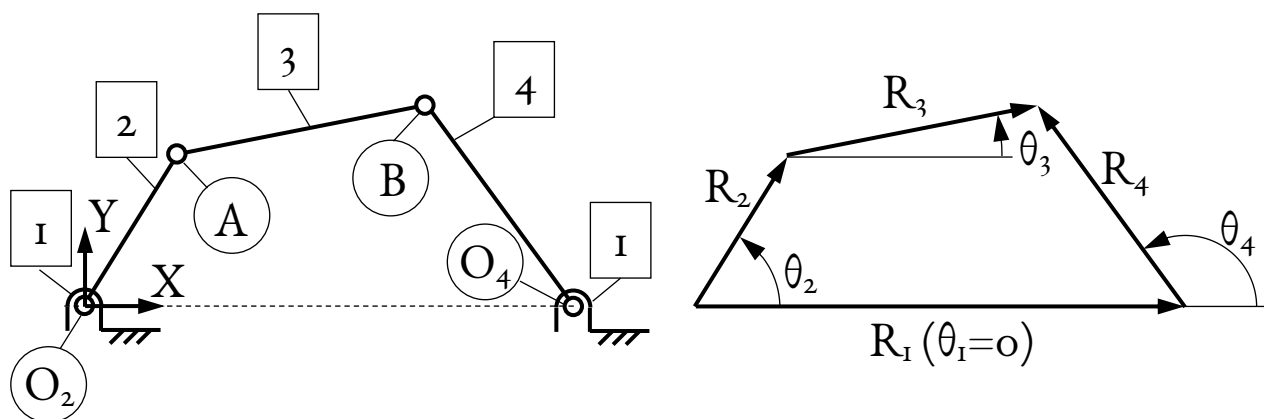


# Cinematica di un quadrilatero articolato

Lo studio della cinematica di un quadrilatero articolato per via analitica si può trovare in numerosi testi: si vedano ad esempio (Cleghorn, et al., 2015) e (Funaioli, et al., 2005). Qui in particolare seguiremo la trattazione del libro di Cleghorn, che introduce alcuni parametri ausiliari.

Si cominci considerando un quadrilatero articolato in un piano cartesiano di riferimento, dove (senza perdita di generalità) si è presa l'origine  $O$  degli assi nella coppia rotoidale  $O_2$  che collega il movente  $2$  al telaio  $1$ ; l'asse  $X$  è rivolto verso l'altra coppia rotoidale  $O_4$ , che collega il cedente  $2$  al telaio  $1$ . Gli angoli di rotazione  $\theta_i$  dei membri sono misurati rispetto all'asse  $X$ . Si veda *Figura 1* (a sinistra).



*Figura 1:* schema generale del quadrilatero articolato (a sinistra) e rappresentazione vettoriale (a destra).

Si schematizza ora ciascun membro del quadrilatero con un vettore nel piano (*Figura 1*, a destra): ad esempio il membro  $3$ , che collega la coppia rotoidale  $A$  alla coppia  $B$ , viene rappresentato come un vettore  $R_3$  avente origine in  $A$  ed estremo in  $B$ . I quattro membri del quadrilatero corrispondono allora ad altrettanti vettori  $R_i$ , inclinati rispetto all'asse  $X$  di un angolo  $\theta_i$ ; per la scelta di  $X$ ,  $R_1$  è in orizzontale ( $\theta_1 = 0$ ).

Si scrive ora l'equazione di chiusura vettoriale del meccanismo: come si vede dalla figura, deve valere

$$R_2 + R_3 = R_1 + R_4 \quad [1]$$

Il vettore  $R_i$ , per la notazione usata, ha componenti lungo  $X$  e  $Y$

$$R_i = (R_{ix}; R_{iy}) = (r_i \cdot \cos \theta_i; r_i \cdot \sin \theta_i) \quad [2]$$

dove  $r_i$  è lo scalare che corrisponde alla lunghezza del membro  $i$ ; si ha quindi  $\|R_i\| = r_i$ . Ora riscriviamo l'equazione vettoriale [1] come due equazioni scalari, relative rispettivamente all'asse  $X$  e all'asse  $Y$ :

