisi di velocità per via grafica si può ottenere con due metodi: quello dei centri di istantanea rotazione o quello del poligono delle velocità. Nel seguito li descriveremo entrambi.

### 7.1. Metodo grafico: centri di istantanea rotazione

Cominciamo a indicare quei centri di istantanea rotazione (d'ora in avanti CIR) la cui posizione si ricava direttamente dalla struttura del meccanismo. Per esempio, sappiamo che la manovella **2** è collegata con una coppia rotoidale  $O_2$  al telaio **1**; allora il CIR di **2** rispetto a **1** coincide con  $O_2$  e lo chiameremo  $P_{21}$ . Similmente, si possono trovare in maniera immediata i seguenti CIR (vedi *Figura 18*):

- il CIR  $P_{32}$  di **3** rispetto a **2** coincide con la coppia rotoidale in **A**;
- il CIR  $P_{43}$  di **4** rispetto a **3** coincide con la coppia rotoidale in **B**;
- il CIR  $P_{14}$  di **1** rispetto a **4** coincide con la coppia rotoidale in  $O_4$ .

Si ricordi che, dati due membri **i** e **j** di un meccanismo piano, il CIR di questa coppia di membri è  $P_{ij} = P_{ji}$ . Ad esempio, il CIR di **1** rispetto a **2** è sempre  $P_{12} = P_{21} = O_2$ .



*Figura 18:* schema dei CIR in una posizione generica. I vettori velocità non sono in scala.

Gli altri CIR si trovano applicando il Teorema di Kennedy, di seguito enunciato:

**Teorema.** Siano dati tre elementi  $i, j, k$  di un qualsiasi meccanismo piano, che si muovano l'uno rispetto all'altro. I tre CIR associati, ossia  $P_{ij}, P_{jk}$  e  $P_{ki}$ , giacciono sulla stessa linea.

Segue ad esempio che il CIR  $P_{13}$  di  $1$  rispetto a  $3$  deve giacere sulla retta  $r$  passante per  $P_{14}$  e  $P_{43}$ . Allo stesso tempo deve anche giacere sulla retta  $s$  passante per  $P_{32}$  e  $P_{21}$ . In definitiva  $P_{13}$  si trova all'intersezione tra  $r$  e  $s$  (vedi *Figura 18*). Per trovare il CIR  $P_{24}$  di  $2$  rispetto a  $4$  applichiamo di nuovo il teorema di Kennedy:  $P_{24}$  deve giacere sulla retta  $t$  passante per  $P_{21}$  e  $P_{14}$  e allo stesso tempo sulla retta  $u$  passante per  $P_{43}$  e  $P_{32}$ , quindi troviamo  $P_{24}$  all'intersezione tra  $t$  e  $u$ .

Ora che abbiamo trovato tutti i CIR del meccanismo possiamo passare all'analisi di velocità. Per farlo dobbiamo ricordare la proprietà dei CIR: se  $a$  e  $b$  sono due elementi di un meccanismo piano, che si muovono l'uno rispetto all'altro, il loro CIR  $P_{ab}$  ha la stessa velocità  $v_{P_{ab}}$  sia se considerato solidale al membro  $a$ , sia se considerato solidale al membro  $b$ . In formule (essendo  $i$  il membro fisso)

$$|v_{P_{ab}}| = \overline{P_{1a}P_{ab}} \cdot |\omega_a| = \overline{P_{1b}P_{ab}} \cdot |\omega_b| \quad [g1]$$

dove  $\overline{P_{1a}P_{ab}}$  è la distanza tra  $P_{1a}$  e  $P_{ab}$ ,  $\overline{P_{1b}P_{ab}}$  è la distanza tra  $P_{1b}$  e  $P_{ab}$  e  $\omega_a, \omega_b$  sono le velocità di rotazione. Applicando l'eq. [g1] al quadrilatero in esame, dove il membro  $a$  corrisponde a  $2$  e il membro  $b$  a  $4$ , si trova

$$|v_{P_{24}}| = \overline{P_{12}P_{24}} \cdot |\omega_2| = \overline{P_{14}P_{24}} \cdot |\omega_4| \quad [g2]$$

da cui si ricava, per la posizione di interesse ( $\theta_2 = 310^\circ$ ),

$$|\omega_4| = (\overline{P_{12}P_{24}} / \overline{P_{14}P_{24}}) \cdot |\omega_2| = \left(\frac{9.58}{50.9}\right) \cdot 3 = 0.565 \text{ rad/s} \quad [g3]$$

dove le lunghezze  $\overline{P_{12}P_{24}} = 9.58 \text{ mm}$  e  $\overline{P_{14}P_{24}} = 50.9 \text{ mm}$  si trovano direttamente dal disegno in scala. La velocità angolare del membro  $4$  così calcolata coincide, in valore assoluto, con i risultati dei calcoli analitici (vedi [e17]). Per quanto riguarda il segno, si intuisce guardando la figura che il membro  $4$  si muove in senso orario, quindi la velocità angolare, per le convenzioni prese, è negativa [3], come visto nei calcoli analitici.