$$R_{2x} + R_{3x} = R_{1x} + R_{4x} \Rightarrow r_2 \cdot \cos \theta_2 + r_3 \cdot \cos \theta_3 = r_1 \cdot \cos \theta_1 + r_4 \cdot \cos \theta_4 \quad [3]$$

$$= r_1 + r_4 \cdot \cos \theta_4$$

$$R_{2y} + R_{3y} = R_{1y} + R_{4y} \Rightarrow r_2 \cdot \sin \theta_2 + r_3 \cdot \sin \theta_3 = r_1 \cdot \sin \theta_1 + r_4 \cdot \sin \theta_4 \quad [4]$$

$$= r_4 \cdot \sin \theta_4$$

avendo sfruttato il fatto che  $\theta_1 = 0$  e dunque  $\cos(\theta_1) = 1$ ,  $\sin(\theta_1) = 0$ .

Ora conviene ricavare i termini relativi al membro 3 in funzione degli altri termini:

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 \quad [5]$$

$$r_3 \sin \theta_3 = r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2 \quad [6]$$

Eleviamo al quadrato le [5] e [6] e sommiamo le due equazioni risultanti, per ottenere la seguente:

$$(r_3 \cos \theta_3)^2 + (r_3 \sin \theta_3)^2 = (r_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2)^2 \quad [7]$$

Dopo qualche passaggio algebrico e ricordando la nota identità trigonometrica  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$  (valida per ogni  $\theta$ ) si arriva a

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2r_2r_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 - 2r_1r_2 \cos \theta_2 + 2r_1r_4 \cos \theta_4 - 2r_2r_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 \quad [8]$$

Così facendo abbiamo eliminato l'angolo  $\theta_3$ , che non compare nella formula [8]. Ora portiamo al primo membro tutti i termini funzione dell'angolo  $\theta_4$ , che vorremmo ricavare, e tutti gli altri al secondo; si ottiene

$$2 \cos \theta_4 (r_2r_4 \cos \theta_2 - r_1r_4) + 2r_2r_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 = -2r_1r_2 \cos \theta_2 + (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2) \quad [9]$$

Ora conviene introdurre i seguenti parametri ausiliari:

$$h_1 = \frac{r_1}{r_2} \quad [10]$$

$$h_2 = \frac{r_1}{r_3} \quad [11]$$

$$h_3 = \frac{r_1}{r_4} \quad [12]$$

e poi

$$h_4 = \frac{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_3} \quad [13]$$

$$h_5 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} \quad [14]$$

Ora dividiamo entrambi i membri per  $2r_2r_4$ ; con le definizioni di  $h_1$ ,  $h_3$  e  $h_5$  appena viste troviamo

$$\cos \theta_4 (\cos \theta_2 - h_1) + \sin \theta_2 \sin \theta_4 = -h_3 \cos \theta_2 + h_5 \quad [15]$$

Nell'equazione [15],  $\theta_2$  è supposto noto, perché il membro 2 è il movente, di cui si controlla la posizione. Bisogna risolvere l'equazione per trovare l'incognita  $\theta_4$ ; questa però appare come argomento sia di una funzione seno che di una funzione coseno. In questi casi conviene esprimere entrambe in funzione della tangente dell'angolo metà, ossia  $t_4 = \tan(\theta_4/2)$ . Infatti valgono le seguenti identità trigonometriche:

$$\sin \theta_4 = \frac{2t_4}{1+t_4^2} \quad \cos \theta_4 = \frac{1-t_4^2}{1+t_4^2} \quad [16]$$

Sostituendo la [16] nella [15] e moltiplicando per il denominatore comune  $(1+t_4^2)$  otteniamo

$$(1-t_4^2)(\cos \theta_2 - h_1) + \sin \theta_2 \cdot 2t_4 = (1+t_4^2)(-h_3 \cos \theta_2 + h_5) \quad [17]$$

e raccogliendo i termini simili si arriva a

$$0 = [-h_1 + (1 - h_3) \cos \theta_2 + h_5] \cdot t_4^2 - (2 \sin \theta_2) \cdot t_4 + [h_1 - (1 + h_3) \cos \theta_2 + h_5] \quad [18]$$

Ora, a partire dai parametri  $h_i$  costanti definiti nelle eq. [10-14], definiamo le seguenti variabili accessorie, che sono funzioni dell'angolo di ingresso  $\theta_2$ :

$$a = -h_1 + (1 + h_2) \cos(\theta_2) + h_4 \quad [19]$$

$$b = -2 \sin(\theta_2) \quad [20]$$

$$c = h_1 - (1 - h_2) \cos(\theta_2) + h_4 \quad [21]$$

$$d = -h_1 + (1 - h_3) \cos(\theta_2) + h_5 \quad [22]$$

$$e = h_1 - (1 + h_3) \cos(\theta_2) + h_5 \quad [23]$$

Inserendo nella [18] le definizioni di  $b$ ,  $d$  ed  $e$  appena viste si arriva infine a

$$0 = dt_4^2 + bt_4 + e \quad [24]$$

Siamo così passati da un'equazione trigonometrica nell'incognita  $\theta_4$  a una polinomiale nell'incognita  $t_4$ . In particolare la [24] è un'equazione di secondo grado, che ha in generale due soluzioni:

$$\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = t_4 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4de}}{2d} \Rightarrow \theta_4 = 2 \arctan\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4de}}{2d}\right) \quad [25]$$

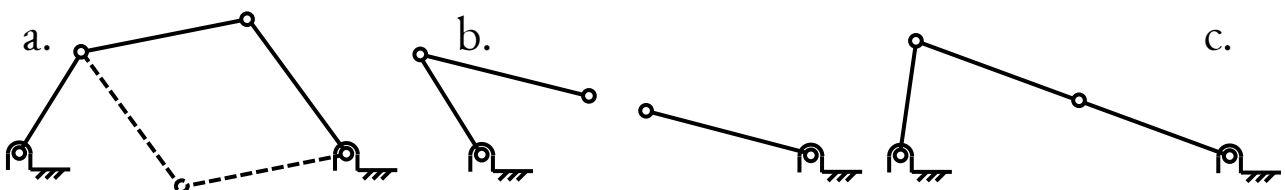
Si è così ricavata  $\theta_4$  in funzione di  $\theta_2$ . Per ricavare  $\theta_3$  si parte sempre dalle eq. [3] e [4], ma stavolta si isolano i membri relativi a  $\theta_4$ , che si semplificano sommando ed elevando al quadrato le equazioni risultanti. Così facendo si ottiene un'equazione nella sola incognita  $\theta_3$ , che si può poi risolvere analogamente a quanto appena visto; si trova così

$$\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = t_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \theta_3 = 2 \arctan\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \quad [26]$$

È opportuno notare che il termine sotto radice nella eq. [25] può essere positivo, negativo o nullo. A queste tre eventualità corrispondono rispettivamente, per l'analisi di posizione del quadrilatero, le seguenti:

- Due soluzioni reali e distinte, a seconda del segno + o - della radice in [25]. In tal caso, il quadrilatero si può assemblare in due modi diversi, fissata la posizione del movente 2;
- Nessuna soluzione reale: il quadrilatero non può essere assemblato in questa posizione. Questo accade se il movente ha un arco di movimento limitato e l'angolo  $\theta_2$  è al di fuori di tale arco;
- Due soluzioni reali e coincidenti: il quadrilatero si può assemblare in un solo modo.

Le tre possibili situazioni sono mostrate in *Figura 2*.



*Figura 2:* l'analisi di posizione del quadrilatero può avere zero, una o due soluzioni.