Analogamente, per il membro  $3$ , applichiamo l'eq. [g1] e troviamo

$$|v_{P_{23}}| = \overline{P_{12}P_{23}} \cdot |\omega_2| = \overline{P_{13}P_{23}} \cdot |\omega_3| \quad [g4]$$

e da qui troviamo

$$|\omega_3| = (\overline{P_{12}P_{23}} / \overline{P_{13}P_{23}}) \cdot |\omega_2| = (r_2 / \overline{P_{13}P_{23}}) \cdot |\omega_2| = \left(\frac{9}{56.8}\right) \cdot 3 = 0.475 \text{ rad/s} \quad [g5]$$

Anche in questo caso la velocità angolare trovata è corretta a meno del segno.

Il punto  $C$  è solidale al membro  $3$ . Vogliamo trovare la velocità di  $C$  rispetto al sistema di riferimento fisso, che è solidale al telaio  $1$ ; quindi dovremo considerare il punto  $P_{13}$ , intorno al quale ruota il membro  $3$ . Si ha

$$|v_C| = \overline{P_{13}C} \cdot |\omega_3| = 36.1 \cdot 0.475 = 17.15 \text{ mm/s} \quad [g6]$$

---

[3] Più in generale, si consideri un quadrilatero articolato dove i membri  $2$  e  $4$  sono quelli collegati al telaio  $1$ , rispettivamente nelle coppie rotoidali  $O_2$  e  $O_4$ . Se il CIR  $P_{24}$  è (come in questo caso) interno al segmento  $O_2O_4$  allora  $2$  e  $4$  ruotano in verso opposto, se invece  $P_{24}$  è esterno a tale segmento ruotano nello stesso verso.

Con i calcoli analitici avevamo trovato le componenti della velocità  $\mathbf{v}_C$  nel sistema di riferimento di partenza  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$  e nel sistema di riferimento ruotato  $\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'$ ; si trova allora che il modulo di  $\mathbf{v}_C$  è

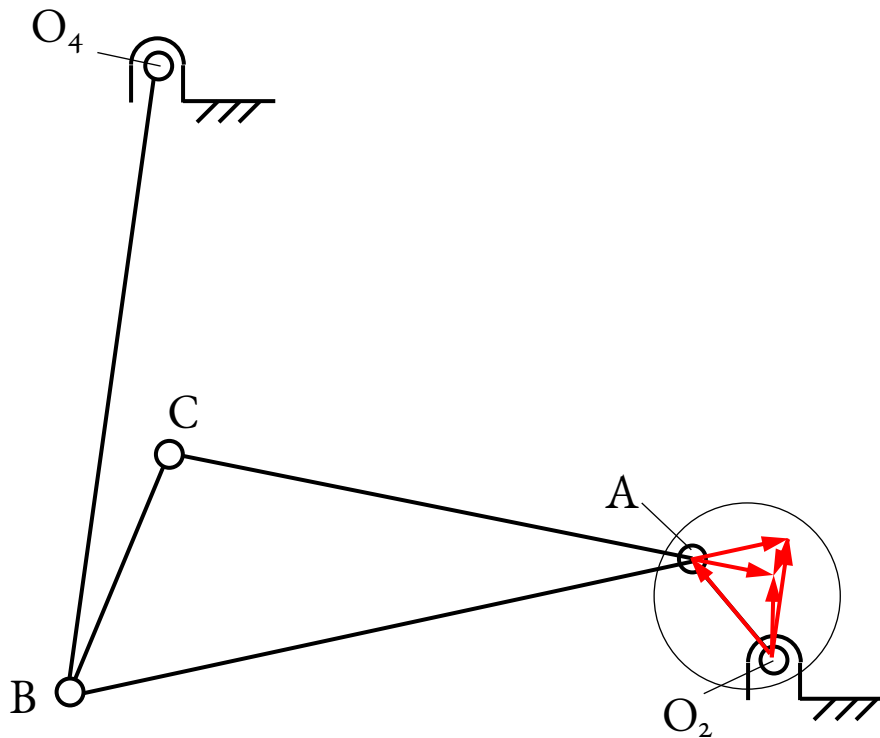
$$|\mathbf{v}_C| = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \sqrt{17.16^2 + 0.1672^2} = \sqrt{\dot{x}'_C^2 + \dot{y}'_C^2} = \sqrt{12.46^2 + 11.8^2} \quad [g7]$$

$$= 17.161 \text{ mm/s}$$

I risultati del metodo analitico e grafico sono dunque in accordo. La direzione di  $\mathbf{v}_C$  si trova dal disegno.