Per quanto riguarda l'analisi di velocità, si parte di nuovo dalle eq. [3] e [4] e si deriva rispetto al tempo  $t$ :

$$-r_2 \sin \theta_2 \cdot \omega_2 - r_3 \sin \theta_3 \cdot \omega_3 = -r_4 \cdot \sin \theta_4 \cdot \omega_4 \quad [27]$$

$$r_2 \cos \theta_2 \cdot \omega_2 + r_3 \cdot \cos \theta_3 \cdot \omega_3 = r_4 \cdot \cos \theta_4 \cdot \omega_4 \quad [28]$$

ricordando che i parametri variabili sono gli angoli  $\theta_i$ , che derivati rispetto al tempo danno le velocità angolari  $\omega_i = d\theta_i/dt$ . Di qui, moltiplichiamo la [27] per  $\cos(\theta_4)$ , la [28] per  $\sin(\theta_4)$  e sommiamo:

$$\begin{aligned} -(r_2 \sin \theta_2 \omega_2 + r_3 \sin \theta_3 \omega_3) \cdot \cos \theta_4 + (r_2 \cos \theta_2 \omega_2 + r_3 \cdot \cos \theta_3 \omega_3) \cdot \sin \theta_4 \\ = -(r_4 \sin \theta_4 \omega_4) \cdot \cos \theta_4 + (r_4 \cos \theta_4 \omega_4) \cdot \sin \theta_4 \end{aligned} \quad [29]$$

Il secondo membro è nullo: abbiamo così eliminato i termini in  $\omega_4$ . Di qui, semplificando,

$$r_2 \omega_2 (-\sin \theta_2 \cos \theta_4 + \cos \theta_2 \sin \theta_4) + r_3 \omega_3 (-\sin \theta_3 \cos \theta_4 + \cos \theta_3 \sin \theta_4) = 0 \quad [30]$$

Ricordando che, in generale, vale l'identità  $\sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a) = \sin(a - b)$  si semplifica la [30] come

$$r_3 \omega_3 \sin(\theta_4 - \theta_3) = -r_2 \omega_2 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_2) = r_2 \omega_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_4) \quad [31]$$

da cui infine si ricava

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad [32]$$

con il che si è trovata la velocità di rotazione di **3**, nota la velocità di **2**.

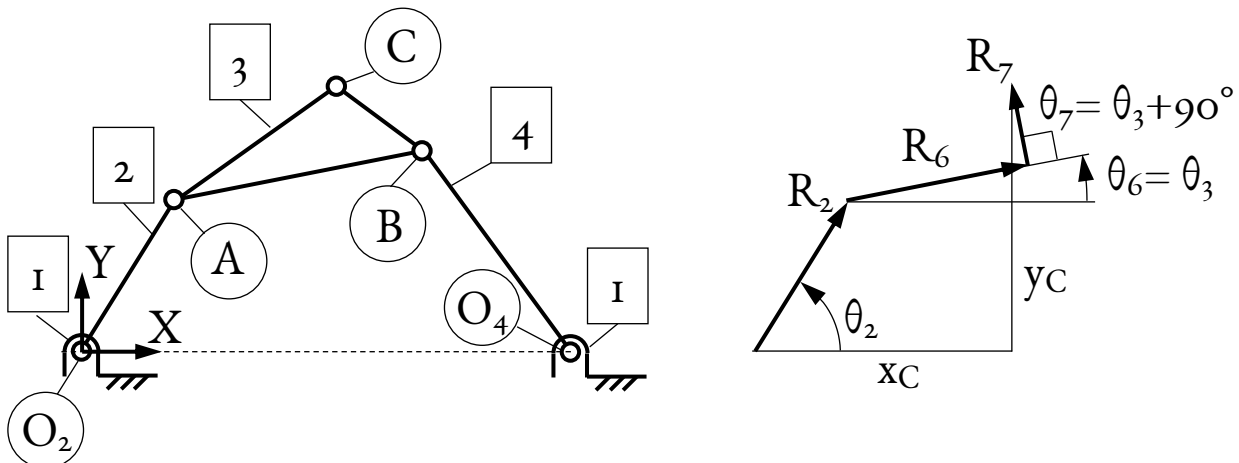
Per ricavare la  $\omega_4$  si procede allo stesso modo, ma dalle eq. [27] e [28] si elimina invece  $\omega_3$ ; si ottiene

$$\omega_4 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{r_4} \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad [33]$$

Nelle eq. [32-33], gli angoli  $\theta_3$  e  $\theta_4$  sono dati per noti dall'analisi di posizione svolta in precedenza.

Si noti come il rapporto di trasmissione tra il membro **3** e il membro **2**, ossia  $\tau_{32} = \omega_3 / \omega_2$ , sia variabile in funzione della posizione del meccanismo: dunque, anche se il movente **2** gira a velocità costante, il membro **3** avrà in generale una velocità variabile e un'accelerazione angolare diversa da zero (lo stesso vale per **4**).

Ora consideriamo l'analisi di posizione e velocità per un punto **C** sul membro **3**; si veda *Figura 3*.



*Figura 3:* schema del quadrilatero con punto di biella (a sinistra) e rappresentazione vettoriale (a destra).

Qui, la posizione relativa di **C** rispetto ad **A** è data da un vettore **R<sub>6</sub>**, parallelo a **R<sub>3</sub>**, e da un vettore **R<sub>7</sub>** che invece è perpendicolare a **R<sub>3</sub>**; le lunghezze di questi due nuovi vettori, rispettivamente **r<sub>6</sub>** e **r<sub>7</sub>**, sono costanti e supposte note a priori, avendo definito le dimensioni del meccanismo. Gli angoli di questi vettori rispetto all'asse **X**, per quanto appena spiegato, sono  $\theta_6 = \theta_3$  e  $\theta_7 = \theta_3 + 90^\circ$ .

L'equazione di chiusura da scrivere in questo caso è

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_7 \quad [a1]$$

dove **R<sub>C</sub>** è il vettore che ha origine in **O** (origine degli assi) ed estremo in **C**, le cui due componenti, sugli assi di riferimento, sono le coordinate **x<sub>C</sub>** e **y<sub>C</sub>** del punto **C** che ci interessa trovare. Avendo già fatto l'analisi di posizione del membro 3, l'angolo  $\theta_3$  è già noto e i due vettori **R<sub>6</sub>** e **R<sub>7</sub>** sono completamente definiti; allora

$$x_C = r_2 \cos \theta_2 + r_6 \cos \theta_6 + r_7 \cos \theta_7 = r_2 \cos \theta_2 + r_6 \cos \theta_3 - r_7 \sin \theta_3 \quad [a2]$$

$$y_C = r_2 \sin \theta_2 + r_6 \sin \theta_6 + r_7 \sin \theta_7 = r_2 \sin \theta_2 + r_6 \sin \theta_3 + r_7 \cos \theta_3 \quad [a3]$$

L'analisi di velocità del punto **C** si completa derivando le equazioni appena ricavate rispetto al tempo, da cui si trovano le seguenti:

$$\dot{x}_C = -r_2 \omega_2 \sin(\theta_2) - \omega_3 [r_6 \sin(\theta_3) + r_7 \cos(\theta_3)] \quad [34]$$

$$\dot{y}_C = r_2 \omega_2 \cos(\theta_2) + \omega_3 [r_6 \cos(\theta_3) - r_7 \sin(\theta_3)] \quad [35]$$

dove la velocità  $\omega_3$  è nota dalla [32].

Qui non si è svolta l'analisi di accelerazione; con il metodo analitico, essa si ottiene derivando le equazioni per  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ , **x<sub>C</sub>** e **y<sub>C</sub>** due volte rispetto al tempo. Con il metodo grafico, invece, bisogna tracciare il poligono delle accelerazioni.

## Bibliografia

Cleghorn, William L. e Dechev, Nikolai. 2015. *Mechanics of machines*. New York : Oxford University Press, 2015. p. 158-162.

Funaioli, Ettore, Maggiore, Alberto e Meneghetti, Umberto. 2005. *Lezioni di meccanica applicata alle macchine*. Bologna : Pàtron, 2005. p. 147-149. Vol. 1 - Fondamenti di meccanica delle macchine.



Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o spedisci una lettera a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.