## 7. 2. Metodo grafico: poligono delle velocità

In questo metodo si usa un poligono costituito di diversi vettori. Questi sono una rappresentazione grafica in scala delle velocità, relative e assolute, dei punti di interesse del meccanismo. Si comincia fissando arbitrariamente un polo delle velocità  $\mathbf{O}_v$  che corrisponde a tutti i punti aventi velocità nulla; a partire da questo si aggiungono i vettori che si possono trovare direttamente. Infine si ricavano le velocità rimanenti a partire da considerazioni cinematiche: per esempio di alcuni vettori velocità si sa la direzione a partire dalla geometria del meccanismo, ma non il modulo. L'immagine con lo schema del procedimento è in *Figura 19*.



*Figura 19:* il meccanismo nella posizione d'interesse e il corrispondente poligono delle velocità (in rosso). I vettori velocità sono in scala, ruotati di  $90^\circ$  (in senso orario) rispetto alla direzione effettiva.

Partiamo indicando il polo  $\mathbf{O}_v$ , fissato nel punto  $\mathbf{O}_2$ , e il vettore  $\mathbf{v}^*_A$ , in una scala tale per cui la lunghezza di  $\mathbf{v}^*_A$  è uguale a  $r_2$ ; il vettore velocità è indicato con un asterisco per ricordarci che è ruotato di  $90^\circ$  (in senso orario) rispetto alla direzione effettiva. Con questa scelta di  $\mathbf{O}_v$ , della scala di rappresentazione e della rotazione del vettore,  $\mathbf{v}^*_A$  coincide con il segmento  $\mathbf{O}_2\mathbf{A}$ , cosicché possiamo semplificare il disegno.

A partire da  $\mathbf{v}^*_A$  possiamo ricavare gli altri vettori di velocità, rappresentati in rosso in *Figura 19*; si riporta la zona cerchiata in questa figura nella successiva *Figura 20*, ingrandita per maggiore chiarezza.

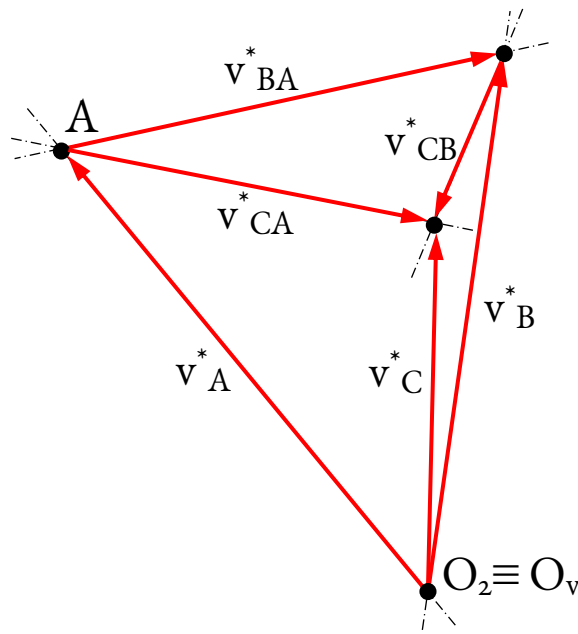


Figura 20: il poligono di velocità del quadrilatero, ingrandito in scala.

**B** è solidale al membro **4**, che ruota intorno a  $O_4$ , quindi la velocità  $v_B$  deve essere perpendicolare al segmento  $O_4B$ ; noi però rappresentiamo tutti i vettori ruotati di  $90^\circ$  e quindi nel disegno  $v_B^*$  sarà parallela a  $O_4B$ .

Analogamente, siccome **A** e **B** sono solidali a **3**, la velocità relativa  $v_{BA}$  (di **B** rispetto ad **A**) deve essere perpendicolare ad **AB**, ma la rappresenteremo nel disegno con un vettore  $v_{BA}^*$  parallelo al segmento **AB**.

Per definire completamente i vettori  $v_B^*$  e  $v_{BA}^*$  rimane da considerare l'equazione di chiusura

$$v_B = v_A + v_{BA} \Rightarrow v_B^* = v_A^* + v_{BA}^* \quad [g8]$$

da cui possiamo disegnare il triangolo delle velocità: bisogna tirare una retta per  $O_2$  parallela a  $O_4B$  e una retta per **A** passante per **B**. L'intersezione di queste due rette ci permette di trovare i due vettori  $v_B^*$  e  $v_{BA}^*$ , da cui possiamo trovare le velocità angolari  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . Infatti valgono le seguenti:

$$|v_A| = |\omega_2| \cdot \overline{O_2A} \quad [g9]$$

$$|v_B| = |\omega_4| \cdot \overline{O_4B} \quad [g10]$$

Poi, siccome nel disegno le velocità sono in scala,

$$\frac{|v_B|}{|v_A|} = \frac{|v_B^*|}{|v_A^*|} \Rightarrow |v_B| = \frac{|v_B^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| \quad [g11]$$

dove i moduli di  $v_B^*$  e  $v_A^*$  si ricavano direttamente dal disegno. Si trova quindi, combinando le precedenti,

$$\begin{aligned} |\omega_4| &= |v_B| / \overline{O_4B} = \left( \frac{|v_B^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| \right) / \overline{O_4B} = \left( \frac{|v_B^*|}{|v_A^*|} \cdot |\omega_2| \cdot \overline{O_2A} \right) / \overline{O_4B} = \left( \frac{8.47}{9} \cdot 3 \cdot 9 \right) / 45 \quad [g12] \\ &= 0.565 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

a conferma dei risultati già visti in precedenza. Per trovare  $\omega_3$  scriviamo le equazioni

$$|v_{AB}| = |\omega_3| \cdot \overline{AB} \quad [g13]$$

e

$$\frac{|v_{AB}|}{|v_A|} = \frac{|v_{AB}^*|}{|v_A^*|} \Rightarrow |v_{AB}| = \frac{|v_{AB}^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| \quad [g14]$$

analoga alla [g11]. Da queste equazioni e dalla [g9] si ricava

$$|\omega_3| = |v_{AB}|/\overline{AB} = \left( \frac{|v_{AB}^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| \right) / \overline{AB} = \left( \frac{|v_{AB}^*|}{|v_A^*|} \cdot |\omega_2| \cdot \overline{O_2A} \right) / \overline{AB} = \left( \frac{7.13}{9} \cdot 3 \cdot 9 \right) / 45 \quad [g15]$$

$$= 0.475 \text{ rad/s}$$

Resta da trovare la velocità del punto **C**. Sappiamo che **C** è solidale al membro **3**, insieme ad **A** e a **B**. Allora  $v_{CA}$  sarà perpendicolare al segmento **CA** e  $v_{CB}$  a **CB**; i corrispondenti vettori (ruotati di 90°) nel poligono delle velocità, cioè  $v^*_{CA}$  e  $v^*_{CB}$ , saranno allora paralleli rispettivamente a **CA** e a **CB**. Infine scriviamo

$$v_C = v_A + v_{CA} = v_B + v_{CB} \Rightarrow v_C^* = v_A^* + v_{CA}^* = v_B^* + v_{CB}^* \quad [g16]$$

Allora per trovare  $v^*_C$  dobbiamo tirare una retta parallela a **CB** e passante per l'estremo del vettore  $v^*_B$  e poi un'altra retta passante per **A** e per **C**. L'intersezione di queste rette fornisce i vettori  $v^*_{CA}$  e  $v^*_{CB}$  dai quali infine ricaviamo  $v^*_C$ . Si trova (vedi *Figura 20*) che il vettore  $v^*_C$  è quasi esattamente verticale: questo deriva dal fatto che  $v_C$  deve essere quasi esattamente orizzontale, come già visto in precedenza.

Si noti che i vettori  $v^*_C$ ,  $v^*_{CA}$  e  $v^*_{CB}$  formano tra di loro un triangolo, che è in rapporto di similitudine con il triangolo formato dai punti **A**, **B** e **C**. Questo deriva dalla costruzione geometrica dei vari punti: si dice che il triangolo formato dai vettori velocità è l'immagine del membro **3**.

Per calcolare il modulo della velocità  $v_C$  scriviamo, analogamente alle [g11] e [g14]

$$\frac{|v_C|}{|v_A|} = \frac{|v_C^*|}{|v_A^*|} \Rightarrow |v_C| = \frac{|v_C^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| \quad [g17]$$

sempre perché i vettori nel disegno sono riportati in scala. Poi combiniamo questa con l'eq. [g9] per trovare

$$|v_C| = \frac{|v_C^*|}{|v_A^*|} \cdot |v_A| = \frac{|v_C^*|}{|v_A^*|} \cdot |\omega_2| \cdot \overline{O_2A} = \frac{5.72}{9} \cdot 3 \cdot 9 = 17.16 \quad [g18]$$

dove la lunghezza  $|v^*_C|$  è misurata direttamente dal disegno. Il valore trovato, anche in questo caso, è compatibile con i risultati ottenuti per via analitica. Avendo così calcolato il modulo di  $v_C$ , la direzione è data dal disegno di *Figura 20*, ruotando  $v^*_C$  di 90° in senso antiorario.

## Bibliografia

**Mehlhorn, Carl E. e Roberts, Franklin B. 1961.** *Gum wrapping machine. 2968139 USA*, 17 Gennaio 1961. Meccanismi per macchine automatiche.



Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o spedisci una lettera a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.